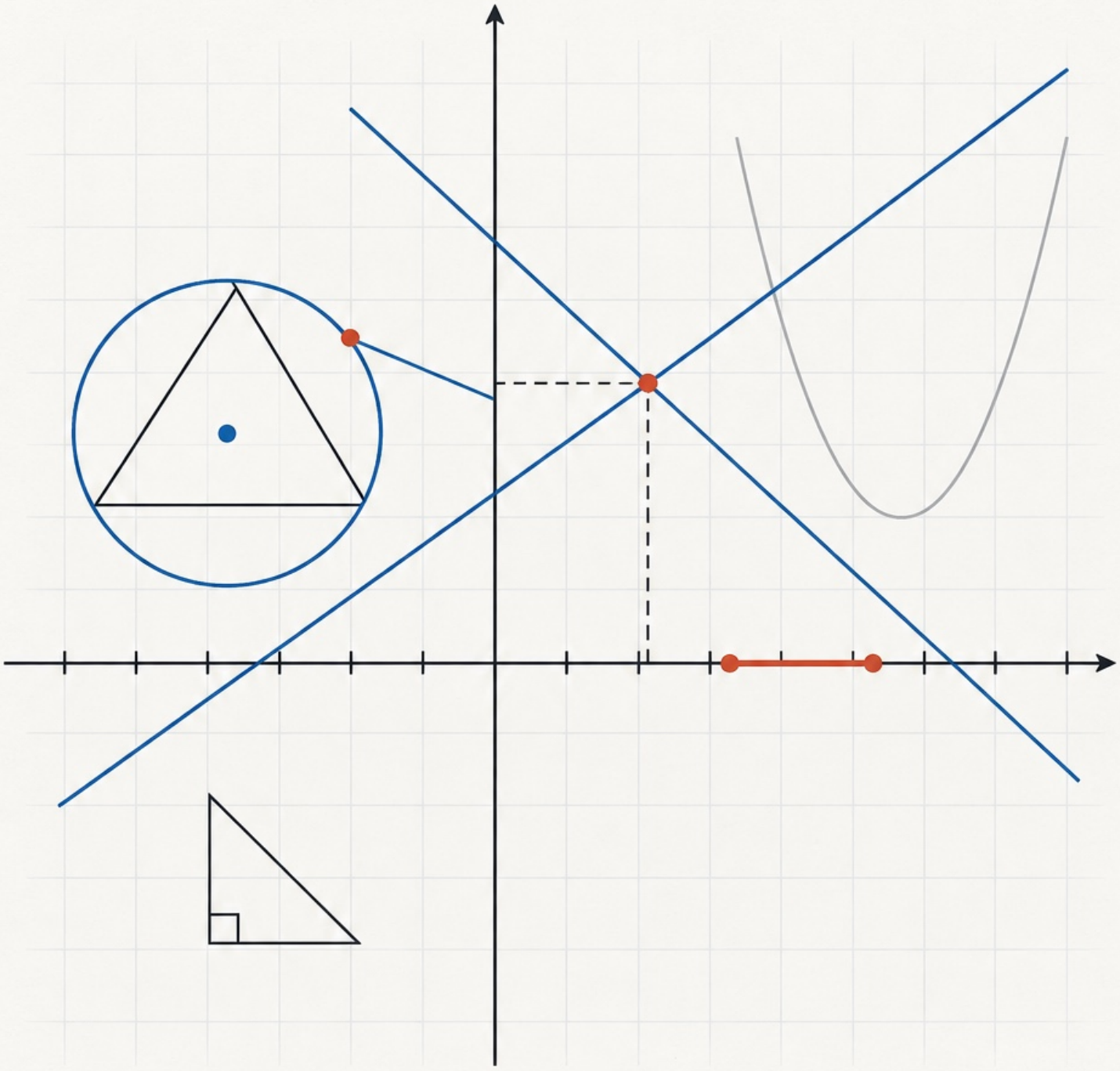
初中数学的自然原理

从本义出发，把代数和几何连成一个整体



面向中学生

目录

导读 7

第一部分：数学的语言与推理

总览：数学怎样说话、怎样讲理 11

三种数学语言 12

定义、命题与定理 17

基本事实 22

怎样证明 ★ 29

第二部分：数

总览：数的扩充 35

有理数 36

有理数的运算 ★ 41

实数 ★ 47

第三部分：式

总览：式的家族 53

代数式 54

整式的加减 59

整式的乘法 ★ 62

因式分解 ★ 69

分式 ★ 74

二次根式 ★ 79

第四部分：方程与不等式

总览：从等式到方程 85

一元一次方程 87

二元一次方程组 ★ 91

不等式与不等式组 ★ 95

分式方程 ★ 100

一元二次方程 ★ 104

第五部分：图形与推理

总览：从直线形到证明 111
几何图形初步 113
相交线与平行线 120
三角形 128
全等三角形 ★ 136
轴对称与等腰三角形 ★ 140
勾股定理 ★ 149
四边形 ★ 157
尺规作图 ★ 169

第六部分：坐标与图形的变化

总览：给图形装上坐标 179
平面直角坐标系 180
平移、轴对称与旋转 ★ 188

第七部分：函数

总览：三种函数对照 199
函数 201
一次函数 ★ 206
反比例函数 ★ 212
二次函数 ★ 218

第八部分：相似与锐角三角函数

总览：从全等到相似 229
相似 ★ 230
锐角三角函数 ★ 240
投影与视图 248

第九部分：圆

总览：圆的对称性 257
圆的有关性质 ★ 259
与圆有关的位置关系 ★ 268
与圆有关的计算 ★ 277

第十部分：统计与概率

总览：从数据到决策 287
数据的收集、整理与描述 288
数据的分析 ★ 294
概率 ★ 302

第十一部分：数形结合

总览：一体两面 309
以形助数 311
以数解形 318
动点与函数 ★ 323
方程思想与建模 327
分类讨论 ★ 332
辅助线从哪里来 336

附录

学习建议 341
公式与定理汇总 342
2026 年河南中考数学 355
2025 年河南中考数学 367
2024 年河南中考数学 381
2023 年河南中考数学 396
2022 年河南中考数学 408
学习工具 421

导读

初中数学有两条主线：一条从数出发，经过式，走到方程和函数；一条从形出发，经过推理，走到图形的变换。两条线最后汇合，因为每个代数关系都有一个几何的样子，每个几何关系都能写成数。

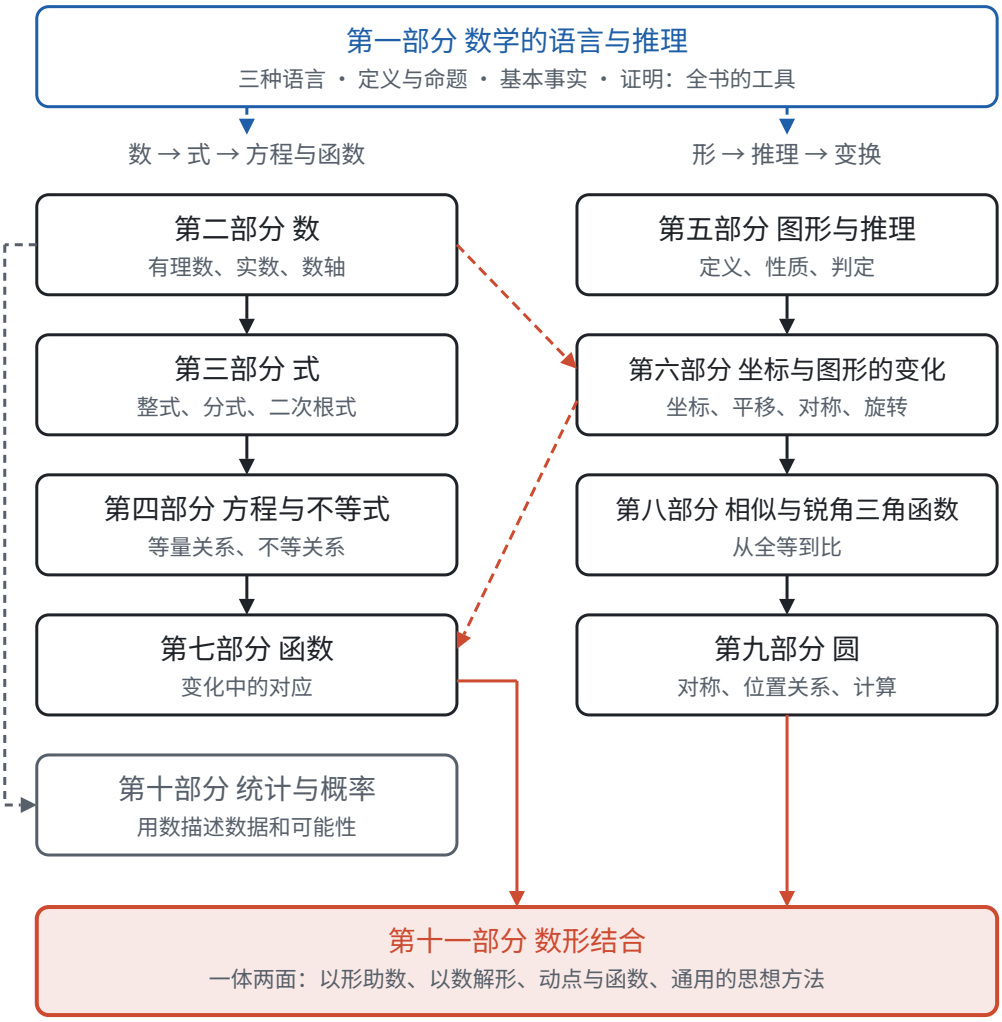
两条主线

数的一条：数 → 式 → 方程与函数。 先把数从有理数扩充到实数，再用字母代替数，得到式；式和式之间用等号、不等号连起来，就是方程和不等式；把其中的字母看成变量，研究一个量怎样跟着另一个量变，就是函数。每走一步，都是为了解决上一步解决不了的问题：减法要有负数，开方要有无理数，“倒着算”太难就列方程，一个方程只回答一个值、想看整个变化过程就要函数。

形的一条：形 → 推理 → 变换。 先认识点、线、角，再研究三角形、四边形和圆。几何从一开始就要求说理：结论不是量出来、看出来的，而是从定义和基本事实一步一步推出来的。推理的核心工具是全等三角形；让全等“动起来”，就是平移、轴对称和旋转；放开大小、只保留形状，就是相似。

两条线汇合：数形结合。 数轴让数有了位置，坐标系让点有了一对数，函数的图象让式子有了形状；反过来，勾股定理把直角变成边的关系，相似把形状变成比，坐标把几何问题变成计算。学到最后，同一个问题既能用数来算，也能画成图来看。

框架图



部分	讲什么	从这里开始读
数学的语言与推理	三种数学语言；定义、命题与定理；基本事实；怎样证明	第一部分“总览：数学怎样说话、怎样讲理”（第 11 页）
数	从自然数扩充到实数，数轴	第二部分“总览：数的扩充”（第 35 页）
式	代数式、整式、分式、二次根式	第三部分“总览：式的家族”（第 53 页）
方程与不等式	各种方程和不等式，都化归为一元一次方程来解	第四部分“总览：从等式到方程”（第 85 页）
图形与推理	从点、线、角到三角形、四边形，每一条性质都要证明	第五部分“总览：从直线形到证明”（第 111 页）
坐标与图形的变化	坐标系；平移、轴对称、旋转	第六部分“总览：给图形装上坐标”（第 179 页）
函数	一次函数、反比例函数、二次函数	第七部分“总览：三种函数对照”（第 199 页）
相似与锐角三角函数	从全等到相似，从相似到边的比	第八部分“总览：从全等到相似”（第 229 页）
圆	圆的对称性，位置关系，弧长和面积	第九部分“总览：圆的对称性”（第 257 页）
统计与概率	收集、整理、描述、分析数据；概率	第十部分“总览：从数据到决策”（第 287 页）

部分	讲什么	从这里开始读
数形结合	以形助数、以数解形，以及贯穿全书的思想方法	第十一部分“总览：一体两面”（第 309 页）

第一部分不属于哪一个年级，是全书的工具：怎样把一句话翻译成式子和图形，推理从哪里开始，证明怎样写。第十部分用的主要是数和比，自成一个领域。其余八个部分，左边四个是数的主线，右边四个是形的主线，中间靠数轴和坐标系连在一起，最后在第十一部分汇合。

贯穿全书的几条主线

同一个想法会在不同的部分里反复出现，只是换了样子。下面几条线把分散在各处的内容串起来，学到后面时回头看前面，会发现是同一件事：

主线	经过的页面
数轴 → 坐标系 → 函数图象	第二部分“有理数”（第 36 页）（数轴，绝对值是到原点的距离）→ 第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）（解集画在数轴上）→ 第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）（两条数轴组成坐标系）→ 第七部分“一次函数”（第 206 页）、第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第七部分“二次函数”（第 218 页）（函数的图象）
面积模型	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）（拼图验证乘法公式）→ 第三部分“因式分解”（第 69 页）（把面积块拼成长方形）→ 第五部分“勾股定理”（第 149 页）（拼图证明）→ 第四部分“一元二次方程”（第 104 页）（配方就是配成正方形）
方程是数与形的交点	第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）（方程组的解是两条直线的交点）→ 第七部分“二次函数”（第 218 页）（一元二次方程的根是抛物线与 x 轴的交点，判别式决定交点个数）→ 第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）（直线与圆有几个公共点，就是一个方程有几个解）
对称	第二部分“有理数”（第 36 页）（相反数关于原点对称）→ 第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）→ 第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）（对称点的坐标）→ 第七部分“二次函数”（第 218 页）（抛物线的对称轴）→ 第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）（圆的对称性和垂径定理）
比	第八部分“相似”（第 230 页）（比例线段、相似比）→ 第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）（直角三角形两条边的比）→ 第七部分“一次函数”（第 206 页）（k 是直线的倾斜程度）
变化与对应	第三部分“代数式”（第 54 页）（代数式的值随字母变化）→ 第七部分“函数”（第 201 页）（一个量跟着另一个量变）→ 第十一部分“动点与函数”（第 323 页）（图形里的点在动，长度和面积跟着变）

这几条线在第十一部分“总览：一体两面”（第 309 页）里会再收拢一次，那里还有一张代数和几何的对照表。

怎么用这份资料

每一页都是同样的结构： 开头一行注明对应人教版教材的哪一章；接着用一句话讲清这一页是什么；然后是“从哪里来”（为什么需要它、怎样定义）、推导、例题、易错点，最后是“联系”，链接到和它有关的其

他页面。标有 ★ 的页面是中考的重点；标有“拓展”的内容是课本的选学部分，或者超出了课标的要求，可以先跳过。

学习顺序。 学校是按年级学的，一个学期里数和形交替出现。所以平时可以跟着课本的进度：学到哪一章，就读对应的那一页，每页开头都写着对应的章节。每个部分的总览页列出了本部分各页的关系和建议的顺序，第一次进入一个部分时先读总览。复习时再按部分的顺序通读，把同一部分的内容连成一片。各年级对应哪些页面，见附录学习建议（第 341 页）。

第一部分穿插着学。 第一部分讲数学的语言与推理，都是方法，不必一口气读完，也不必等到最后。学到用字母表示数时，读第一部分“三种数学语言”（第 12 页）；第一次写几何推理时，读第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）和第一部分“基本事实”（第 22 页）；学全等三角形时，读第一部分“怎样证明”（第 29 页）。什么时候读哪一节，第一部分“总览：数学怎样说话、怎样讲理”（第 11 页）里有一张表。

读的时候多问“为什么”。 每个性质、公式都能从定义和前面的结论推出来，书里都写了推导。读完一条结论，试着合上书，自己把推导说一遍；说不下去的地方，就是还没弄懂的地方。遇到“见第几部分某某”的链接，点过去看看，那里讲的往往是同一件事的另一面。

公式和定理的汇总见附录公式与定理汇总（第 342 页），每一条都链接回推导它的页面，复习时可以用来查漏补缺。

总览：数学怎样说话、怎样讲理

数学先用文字、符号、图形三种语言把一件事说清楚，再从定义和基本事实出发，一步一步推出所有的结论。
这一部分讲的就是这两件事：怎样说，怎样讲理。它是全书的工具，不属于哪一个年级，可以穿插着学。

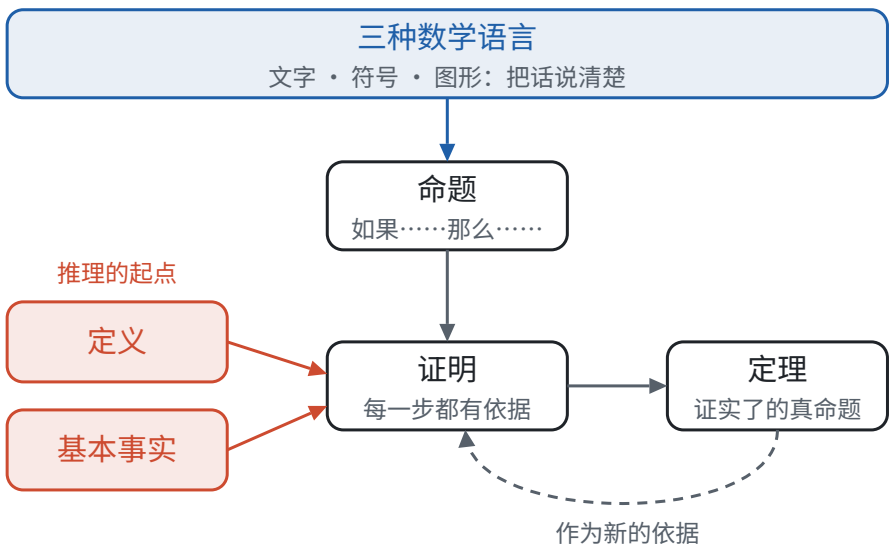
这一部分的四页

页面	回答的问题	主要内容	最先用到的地方
第一部分“三种数学语言”（第 12 页）	同一个关系怎样用不同的方式说出来？	文字、符号、图形互相翻译；用字母表示一般规律	七年级上册列代数式
第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）	推理用的“材料”各是什么？	定义；命题的条件和结论；真假与反例；逆命题	七年级下册相交线与平行线
第一部分“基本事实”（第 22 页）	推理从哪里开始？	为什么需要起点；公理化方法；9 条基本事实各用在哪里	七年级上册几何图形初步
第一部分“怎样证明”（第 29 页）	怎样一步步推出结论？	书写格式；分析法和综合法；辅助线；反证法；代数推理	八年级上册三角形、全等三角形

推理的材料

类别	是什么	要不要证明	例子
定义	规定一个名称指的是什么	不需要，是约定	两条直线相交成直角，叫互相垂直
命题	判断一件事情的语句，有条件和结论	真的要证明，假的举反例	相等的角是对顶角（假命题）
基本事实	公认正确、作为起点的真命题	不证明，直接用	两点确定一条直线
定理	经过证明的真命题	要证明	对顶角相等

四页之间的关系



- **三种语言是“说”。** 要推理，先得把题目读懂、把命题说清楚：文字叙述的命题要翻译成图形和符号，写成“已知、求证”；代数里用字母把“任意一个数”写出来。
- **定义、命题是“材料”。** 定义规定每个名称的意思；命题分成条件和结论，才知道从哪里出发、要到哪里去。
- **基本事实是“起点”。** 追问“为什么”总要有个尽头，这几条不证明的结论就是尽头。
- **证明是“方法”。** 从起点出发，每一步有依据，推出的真命题就是定理。定理又能当作新的依据，去证明下一个定理。

整个初中数学就是这样一层层搭起来的：对顶角相等 → 平行线的判定和性质 → 三角形内角和 → 多边形内角和……每一层都站在前一层上，最底下是定义和基本事实。

什么时候读哪一页

这一部分不必一口气读完，学到相关内容时回来读对应的部分，效果更好：

学到	读
七年级上册：用字母表示数、代数式	“三种数学语言”的前半部分
七年级上册：几何图形初步	“基本事实”中的直线和线段
七年级下册：相交线与平行线	“定义、命题与定理”；“基本事实”中的垂线和平行线；“三种数学语言”中的几何翻译
七年级下册：解方程、解不等式	“基本事实”中代数推理的起点
八年级上册：三角形、全等三角形	“怎样证明”；“基本事实”中的三角形全等
八年级上册：整式的乘法	“怎样证明”中的代数推理
九年级：相似	“基本事实”中的平行线分线段成比例

全书各部分之间的关系，见导读（第 7 页）的框架图。

三种数学语言

> 对应人教版七年级上册第三章、七年级下册 7.3。

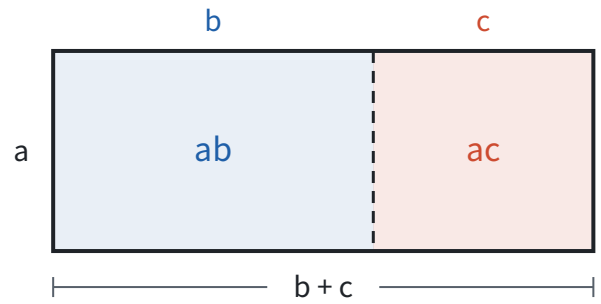
同一个数学关系可以用三种语言来说：文字语言好懂，符号语言简洁、能直接运算，图形语言直观。 读题、列式、画图、写证明，其实都是在这三种语言之间翻译。

从哪里来

小学学过的乘法分配律，可以用三种方式说出来：

语言	乘法分配律
文字语言	一个数乘两个数的和，等于把这个数分别乘这两个数，再把两个积相加

语言	乘法分配律
符号语言	$a(b+c)=ab+ac$
图形语言	宽为 a、长为 $b+c$ 的长方形，面积可以整体算，也可以分成两块算



三种说法讲的是同一件事。文字适合第一次理解；符号只用一行，而且可以接着算下去；图形让人一眼看出它为什么对：大长方形被虚线分成两块，整体的面积当然等于两块面积的和。

三种语言各有长处

语言	长处	短处	适合做什么
文字语言	好懂，能说清前因后果	长，不便计算，有时有歧义	读题；叙述定义、定理
符号语言	简洁、准确，能按规则运算和推理	抽象，看不出直观的意思	列式、计算、写证明
图形语言	直观，容易看出位置关系和解题方向	只画出一种情况，看出来的不能当依据	理解题意、找思路、检验答案

文字的歧义是真实存在的。“a 与 b 的和的平方”和“a 与 b 的平方和”只差一个“的”字，意思却不同，前者是 $(a+b)^2$，后者是 a^2+b^2。写成符号，就不会有第二种理解。

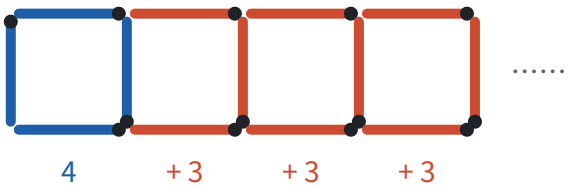
用字母表示数

符号语言的核心是**用字母表示数**。字母可以表示：

- **一般规律：** $a+b=b+a$ 这一个式子，代替了 $1+2=2+1$、$3.5+7=7+3.5$ 等无数个算式；
- **公式：** 长方形面积 $S=ab$，圆的周长 $C=2\pi r$；
- **未知数：** 列方程时，用 x 表示要求的量（见第四部分“一元一次方程”（第 87 页））；
- **变量：** 一个量随另一个量变化时，用 x、y 表示它们（见第七部分“函数”（第 201 页））。

字母代表的数可以是正数、负数，也可以是 0。所以 $-a$ 不一定是负数：$a=-3$ 时，$-a=3$。

例 1　用火柴棒按下图的方式摆正方形。摆 n 个正方形，需要多少根火柴棒？



思路： 先数具体的：1 个正方形 4 根，2 个 7 根，3 个 10 根，4 个 13 根。再看是怎样多出来的：第 1 个正方形用 4 根，以后每多摆一个，左边那根和前一个正方形共用，只要再加 3 根。把这个“数法”翻译成符号就行。

解： 第 1 个正方形用 4 根，后面还有 $n-1$ 个正方形，每个用 3 根，共需

$$4+3(n-1)=3n+1$$

根火柴棒。

检验： $n=4$ 时，$3\times 4+1=13$，和数出来的一样。

想一想： 同一张图，换一种看法，就得到另一个式子：

看法	式子
第 1 个正方形 4 根，以后每个再加 3 根	$4+3(n-1)$
每个正方形都只算上、下、右 3 根，最后补上最左边 1 根	$3n+1$
横放的分上下两排，每排 n 根；竖放的有 $n+1$ 根	$2n+(n+1)$
每个正方形都算 4 根，再减去重复算了的 $n-1$ 根	$4n-(n-1)$

四个式子化简后都是 $3n+1$（见第三部分“整式的加减”（第 59 页））。数的方法不同，数的却是同一堆火柴，所以结果一定相等。这正是化简的意义：看起来不同的式子，其实表示同一个数量。

例 2　任意写一个个位不是 0 的两位数，把它的十位数字和个位数字交换，得到一个新的两位数。说明：这两个数的和一定是 11 的倍数。

思路： 试几个：$23+32=55$，$47+74=121$，都是 11 的倍数。但“任意”一个两位数有很多个，一个个试不完，要用字母表示一般的两位数。

解： 设原来的两位数十位数字是 a，个位数字是 b，这个数是 $10a+b$；交换后的数是 $10b+a$。它们的和是

$$(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b).$$

$a+b$ 是整数，所以和是 11 的倍数。

这里的关键一步是翻译：十位数字是 a、个位数字是 b 的两位数，是 $10a+b$，不是 ab。用字母说明一般规律，就是代数推理（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

几何里的翻译

几何题常常三种语言一起出现：题目用文字叙述，配一张图，证明要用符号写。常见的说法这样对应：

文字语言	符号语言
点 C 是线段 AB 的中点	$AC=CB=(1/2)AB$

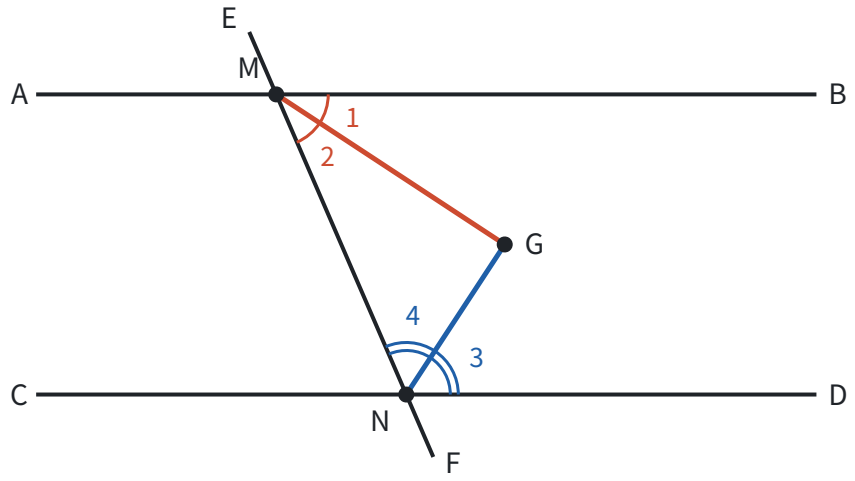
文字语言	符号语言
射线 OC 平分 $\angle AOB$	$\angle AOC=\angle BOC=1/2\angle AOB$
直线 AB 与 CD 垂直，垂足为 O	$AB\perp CD$ 于点 O，$\angle AOC=90^\circ$
直线 a 与 b 平行	$a\parallel b$
$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补	$\angle 1+\angle 2=180^\circ$
$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等	$\triangle ABC\cong\triangle DEF$

一个用文字叙述、没有图的几何命题，要证明它，先要做三件事：

1. 分清条件和结论（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））；
2. 按条件画图，给点和线起名字，画一般的情况，不要画成特殊图形；
3. 用图上的字母把条件写成“已知”，把结论写成“求证”。

例 3　把命题“两条平行线被第三条直线所截，同旁内角的平分线互相垂直”写成已知、求证，并证明。

思路： 条件是“两条平行线被第三条直线所截”和“画出一对同旁内角的平分线”，结论是“这两条平分线互相垂直”。文字里一个字母也没有，要先画图、起名字，再用这些名字写出已知和求证。



已知： 如图，$AB\parallel CD$，直线 EF 分别交 AB、CD 于点 M、N，MG 平分 $\angle BMN$，NG 平分 $\angle DNM$，MG 与 NG 交于点 G。

求证： $MG\perp NG$。

图中 $\angle 1$、$\angle 2$ 是 $\angle BMN$ 被 MG 分成的两个角，$\angle 3$、$\angle 4$ 是 $\angle DNM$ 被 NG 分成的两个角。翻译好了，证明的方向也就清楚了：要证垂直，就是要证 $\angle MGN=90^\circ$；它在 $\triangle MGN$ 里，只要算出另外两个角 $\angle 2$、$\angle 4$ 的和。

证明： 因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle BMN+\angle DNM=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）。因为 MG 平分 $\angle BMN$，NG 平分 $\angle DNM$，所以

$$\angle 2+\angle 4=\frac{1}{2}\angle BMN+\frac{1}{2}\angle DNM=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ.$$

在 $\triangle MGN$ 中，$\angle MGN=180^\circ-(\angle 2+\angle 4)=90^\circ$（三角形内角和等于 180°），所以 $MG\perp NG$。

图形语言也能说代数

图形不只属于几何。代数里的很多关系，都能画出来：

符号语言	图形语言	见
$\lvert a\rvert$	数轴上表示 a 的点到原点的距离	第二部分“有理数”（第 36 页）
$x>2$	数轴上 2 右边的部分	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	边长为 $a+b$ 的正方形分成四块	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
$y=2x+1$	一条直线	第七部分“一次函数”（第 206 页）
二元一次方程组的解	两条直线的交点	第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）

一道代数题卡住了，试着把它画出来；一张图看不出结论，试着用字母把它算出来。这两个方向的翻译，贯穿整本书。

易错点

- **文字翻成符号时弄错运算顺序。** 先找出最后一步做的是什么运算：“a 与 b 的和的平方”最后做平方，是 $(a+b)^2$；“a 与 b 的平方和”最后做加法，是 a^2+b^2。“比 a 的 2 倍少 3”是 $2a-3$，不是 $3-2a$。
- **把两位数写成 ab。** 字母连写表示相乘，ab 是 $a\times b$。十位数字是 a、个位数字是 b 的两位数是 $10a+b$。
- **以为 $-a$ 一定是负数。** 字母可以表示任何数，a 是负数时，$-a$ 是正数。
- **代数式书写不规范。** 数字写在字母前面，写 $2a$ 不写 $a2$；字母和字母、数字和字母相乘时乘号可以省略，数字和数字相乘不能省略；带分数和字母相乘要写成假分数，一又二分之一乘 a 写成 $(3/2)a$；除法一般写成分数的形式。
- **把图上“看起来”的关系当成条件。** 看起来垂直、相等、在一条直线上，题目没有给出、也没有证明，就不能用。图形语言帮助找思路，不能当依据。
- **画图只画了特殊情况。** 题目说“三角形”，却画成等腰三角形或直角三角形，就容易把特殊图形才有的性质当成一般结论。

联系

- **代数式：** 用字母表示数量关系，就是把文字语言翻译成符号语言。见第三部分“代数式”（第 54 页）。
- **整式的加减：** 例 1 摆 n 个正方形的火柴棒问题，$4+3(n-1)$、$2n+(n+1)$、$4n-(n-1)$ 这几个式子看起来不同，化简后都是 $3n+1$。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。
- **整式的乘法：** 分配律、乘法公式都有面积模型，是符号和图形的互相翻译。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **函数：** 函数的解析式和图象，是同一个对应关系的符号语言和图形语言。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **证明：** 写“已知、求证”就是把文字命题翻译成图形和符号。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。

真题： 2026 年第 18 题（第 361 页）、2026 年第 22 题（第 365 页）、2025 年第 10 题（第 371 页）、2023 年第 11 题（第 399 页）、2022 年第 21 题（第 417 页）。

定义、命题与定理

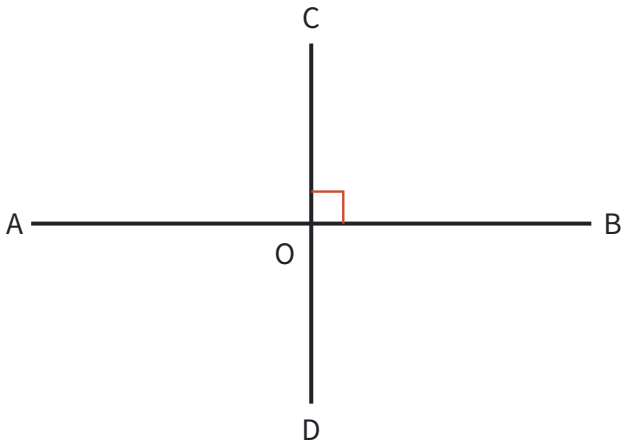
> 对应人教版七年级下册 7.3。

定义规定一个名称指的是什么；命题是判断一件事情的语句，由条件和结论组成；从定义、基本事实出发，经过推理证实是正确的命题，叫定理。 读数学书时，先分清一句话是在下定义，还是在说一个命题；推理，就是用定义和已知的真命题去判断新命题的真假。

定义：先把话说清楚

两个同学争论两条直线算不算“垂直”，如果没有一个共同的标准，就永远争不出结果。数学先把名称的意思规定下来，这就是**定义**。比如：

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直。



注意这个定义只要求“有一个角是直角”。另外三个角也是直角，是可以推出来的：$\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 合成平角 $\angle AOB$，$\angle BOD$ 和 $\angle BOC$ 合成平角 $\angle COD$，所以它们都等于 $180° - 90° = 90°$；剩下的 $\angle AOD$ 和 $\angle AOC$ 合成平角 $\angle COD$，同样等于 $180° - 90° = 90°$。定义里只写最少的条件，其余的特征留给推理，这是数学定义的习惯。

定义可以正着用，也可以反着用：

- 已知 $AB \perp CD$，可以得出 $\angle BOC = 90°$（垂直的定义）；
- 已知 $\angle BOC = 90°$，可以得出 $AB \perp CD$（垂直的定义）。

所以定义既能用来判断“是不是”，也能用来推出“有什么特征”。

很多定义的写法是：在一类已经知道的对象里，用一个特征划出一部分。

概念	从哪一类里划出来	划分的特征
等腰三角形	三角形	有两条边相等
平行四边形	四边形	两组对边分别平行
方程	等式	含有未知数
一元一次方程	方程	等号两边都是整式，只含一个未知数，未知数的次数是 1

定义是约定，不需要证明；但一经约定，就要严格按它来判断。判断两个角是不是对顶角，要看它们是不是两条直线相交形成的、有公共顶点、两边互为反向延长线，而不是看它们相不相等。

命题：条件和结论

判断一件事情的语句，叫命题。“对顶角相等”“两个负数的积是正数”都是命题；“$2+3=6$”也是命题，只不过判断错了。“画线段 $AB=3$ cm”“$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 相等吗？”没有作出判断，不是命题。

命题由**条件**和**结论**两部分组成：条件是已知的事项，结论是由条件推出的事项。把命题改写成“如果……那么……”，条件和结论就分开了：

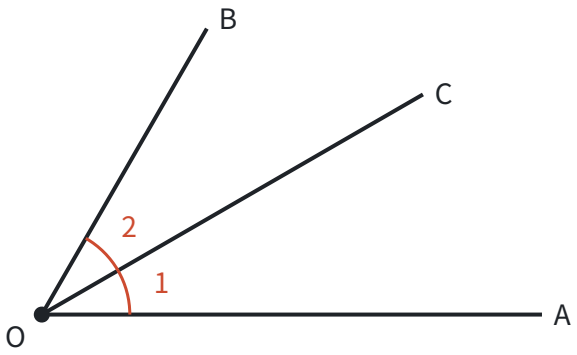
命题	如果（条件）	那么（结论）
对顶角相等	两个角是对顶角	这两个角相等
两个负数的积是正数	两个数都是负数	它们的积是正数
同角的补角相等	两个角是同一个角的补角	这两个角相等
两直线平行，同位角相等	两条平行线被第三条直线所截	所得的同位角相等
等腰三角形的两个底角相等	一个三角形是等腰三角形	它的两个底角相等

有的命题条件写在前面（“两直线平行，同位角相等”），有的藏在主语里（“对顶角相等”的条件是“两个角是对顶角”）。改写时先问：这句话在说谁、这个“谁”已知有什么特征？这就是条件；说它“怎么样”的部分，就是结论。

真命题、假命题和反例

- **真命题：** 如果条件成立，那么结论一定成立。
- **假命题：** 条件成立时，不能保证结论成立。

说明一个命题是假命题，只要举出**一个反例**：满足条件、却不满足结论的例子。比如“相等的角是对顶角”：



OC 平分 $\angle AOB$，$\angle 1=\angle 2$，满足条件“两个角相等”；它们是相邻的两个角，不是对顶角，不满足结论。一个反例就够了。

代数里也一样。“如果 $a^2=b^2$，那么 $a=b$”是假命题，反例是 $a=2$，$b=-2$：$a^2=b^2=4$，但 $a\neq b$。

反过来，说明一个命题是真命题，举多少个例子都不够，因为例子是举不完的，必须用推理证明（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

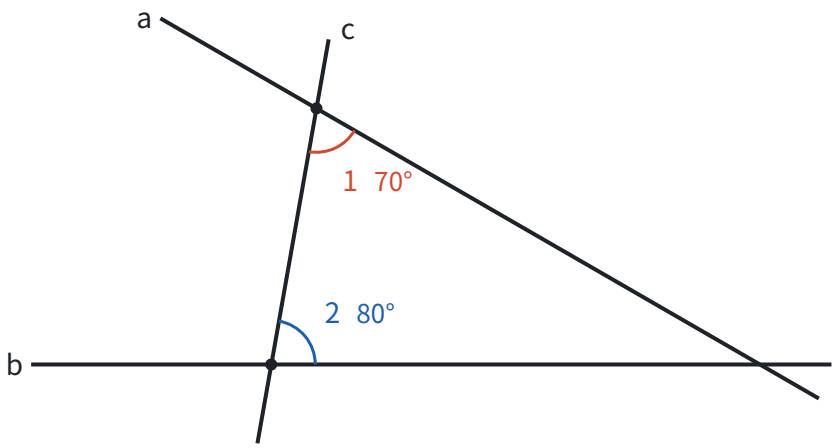
例 1　下列命题是真命题还是假命题？假命题请举出反例。

1. 两个锐角的和是钝角。
2. 如果 $a > b$，那么 $a^2 > b^2$。
3. 同旁内角互补。
4. 如果一个整数是 4 的倍数，那么它是 2 的倍数。

思路： 先分清条件和结论。怀疑是假命题，就在满足条件的例子里找一个不满足结论的；觉得是真命题，就要说出对所有情况都成立的理由。

解：

1. 假命题。$30°$ 和 $40°$ 都是锐角，和是 $70°$，不是钝角。
2. 假命题。$a = 1$，$b = -2$ 时，$a > b$，但 $a^2 = 1$，$b^2 = 4$，$a^2 < b^2$。
3. 假命题。条件里没有“两直线平行”。两条不平行的直线被第三条直线所截，同旁内角的和不等于 $180°$。反例见下图：直线 a、b 不平行，被直线 c 所截，同旁内角 $\angle 1 = 70°$，$\angle 2 = 80°$，和是 $150°$。
4. 真命题。4 的倍数可以写成 $4k$（k 是整数），$4k = 2 \times 2k$，$2k$ 也是整数，所以它是 2 的倍数。

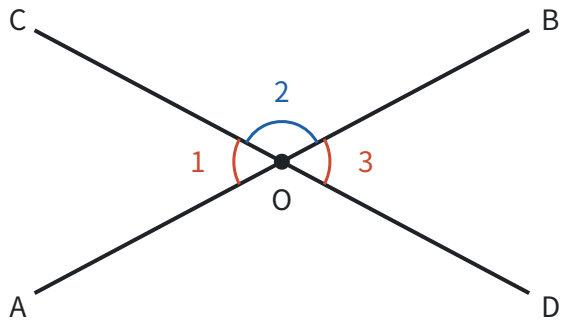


回顾： 第 2 题的反例要用到负数，第 3 题的毛病出在漏掉了条件。找反例时，专门去试那些“不太一样”的情况：负数和 0、钝角和直角、不平行的直线、不等腰的三角形。

定理、推论和基本事实

真命题里，有几条是公认正确、不加证明、作为推理起点的，叫**基本事实**（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。从定义、基本事实出发，经过推理证实为正确的命题，叫**定理**。定理证明之后，又可以当作新的依据去证明别的命题。

比如“对顶角相等”就是定理，证明它只用到平角和补角：



A、O、B 在一条直线上，所以 $\angle 1+\angle 2=180°$；C、O、D 在一条直线上，所以 $\angle 2+\angle 3=180°$。$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 都是 $\angle 2$ 的补角，所以 $\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）。

由一个定理直接推出的真命题，叫这个定理的**推论**。比如由“三角形内角和等于 $180°$”，马上推出“直角三角形的两个锐角互余”。

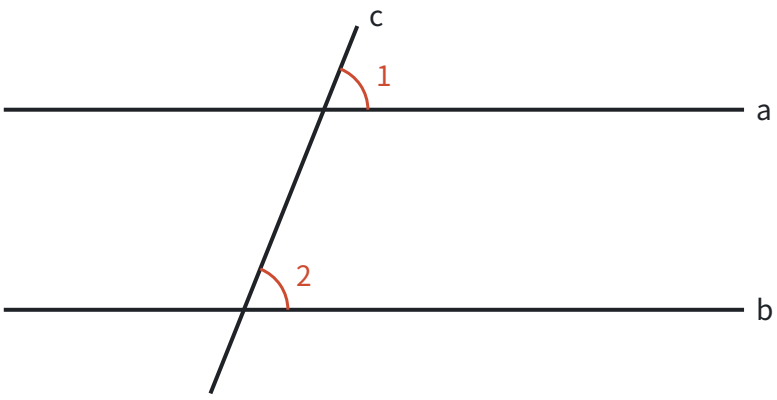
类别	是什么	要不要证明	例子
定义	规定名称的意思	不需要，是约定	有一个角是直角的两条相交直线互相垂直
基本事实	公认正确的推理起点	不证明，直接用	两点确定一条直线
定理	经过证明的真命题	要证明	对顶角相等
推论	由定理直接推出的真命题	要证明，通常很短	直角三角形的两个锐角互余

逆命题

把一个命题的条件和结论互换，得到的新命题叫原命题的**逆命题**。

- “两直线平行，同位角相等”的逆命题是“同位角相等，两直线平行”，两个都是真命题。
- “对顶角相等”的逆命题是“相等的角是对顶角”。前面举过反例：OC 平分 $\angle AOB$，分成的 $\angle 1=\angle 2$，但它们是相邻的两个角，不是对顶角，所以它是假命题。

原命题是真命题，逆命题不一定是真命题。 如果一个定理的逆命题也经过证明是真命题，它就是原定理的**逆定理**，这两个定理叫互逆定理。



上图里，“$a\parallel b$”和“$\angle 1=\angle 2$”可以互相推出。从角推出平行，是平行线的**判定**；从平行推出角，是平行线的**性质**。几何里的判定和性质，常常就是这样一对互逆的命题：

性质：已知是什么图形，推出它的特征	判定：已知有这些特征，推出是什么图形
两直线平行，同位角相等	同位角相等，两直线平行
等腰三角形的两个底角相等	有两个角相等的三角形是等腰三角形
角平分线上的点到角两边的距离相等	角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上
直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方	两边的平方和等于第三边的平方的三角形是直角三角形
平行四边形的两组对边分别相等	两组对边分别相等的四边形是平行四边形

证明时选哪一个，看方向：**要证“是什么”，用判定；已知“是什么”，用性质。** 已知 $a \parallel b$，要得到角相等，用性质；要证 $a \parallel b$，用判定。

例 2　写出下列命题的逆命题，并判断逆命题的真假。

1. 两直线平行，内错角相等。
2. 如果 $x = 2$，那么 $x^2 = 4$。
3. 全等三角形的对应角相等。

思路： 先把原命题写成“如果……那么……”，把两部分交换位置，再整理成通顺的句子。判断真假时，把逆命题当作一个全新的命题来对待，不要受原命题的影响。

解：

1. 逆命题：内错角相等，两直线平行。真命题。
2. 逆命题：如果 $x^2 = 4$，那么 $x = 2$。假命题，反例是 $x = -2$。
3. 原命题改写为“如果两个三角形全等，那么它们的对应角相等”，逆命题是：如果两个三角形的三个角分别相等，那么这两个三角形全等。假命题：把一个三角形按比例放大，三个角都不变，但两个三角形大小不同，不全等。

易错点

- **反例只满足了一半。** 反例必须满足条件、不满足结论。要说明“如果 $a > b$，那么 $a^2 > b^2$”是假命题，取 $a = -3$，$b = 2$ 不行，因为 $-3 > 2$ 不成立，这组数连条件都不满足。
- **以为原命题真，逆命题也真。** 原命题和逆命题的真假没有必然联系，逆命题要重新判断。
- **漏掉隐含的条件。** “同旁内角互补”“内错角相等”单独说都是假命题，少了“两直线平行”这个条件。
- **举几个例子就说是真命题。** 例子只能帮助发现规律、找反例；说明一个命题对所有情况都成立，要靠证明。
- **不按定义判断。** 判断对顶角、垂直、等腰三角形，要按定义逐条检查，不能凭“看起来像”或“大小相等”。
- **条件和结论找错。** “等角的余角相等”的条件是“两个角分别是两个相等的角的余角”，结论是“这两个角相等”。条件不是“两个角相等”。

联系

- **基本事实：** 不证明、作为推理起点的真命题。见第一部分“基本事实”（第 22 页）。
- **证明：** 判断一个命题是真命题，要用证明。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。

- **平行线：** 平行线的判定和性质是互逆的两组命题。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **等腰三角形：** “等边对等角”和“等角对等边”互为逆定理。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **角平分线：** 角平分线的性质和判定互为逆定理。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **勾股定理：** 勾股定理和它的逆定理，一个由直角推出边的关系，一个由边的关系推出直角。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **四边形：** 平行四边形、矩形、菱形、正方形都有一组性质和一组判定，很多是互逆的。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **绝对值：** 绝对值的定义是“到原点的距离”，它的性质都从这个定义推出来。见第二部分“有理数”（第 36 页）。

真题： 2024 年第 23 题（第 394 页）。

基本事实

> 对应人教版八年级上册第十四章“图说数学史：公理化方法”，基本事实散见各册。

基本事实是公认正确、不加证明、作为推理起点的少数几条结论。 其余的几何定理，都由定义和这几条基本事实一步一步推出来。

为什么需要不证自明的起点

对一个结论追问“为什么”：对顶角为什么相等？因为同角的补角相等。同角的补角为什么相等？因为补角的定义和等式的性质……每一次回答都要用到前面的结论，这样问下去没有尽头。就像查字典，每个词都用别的词来解释，总得有几个最基本的词，大家不再追问就懂。

所以推理必须有起点。数学的做法是：**选出少数几条简单、公认的结论，不证明，直接承认；其余的结论全部从它们和定义推出来。** 两千多年前，古希腊的欧几里得写《几何原本》，就是从几条公设和公理出发，推出了几百条几何命题。这种“选定少数起点、其余全部推出”的方法，叫**公理化方法**。初中数学把选作起点的结论叫**基本事实**。

选作起点的结论，要满足两个要求：一是足够简单，谁都承认；二是足够用，后面的定理都能从它们推出来。

初中几何的基本事实

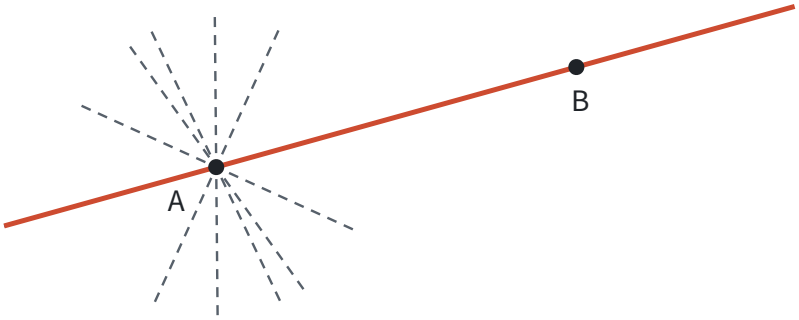
编号	基本事实	后面用在哪里
1	两点确定一条直线	两条直线最多有一个交点；画直线、画一次函数的图象只需两个点
2	两点之间，线段最短	两点间的距离；三角形三边关系；最短路径问题
3	同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直	点到直线的距离；三角形的高；作垂线

编号	基本事实	后面用在哪里
4	过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行	平行于同一条直线的两条直线平行；三角形内角和的证明
5	两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行	平行线的其他判定；平行线的性质
6	两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（SAS）	等腰三角形的性质；线段垂直平分线的性质
7	两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（ASA）	推出 AAS
8	三边分别相等的两个三角形全等（SSS）	三角形的稳定性；尺规作图
9	两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例	相似三角形的判定

下面逐条看它们说了什么、为什么可信、在哪里用到。

直线和线段

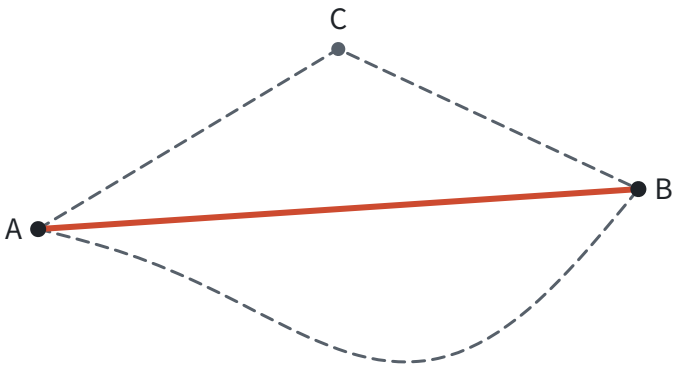
基本事实 1：两点确定一条直线。 经过两点有一条直线，并且只有一条直线。



经过一个点 A 能画无数条直线；再要求经过点 B，就只剩一条了。“确定”包含两层意思：有，并且只有一条。木工弹墨线、植树时先定两端的两棵树，用的都是这个事实。

用到它的地方：两条直线相交只有一个交点（见下面的例 1）；一次函数的图象是直线，所以画图只需两个点，求解析式只需两个条件（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。

基本事实 2：两点之间，线段最短。 连接两点的所有线中，线段最短。

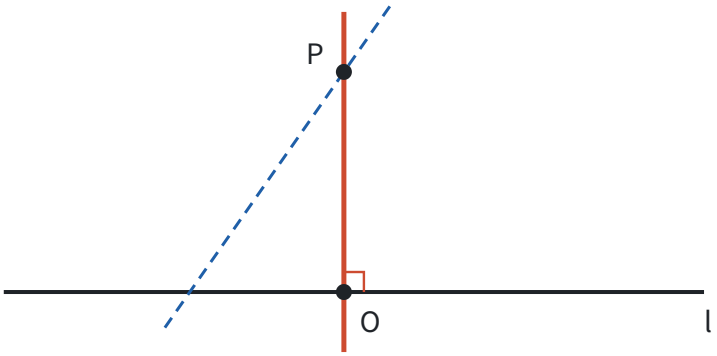


因此把连接两点的线段的长度，叫这两点间的**距离**。

用到它的地方：图中的折线 ACB 和线段 AB 围成 $\triangle ABC$，从 A 直接到 B 比绕道 C 近，所以 $AC+CB>AB$，这就是三角形两边之和大于第三边（见第五部分“三角形”（第 128 页））；最短路径问题，都是想办法把折线变成一条线段（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））。

垂线和平行线

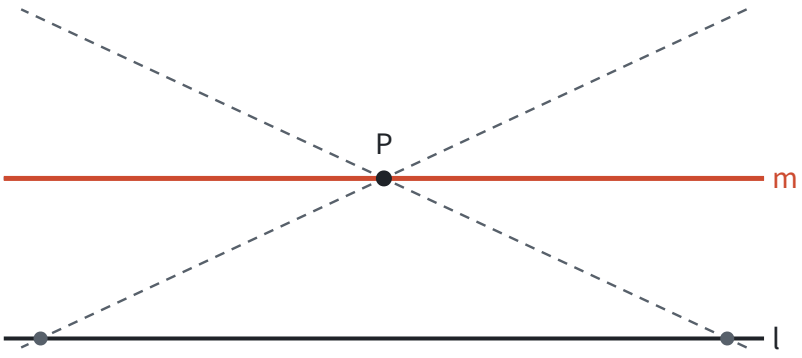
基本事实 3：在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。 这个点可以在直线上，也可以在直线外。



“有且只有”也是两层意思：**有**，是说这样的直线存在，能画出来；**只有**，是说它是唯一的。让一条直线绕点 P 转动，它和 l 的夹角连续变化，恰好有一个位置是直角。

用到它的地方：因为过 P 的垂线只有一条，垂线段 PO 就是唯一确定的，它的长度才能叫**点到直线的距离**；三角形的高、尺规作垂线也都依靠它（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。“垂线段最短”也常常直接使用，学了勾股定理后可以说明它：直角三角形中，斜边的平方等于两直角边的平方和，所以斜边比直角边长。

基本事实 4：过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。



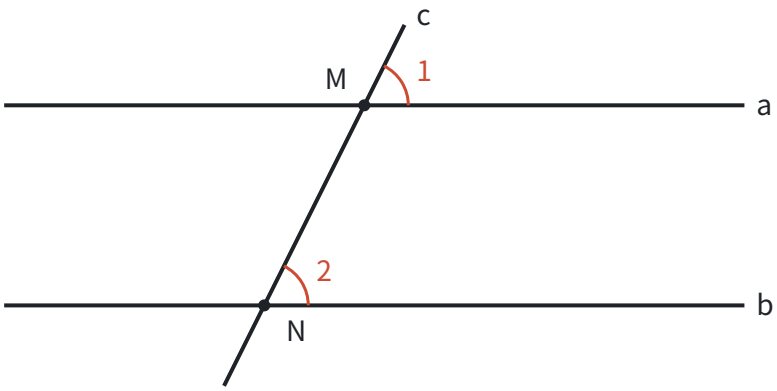
过点 P 的直线只要稍微倾斜，向一侧延长就会和 l 相交；只有 m 这一个位置，两边无限延长都不相交。

用到它的地方：

- **平行于同一条直线的两条直线互相平行。** 如果直线 a、b 都和 l 平行，而 a、b 相交于点 P，那么过点 P 就有两条直线和 l 平行，这和基本事实 4 矛盾。所以 a、b 不能相交，$a\parallel b$。
- **三角形内角和的证明**要过一个顶点作对边的平行线，再用“两直线平行，内错角相等”。这条平行线能作出

来，靠的是基本事实 4；平行线的性质也要用基本事实 4 才能推出（见下面基本事实 5 之后的推导）。内角和的证明见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。

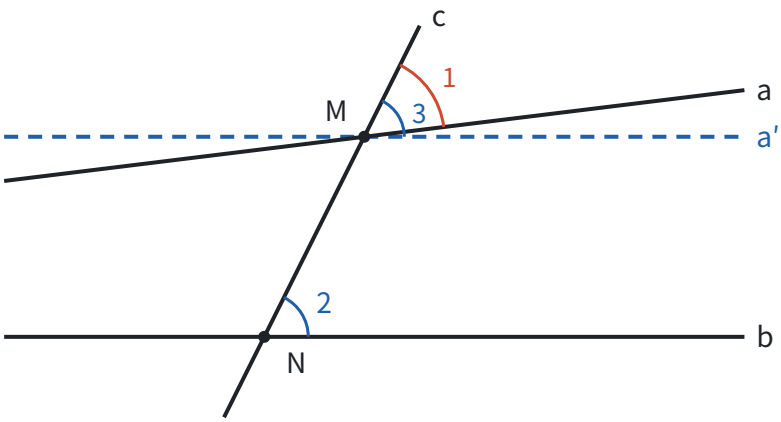
基本事实 5：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。 简单说成：同位角相等，两直线平行。



用到它的地方：平行线的另外两个判定（内错角相等、同旁内角互补，两直线平行）都由它推出，见下面的例 2。

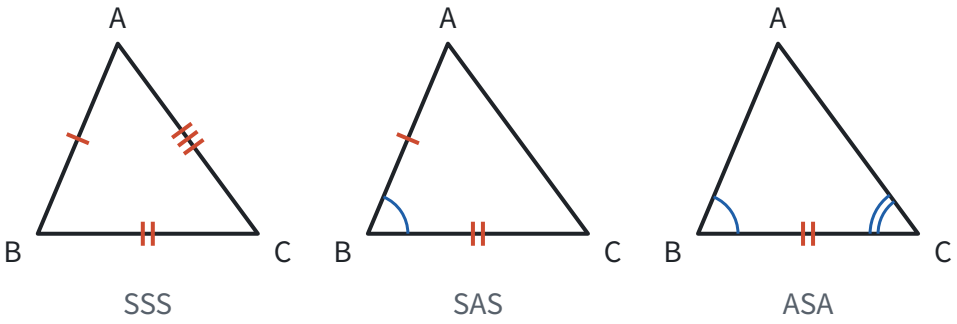
平行线的性质“两直线平行，同位角相等”是它的逆命题，由基本事实 4 和 5 可以推出。设 $a \parallel b$，直线 c 与 a、b 分别交于点 M、N，$\angle 1$、$\angle 2$ 是同位角（上图）。先假设结论不成立：$\angle 1 \neq \angle 2$。过点 M 作直线 a'，使 a' 与 c 所成的同位角 $\angle 3 = \angle 2$，由基本事实 5，$a' \parallel b$。因为 $\angle 3 = \angle 2 \neq \angle 1$，$a'$ 和 a 不重合，于是过点 M 有两条直线 a、a' 都和 b 平行，这和基本事实 4 矛盾。所以 $\angle 1 = \angle 2$。

下图画的是假设的情况（$\angle 1 \neq \angle 2$），所以 a 看起来和 b 不平行。正是这种情况推出了矛盾，说明它不会出现。



三角形全等

基本事实 6～8：SAS、ASA、SSS。

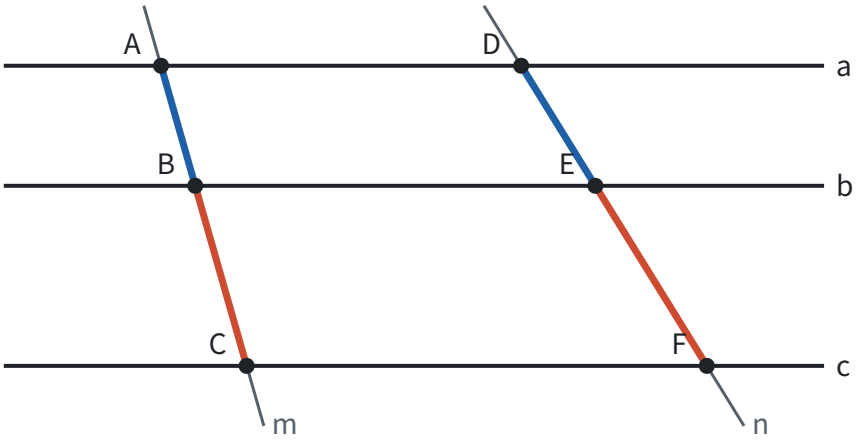


按这三组条件画三角形，不管谁来画，画出来的都能完全重合：三角形的形状和大小被“定死”了（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。注意 SSA（两边和其中一边的对角）不在其中，它确实定不死三角形。

用到它的地方：AAS 由 ASA 和三角形内角和推出，直角三角形的 HL 也能由它们推出；等腰三角形“三线合一”、角平分线的性质、线段垂直平分线的性质、平行四边形的性质，都要借助全等来证明；尺规作图“作一个角等于已知角”的依据是 SSS。

平行线分线段成比例

基本事实 9：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。



图中 $a \parallel b \parallel c$，直线 m 与它们交于 A、B、C，直线 n 与它们交于 D、E、F，那么

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

特别地，如果 $AB = BC$，那么 $DE = EF$：平行线在一条直线上截得的线段相等，在另一条直线上截得的线段也相等。

用到它的地方：“平行于三角形一边的直线截其他两边，截得的三角形与原三角形相似”，以及相似三角形的各个判定，都由它推出（见第八部分“相似”（第 230 页））。

代数推理的起点

代数推理同样有起点。计算和解方程时，每一步都能追到下面几类规则：

起点	内容	推出了什么
运算律	$a+b=b+a$，$(a+b)+c=a+(b+c)$，$ab=ba$，$(ab)c=a(bc)$，$a(b+c)=ab+ac$	去括号、合并同类项、整式乘法、乘法公式
等式的性质	等式两边加（或减）同一个数或式子，结果仍相等；两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等	移项、去分母，解方程的每一步
不等式的性质	两边加（或减）同一个数或式子，不等号方向不变；两边乘（或除以）同一个正数，方向不变；乘（或除以）同一个负数，方向改变	解不等式的每一步

运算律在小学是从具体的数里总结出来的；数扩充到负数、无理数以后，仍然承认它们成立，并以它们为依据继续推理。加上相反数、绝对值、乘方这些定义，代数里的法则、公式都能由此推出。

例题

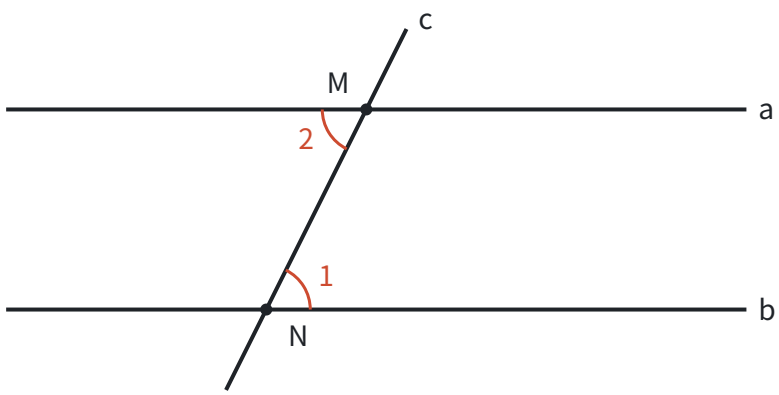
例 1 用基本事实说明：两条直线相交，只有一个交点。

思路： 要说明“只有一个”，可以设想有两个，看会不会出问题。

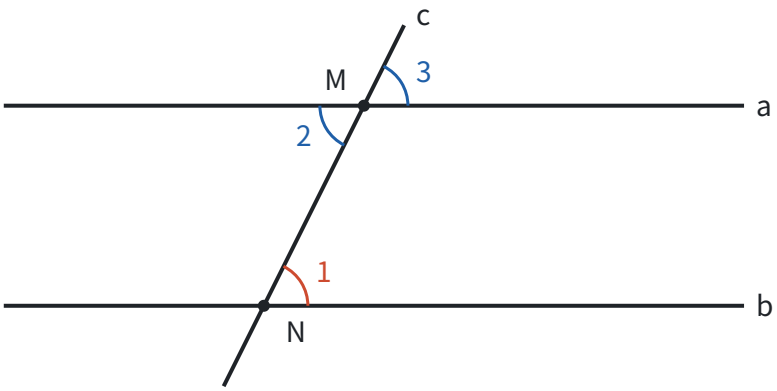
解： 假设直线 a 和 b 相交，并且有两个不同的交点 P、Q。那么 a 经过 P、Q 两点，b 也经过 P、Q 两点，经过两点就有了两条不同的直线，和“两点确定一条直线”矛盾。所以两条直线相交只有一个交点。

这种先假设结论不成立、再推出矛盾的说理方法，叫反证法（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

例 2 如图，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 1=\angle 2$。求证：$a\parallel b$。



思路： $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是内错角。能用来判定平行的，目前只有基本事实“同位角相等，两直线平行”。所以要找一个角，它和 $\angle 1$ 是同位角，又和 $\angle 2$ 相等：$\angle 2$ 的对顶角 $\angle 3$ 正好是。



证明： 因为 $\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），$\angle 1=\angle 2$（已知），所以 $\angle 1=\angle 3$（等量代换），所以 $a\parallel b$（同位角相等，两直线平行）。

回顾： 这就是判定定理“内错角相等，两直线平行”的证明。把依据一路往回追：“对顶角相等”来自补角和平角，“同位角相等，两直线平行”是基本事实。每一个定理都这样扎根在定义和基本事实上。

例 3　解方程 $2(x-1)=x+4$，并说出每一步的依据。

思路： 解方程的每一步都是在用运算律或等式的性质，把它们写出来。

解：

步骤	依据
$2x-2=x+4$	分配律（去括号）
$2x-x=4+2$	等式的性质：两边都加 2，再都减去 x（移项）
$x=6$	分配律：$2x-x=(2-1)x$（合并同类项）

检验： 左边 $2\times(6-1)=10$，右边 $6+4=10$，左边等于右边。

想一想： 移项要“变号”，不是一条需要记住的规定。等式两边都加 2，左边的 $-2+2=0$ 消失了，右边多出一个 $+2$，看起来就像 -2 变号后移到了右边。

易错点

- **把“看起来显然”的结论当基本事实用。** 几何的基本事实只有表里这几条。用 SSA 判定全等、凭图说两条线平行，都是用了没有依据的“事实”。
- **漏掉“同一平面内”“直线外”。** 在空间里，过一点和已知直线垂直的直线有无数条；点在直线上时，过这一点的直线都和已知直线相交或重合，谈不上平行。
- **把判定和性质弄反。** 基本事实 5 是由角推出平行（判定）；“两直线平行，同位角相等”是由平行推出角（性质），方向相反，不能混用。
- **把线段和距离混为一谈。** 距离是线段的长度，是一个数；线段是图形。“点到直线的距离”是垂线段的长度，不是垂线段本身。
- **“有且只有”只理解了一半。** “有”是存在，“只有”是唯一。作辅助线时用的是“有”，说明两条线重合时用的是“只有”。

联系

- **定义、命题与定理：** 基本事实是不证明的真命题，定理是证明了的真命题。见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）。
- **怎样证明：** 证明里的每一个依据，追到最后都是定义和基本事实。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。
- **几何图形初步：** 直线、线段、两点间的距离从这里开始。见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。
- **相交线与平行线：** 垂线、平行线的判定和性质，都建立在基本事实 3、4、5 上，也就是同一平面内过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行，同位角相等，两直线平行。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **三角形：** 三边关系来自“两点之间，线段最短”，内角和的证明要用到平行线。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **全等三角形：** 全等的判定从 SAS、ASA、SSS 出发。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **相似：** 相似三角形的判定从“平行线分线段成比例”出发。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **一次函数：** “两点确定一条直线”对应待定系数法里的“两个条件确定 k 和 b”。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **一元一次方程：** 解方程的依据是等式的性质。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。

真题： 2022 年第 15 题（第 413 页）。

怎样证明 ★

> 对应人教版八年级上册第十三章阅读与思考“为什么要证明”。

证明就是从已知条件出发，每一步都以定义、基本事实或已经证明的定理为依据，推出要证的结论。 只要每一步都站得住，结论就对所有满足条件的情况成立，这是测量和举例做不到的。

为什么要证明

测量有误差。 用量角器量一个三角形的三个内角，加起来可能是 $179°$，也可能是 $181°$。量得再仔细，也只能说“差不多是 $180°$”，不能说“恰好是 $180°$”，更不能说“每个三角形都是”。

举例是有限的。 看式子 n^2+n+41：

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	39	40
n^2+n+41	41	43	47	53	61	$\cdots$	1601	1681

从 $n=0$ 到 $n=39$，算出的 40 个数全是质数。能不能说“n 取任何自然数，n^2+n+41 都是质数”？不能：$n=40$ 时，

$$40^2+40+41=40\times(40+1)+41=41\times 41,$$

不是质数。试对了 40 次，第 41 次就错了。

所以，测量和举例可以帮助发现规律、找到反例，但要确定一个结论**对所有情况都成立**，只能靠证明。

证明的样子：每一步都有依据

证明由一步一步的“因为……，所以……”组成，每一步后面用括号写出依据。能当依据的只有这几类：

依据	例子
已知条件	$AB = DE$（已知）
定义	$\angle 1 = 90°$（垂直的定义）
基本事实	$a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）
已经证明的定理	$\angle 1 = \angle 3$（对顶角相等）
等式、不等式的性质和运算律	$\angle 1 = \angle 3$（等量代换）

图上“看出来”的关系、没有证明过的猜想，都不能当依据。

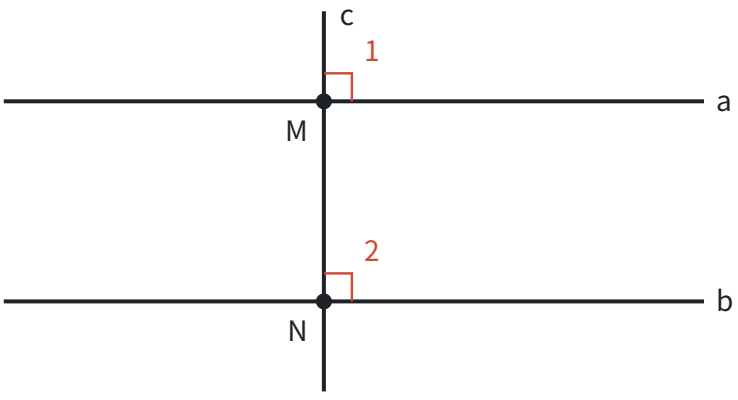
几何证明的书写格式

题目直接给出图和条件时，写“证明”就行。如果要证的是一个用文字叙述的命题，要先翻译（见第一部分“三种数学语言”（第 12 页）），完整的格式分三步：

1. 按题意画出图形；
2. 用图中的字母写出**已知**（条件）和**求证**（结论）；
3. 写出**证明**过程。

例 1 求证：在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行。

思路： 条件是“两条直线都垂直于同一条直线”，结论是“这两条直线平行”。先画直线 c，再画两条直线都和它垂直。要证平行，手里的工具是“同位角相等，两直线平行”；垂直给出的两个直角，正好是一对同位角。



已知： 如图，直线 $a \perp c$，垂足为 M；直线 $b \perp c$，垂足为 N。

求证： $a \parallel b$。

证明： 因为 $a \perp c$，$b \perp c$，所以 $\angle 1 = 90°$，$\angle 2 = 90°$（垂直的定义），所以 $\angle 1 = \angle 2$（等量代换），所以 $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）。

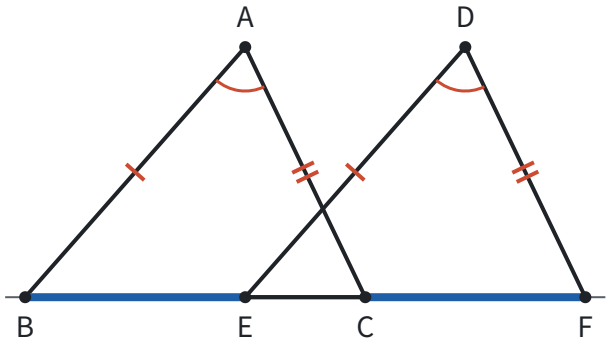
综合法和分析法

证明有两个思考方向：

- **综合法：** 从已知出发，看能推出什么，一步步推向结论。“由因导果”。
- **分析法：** 从结论出发，问“要证它，只要证什么”，一步步退到已知。“执果索因”。

找思路时常用分析法，写证明时用综合法。

例 2　如图，点 B、E、C、F 在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$。求证：$\angle A=\angle D$。



思路（分析法）： 从结论往回想：

- 要证 $\angle A=\angle D$，只要证它们所在的 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$；
- 两个三角形已有 $AB=DE$、$AC=DF$，还差一个条件。$\angle A$、$\angle D$ 是这两边的夹角，正是要证的，不能用；那就找第三边，只要证 $BC=EF$，就能用 SSS；
- $BC=BE+EC$，$EF=CF+EC$，已知 $BE=CF$，两边都加上公共部分 EC 就行了。

退到这里，全是已知条件。整条思路是：

$$\angle A=\angle D \Leftarrow \triangle ABC\cong\triangle DEF \Leftarrow BC=EF \Leftarrow BE=CF.$$

证明（综合法）： 把上面的思路倒过来写。因为 $BE=CF$，所以 $BE+EC=CF+EC$，即 $BC=EF$。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

- $AB=DE$（已知），
- $AC=DF$（已知），
- $BC=EF$（已证），

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$（SSS），所以 $\angle A=\angle D$（全等三角形的对应角相等）。

想一想： 两种方法走的是同一条路，只是方向相反。

比较	分析法	综合法
方向	从结论退向已知	从已知推向结论
每一步在问	要证这个，还缺什么？	由这些，能推出什么？
好处	目标明确，不容易走岔路	书写清楚，每一步的依据一目了然
用在	草稿上找思路	正式写证明

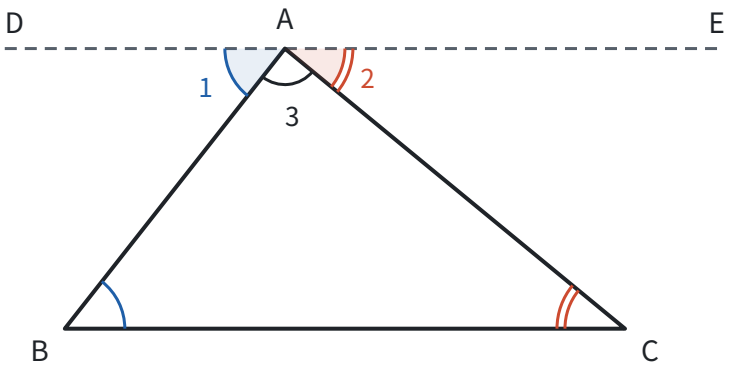
只用综合法，已知条件能推出的东西很多，不知道该往哪里走；只用分析法，写出来的是一串“只要证”，读起来费力。先分析、后综合，是证明题最常用的办法。

添辅助线：把条件和结论接上

有时图里现成的线不够用，要添上新的线，叫**辅助线**，画成虚线。辅助线不是凭空想出来的，是分析“缺什么”的结果。

例 3 求证：三角形的内角和等于 180°。

思路： 180° 在哪里见过？平角是 180°。可是三个角分散在三个顶点，要想办法把它们“搬”到同一个顶点，拼成一个平角。能把一个角原样搬到别处的工具是平行线：两直线平行，内错角相等。所以过点 A 作 BC 的平行线。



已知： $\triangle ABC$。

求证： $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$。

证明： 过点 A 作直线 $DE\parallel BC$。

因为 $DE\parallel BC$，所以 $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$（两直线平行，内错角相等）。

因为 D、A、E 在同一条直线上，所以 $\angle 1+\angle 3+\angle 2=180°$（平角的定义）。

所以 $\angle B+\angle 3+\angle C=180°$（等量代换），即 $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$。

回顾： 图中的动画把 $\angle B$ 绕 AB 的中点旋转 180°，它正好落在 $\angle 1$ 的位置；$\angle C$ 绕 AC 的中点旋转 180°，落在 $\angle 2$ 的位置。辅助线 DE 的作用，就是给这两个角一个“落脚的地方”。过点 A 能作出这条平行线，而且只有一条，依据是“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。

反证法（了解）

有的结论直接证不好下手，可以反过来想：**假设结论不成立，从这个假设出发推出矛盾，说明假设是错的，所以结论成立。** 这种方法叫**反证法**，步骤是：

1. 假设结论的反面成立；
2. 从假设出发，推出和已知条件、定义、基本事实或定理相矛盾的结果；
3. 所以假设不成立，原结论成立。

例 4　求证：一个三角形的三个内角中，至少有一个角大于或等于 60°。

思路： “至少有一个”不知道是哪一个，直接证不好说。它的反面是“三个角都小于 60°”，这很具体，可以算。

证明： 假设三角形的三个内角都小于 60°，那么三个内角的和小于 $60°\times 3=180°$，这和“三角形的内角和等于 180°”矛盾。所以假设不成立，三个内角中至少有一个大于或等于 60°。

结论里出现“至少”“至多”“只有一个”“不是”“不可能”这类说法时，常常考虑反证法。前面已经用过几次：说明两条直线相交只有一个交点，是假设有两个交点 P、Q，那么经过 P、Q 就有两条不同的直线，和“两点确定一条直线”矛盾；说明平行于同一条直线的两条直线平行，是假设直线 a、b 都和 l 平行，而 a、b 相交于点 P，那么过点 P 就有两条直线和 l 平行，和“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。

代数推理：用字母说明一般规律

代数里的结论也要证明。“对所有的数都成立”，就用字母表示任意的数，再按运算律和公式推理。

例 5　说明：两个连续奇数的平方差是 8 的倍数。

思路： 先试几个：$3^2-1^2=8$，$5^2-3^2=16$，$7^2-5^2=24$，都是 8 的倍数。但试多少个都不够，要用字母表示“任意两个连续奇数”：设 n 是整数，较大的奇数是 $2n+1$，较小的是 $2n-1$。

解：

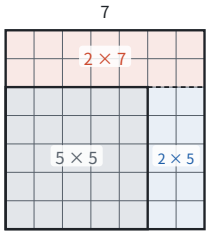
$$\begin{aligned}(2n+1)^2-(2n-1)^2&=(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)\\&=8n.\end{aligned}$$

n 是整数，所以 $8n$ 是 8 的倍数，即两个连续奇数的平方差是 8 的倍数。

想一想： 用平方差公式，算得更快：

$$(2n+1)^2-(2n-1)^2=\big[(2n+1)+(2n-1)\big]\big[(2n+1)-(2n-1)\big]=4n\times 2=8n.$$

还可以画出来看。取 $n=3$，从 7×7 的正方形里去掉 5×5 的正方形，剩下一个宽为 2 的 L 形：



L 形可以分成 2×7 和 2×5 两块，面积是 $2\times(7+5)=24$。一般地，L 形的宽总是两个奇数的差 2，两块的长加起来是两个奇数的和 $4n$，面积是 $2\times 4n=8n$。展开计算、用公式、画面积图，是同一个事实的三种说法。

易错点

- **用要证的结论当依据。** 要证 $a\parallel b$，却写“因为 $a\parallel b$，所以同位角相等”，这是拿结论去证结论，叫循环论证。
- **判定和性质用反了方向。** 要证平行，用“……，两直线平行”（判定）；已知平行，才能用“两直线平

行，……”（性质）。

- **把图上看出来的关系当条件。** 看起来相等、垂直、共线的，没有给出、没有证明，就不能写进证明。
- **举例代替证明。** 验证了几个数、量了几个图，只能说“可能对”。说明“对所有情况都对”，要用字母或一般的图形推理。
- **反证法的假设不是结论的反面。** “至少有一个角大于或等于 $60°$”的反面是“三个角都小于 $60°$”，不是“至少有一个角小于 $60°$”。
- **辅助线交代不清，或者要求太多。** 要写清楚怎样作：“过点 A 作 $DE \parallel BC$”。不能让一条辅助线同时满足两个条件，比如“过点 A 作 AD 平分 $\angle BAC$ 且垂直于 BC”，这样的线不一定存在。
- **代数推理没交代字母的范围。** 用 $2n+1$ 表示奇数，要说明 n 是整数；否则 $n=0.5$ 时 $2n+1=2$，不是奇数。

联系

- **定义、命题与定理：** 证明是判断命题真假的方法，证明过的真命题就是定理。见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）。
- **基本事实：** 证明的依据往回追，最后都落在定义和基本事实上。见第一部分“基本事实”（第 22 页）。
- **三种数学语言：** 写“已知、求证”就是把文字命题翻译成图形和符号。见第一部分“三种数学语言”（第 12 页）。
- **三角形：** 内角和定理和它的推论，都是用这里的方法证出来的。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **全等三角形：** 证线段相等、角相等，最常用的就是“分析法找全等，综合法写全等”。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **整式的乘法：** 平方差公式可以用来做代数推理，也可以用面积来看。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 例 3 证明内角和时过点 A 作 $DE \parallel BC$，$\angle B$ 绕 AB 中点旋转 $180°$ 落到 $\angle 1$（即 $\angle DAB$）的位置，这是中心对称。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **实数：** 说明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，用的也是反证法。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **辅助线：** 常用的辅助线有哪些、各自为了接上什么条件。见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）。

真题： 2026 年第 19 题（第 362 页）、2026 年第 23 题（第 366 页）、2025 年第 19 题（第 375 页）、2025 年第 23 题（第 379 页）、2024 年第 19 题（第 389 页）。

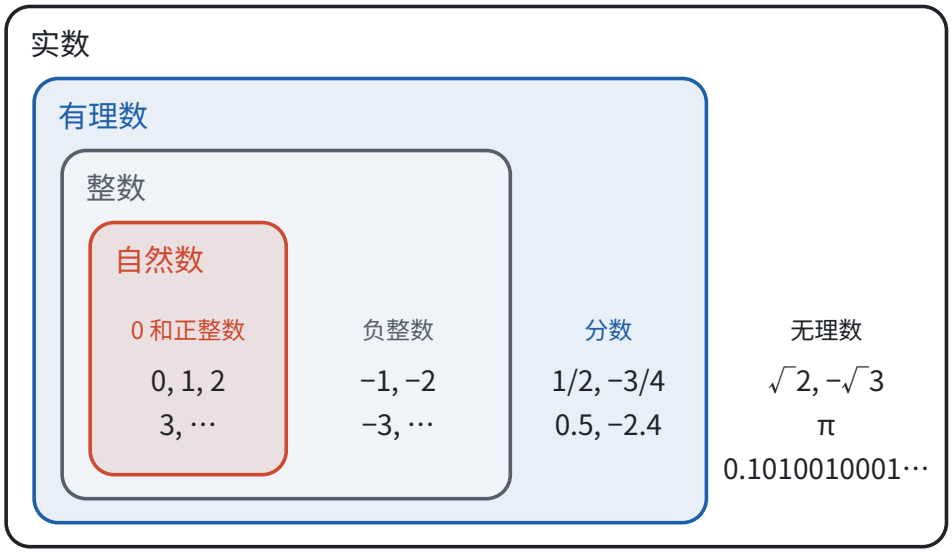
总览：数的扩充

数从自然数一步步扩充到实数：每一次都是因为遇到了原来的数解决不了的问题，而每一次扩充，原来的运算律都保持不变。

四次扩充

数的范围	遇到的问题	新添的数	从此总能做的运算	在数轴上
自然数	数一数有多少个	$0, 1, 2, 3, \cdots$	加法、乘法	原点右边一个个隔开的点
整数	意义相反的量；小数减大数，如 $3-5$	负整数	减法	原点左边也有了点
有理数	平均分，如 $1\div3$；不足一个单位的量	分数	除法（除数不为 0）	整数点之间密密麻麻，但还有缝
实数	面积为 2 的正方形的边长，如 $x^2=2$	无理数	非负数开平方、任何数开立方	数轴被填满，实数和点一一对应

四个范围一层套一层，后面的范围包含前面的全部：



合起来就是实数的分类：

分类标准	第一层	第二层
按定义分	有理数（有限小数或无限循环小数）	整数（正整数、0、负整数）；分数（正分数、负分数）
	无理数（无限不循环小数）	正无理数、负无理数
按正负分	正实数	正有理数、正无理数
	0	—
	负实数	负有理数、负无理数

扩充时什么不变

每次添进新的数，都要重新规定怎样运算。规定的原则是：**原来成立的交换律、结合律、分配律，扩充以后必须照样成立。** 负数乘负数为什么得正数，正是分配律推出来的；减去一个数等于加上它的相反数，也是从加法的运算律推出来的。

另一件不变的事是**数轴**。相反数、绝对值、大小比较，都是用数轴上的位置和距离来定义的，所以从有理数推广到实数时，意思一点都不用改。

三页之间的关系

页面	讲什么	核心的想法
有理数	正数和负数；分类；数轴；相反数；绝对值；大小比较	数有了方向，每个数都是数轴上的一个点
有理数的运算	加、减、乘、除、乘方；混合运算；科学记数法；近似数	加法是移动，减法、除法是逆运算，法则由运算律推出
实数	平方根、立方根；无理数；实数与数轴；估算	有理数填不满数轴，补上无理数

建议按顺序学：

1. 先学第二部分“有理数”（第 36 页），把数轴、相反数、绝对值这几个工具弄熟。后面所有内容都在数轴上展开。
2. 再学第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。每条法则都能在数轴上画出来，或者用运算律推出来，不需要死记。这一页是全书计算的基础，要练到又准又快。
3. 最后学第二部分“实数”（第 47 页）。它在课本上排在七年级下册，学它时可以回头对照有理数：哪些概念原样推广了，新添了什么。

这一部分的数轴，后面会变成平面直角坐标系（见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）），再变成函数图象的舞台；这一部分的运算律，到了第三部分会变成式的运算规则（见第三部分“代数式”（第 54 页））。

有理数

> 对应人教版七年级上册第一章。

正数和负数表示意义相反的量，整数和分数合起来叫有理数；每个有理数都是数轴上的一个点，相反数、绝对值、大小都可以在数轴上看出来。

从哪里来：意义相反的量

小学里的数只能回答“有多少”。可生活里很多量除了多少，还有方向：

情境	一个方向	相反的方向	基准
气温	零上 5 ℃，记作 5	零下 3 ℃，记作 −3	0 ℃

情境	一个方向	相反的方向	基准
海拔	高于海平面 200 m，记作 200	低于海平面 50 m，记作 −50	海平面
收支	收入 100 元，记作 100	支出 30 元，记作 −30	不收不支
水位	比警戒线高 0.4 m，记作 0.4	比警戒线低 1.2 m，记作 −1.2	警戒线

这几个例子的做法完全一样：**先定一个基准，记作 0；再规定一个方向为正，相反的方向就是负。** 哪个方向算正，是人规定的，只要前后一致就行。比如把“支出”规定为正也可以，那收入就要记成负数。

- 大于 0 的数叫**正数**，如 3、1/2、2.5。正数前面的“+”号可以省略。
- 在正数前面加上“−”号的数叫**负数**，如 −3、−1/2、−2.5。
- **0 既不是正数，也不是负数。** 它是正、负的分界，是基准本身。

有理数的分类

正整数、0、负整数统称整数；正分数、负分数统称分数；整数和分数统称有理数。

有限小数和无限循环小数都能化成分数，比如 $0.5=1/2$，$-2.4=-12/5$，$0.333\cdots=1/3$，所以它们也是分数，是有理数。整数也能写成分数，比如 $5=5/1$。所以有理数有一个统一的样子：**都能写成两个整数的商 p/q（$q\neq 0$）。**

同一批数可以按不同的标准分类：

分类标准	第一层	第二层
按整数、分数分	整数	正整数、0、负整数
	分数	正分数、负分数
按正负分	正有理数	正整数、正分数
	0	—
	负有理数	负整数、负分数

分类时要做到**不重不漏**：每个有理数恰好落在一类里。0 在按正负分时单独成一类，在按整数、分数分时属于整数。正数和 0 合起来叫**非负数**，这个说法后面会经常用到。

例 1　把下列各数填入相应的类别：-3，0，$2/5$，-0.6，7，$-21/3$，π。

思路： 先看它能不能写成两个整数的商，再看正负和是不是整数。

解：

类别	数
正数	$2/5$，7，π
负数	-3，-0.6，$-21/3$
整数	-3，0，7

类别	数
分数	$2/5$，-0.6，$-21/3$
有理数	-3，0，$2/5$，-0.6，7，$-21/3$

$\pi = 3.14159\cdots$ 是正数，但它是无限不循环小数，写不成两个整数的商，不是有理数（见第二部分“实数”（第 47 页））。0 是整数，但既不在正数里，也不在负数里。

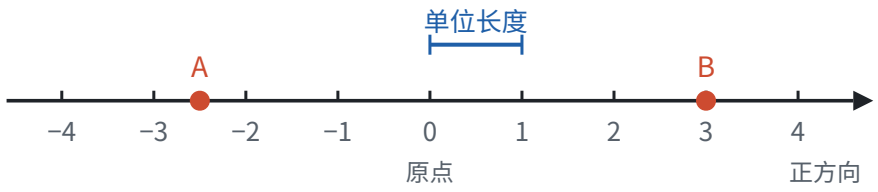
数轴：把数画成点

温度计是一根竖着的刻度尺，0 ℃ 以上是正、以下是负。把它横过来，就是数轴。

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴。 这三样缺一不可：

- **原点**说明 0 在哪里，是基准；
- **正方向**说明哪边是正，通常向右；
- **单位长度**说明 1 有多长，每一段都必须一样长。

有了这三样，每个有理数都能找到唯一的点：正数 a 在原点右边、离原点 a 个单位长度；负数 $-a$ 在原点左边、离原点 a 个单位长度。下图中，点 A 表示 -2.5，点 B 表示 3：

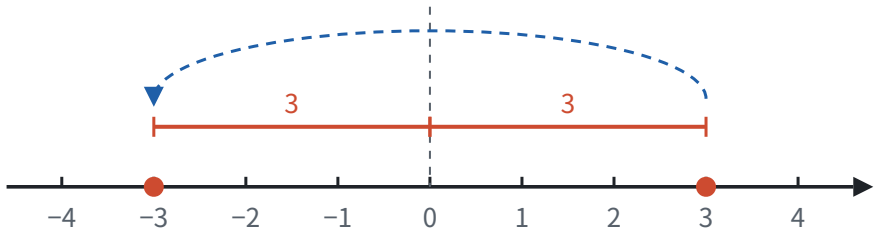


从此，**一个数就是一个点**。数的性质可以在数轴上看，数轴上的位置关系也可以用数来算。

相反数：关于原点对称

只有符号不同的两个数互为相反数，如 3 和 -3。0 的相反数是 0。

在数轴上，3 和 -3 分别在原点两侧，到原点的距离都是 3。沿着过原点的竖线把数轴对折，这两个点正好重合：**互为相反数的两个点关于原点对称。**

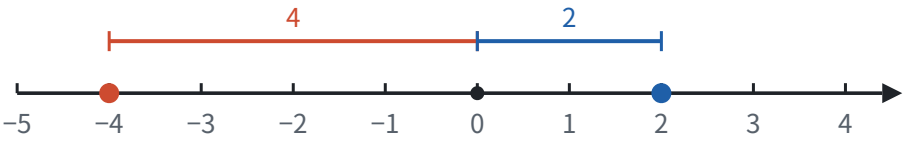


a 的相反数记作 $-a$。所以 $-(-3)$ 是 -3 的相反数，等于 3：对折两次，又回到原来的位置。

注意，$-a$ 读作“a 的相反数”，不一定是负数：$a = -3$ 时，$-a = 3$。

绝对值：到原点的距离

数轴上表示数 a 的点与原点的距离，叫作 a 的绝对值，记作 $|a|$。



从图上看，$|-4|=4$，$|2|=2$，$|0|=0$。绝对值去掉了方向，只留下“有多远”。

从“距离”这个定义出发，可以推出绝对值的算法：

- $a>0$ 时，点在原点右边，离原点 a 个单位，所以 $|a|=a$；
- $a=0$ 时，点就是原点，所以 $|a|=0$；
- $a<0$ 时，点在原点左边，它到原点的距离等于它的相反数，比如 $|-4|=4=-(-4)$，所以 $|a|=-a$。

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0. \end{cases}$$

还有两条性质，也是直接从“距离”来的：

- **距离不会是负数，所以 $|a|\geqslant 0$。**
- 互为相反数的两个点到原点一样远，所以 $|a|=|-a|$。

例 2 （1）若 $|x|=3$，求 x；（2）若 $|x|=-2$，求 x。

思路： 把 $|x|=3$ 翻译成数轴上的话：点 x 到原点的距离是 3。

解：（1）到原点距离为 3 的点，原点右边有一个，左边有一个，所以 $x=3$ 或 $x=-3$。

（2）距离不可能是负数，没有满足条件的 x。

例 3 已知 $|a-2|+|b+3|=0$，求 $a+b$ 的值。

思路： 这里只有一个等式，却有两个未知的数，关键在于绝对值不会是负数。两个不小于 0 的数相加得 0，只能两个都是 0：只要有一个大于 0，和就大于 0 了。

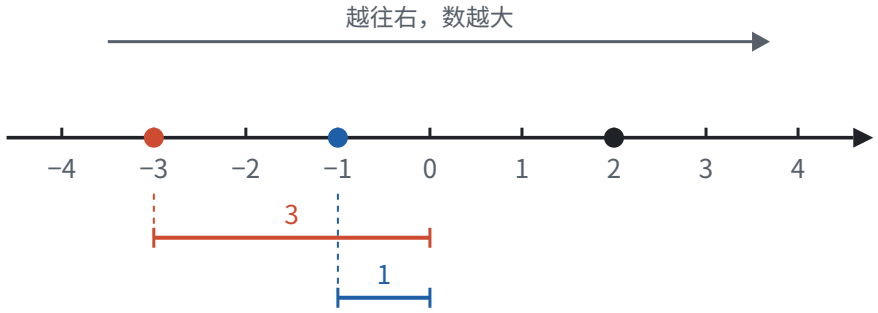
解： 因为 $|a-2|\geqslant 0$，$|b+3|\geqslant 0$，而它们的和是 0，所以

$$|a-2|=0,\quad |b+3|=0.$$

于是 $a-2=0$，$b+3=0$，得 $a=2$，$b=-3$，所以 $a+b=-1$。

大小比较：越往右越大

正数之间比大小，小学就会：3 比 2 大，在数轴上 3 也在 2 的右边。把这个规律推广到所有有理数：**在数轴上，右边的点表示的数总比左边的大。** 这也符合生活经验：-3 ℃ 比 -1 ℃ 更冷。



从这一条出发，其他的比较规则都能在图上读出来：

- **正数大于 0，0 大于负数，正数大于负数。** 正数都在原点右边，负数都在原点左边。
- **两个负数，绝对值大的反而小。** 两个负数都在原点左边，离原点越远（绝对值越大），就越靠左，也就越小。上图中 $|-3|=3>|-1|=1$，而 $-3<-1$。

例 4 比较 $-3/4$ 和 $-4/5$ 的大小。

思路： 两个都是负数，谁离原点远谁就小，所以先比较它们的绝对值。

解： $|-3/4|=3/4=15/20$，$|-4/5|=4/5=16/20$。

因为 $15/20<16/20$，$-4/5$ 离原点更远、更靠左，所以 $-4/5<-3/4$。

易错点

- **把带“−”号的都当成负数。** $-a$ 是 a 的相反数，a 本身是负数时，$-a$ 是正数。同样，不带符号的字母 a 也不一定是正数。
- **弄错 0 的归属。** 0 是整数、是有理数、是非负数，但既不是正数，也不是负数。
- **数轴画得不完整。** 缺原点、缺箭头（正方向）、刻度不等距，都不是数轴。
- **以为 $|a|=a$ 总成立。** 只有 $a\geqslant 0$ 时才成立；$a<0$ 时 $|a|=-a$。所以 $|x|=3$ 有两个解，漏掉 -3 就是忘了原点左边还有一个点。
- **两个负数比大小时，按绝对值大的算大。** 这是把“离原点远”当成了“在右边”。回到定义：数的大小看左右，不看远近。
- **以为无限小数都不是有理数。** $0.333\cdots$ 是无限循环小数，等于 $1/3$，是有理数；π 是无限不循环小数，才不是有理数。

联系

- **有理数的运算：** 加减法就是在数轴上移动，加法法则里要用绝对值。见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。
- **实数：** 数轴上还有很多点不表示有理数，比如边长为 1 的正方形的对角线长。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **平面直角坐标系：** 两条互相垂直的数轴组成坐标系，点的位置用两个数表示。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **中心对称：** 相反数关于原点对称；到了坐标系里，关于原点对称的两个点，横坐标、纵坐标都互为相反数。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。

- **不等式：** 不等式的解集是数轴上的一段，用“越往右越大”来画。见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **二次根式：** $\sqrt{a^2}=|a|$，化简时要用绝对值的算法。见第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **分类讨论：** $|x|=3$ 要分原点左右两种情况，这是分类讨论最早出现的地方。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2026 年第 1 题（第 355 页）、2025 年第 1 题（第 368 页）、2024 年第 1 题（第 381 页）、2022 年第 1 题（第 408 页）。

有理数的运算 ★

> 对应人教版七年级上册第二章。

有理数的运算法则都是推出来的：加法是数轴上的移动，减法和除法分别是加法和乘法倒过来，负数乘负数得正数，是为了让交换律、结合律、分配律继续成立。

从哪里来

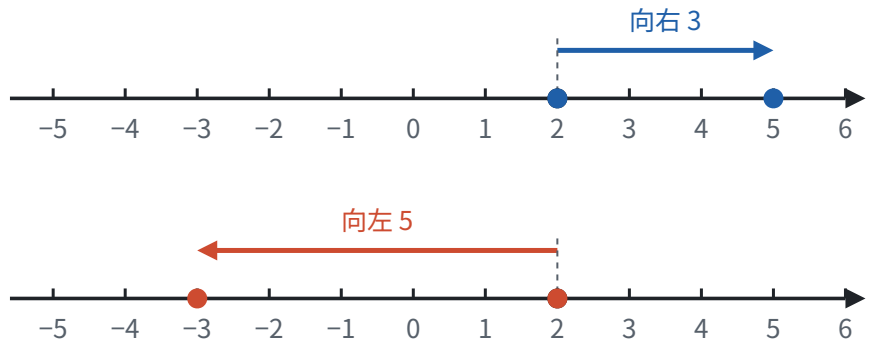
有了负数，就要回答：$2+(-5)$ 等于多少？$(-2)\times(-3)$ 呢？这些算式小学没有见过，结果不能随便规定，要满足两个要求：

1. **和实际意义相符。** 比如先收入 2 元、再支出 5 元，结果应该是少了 3 元。
2. **原来的运算律照样成立。** 小学的加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律、分配律，到了有理数里仍然要对。

下面每一条法则，都是从这两个要求推出来的。

加法：在数轴上移动

把加法看成移动：**从 a 出发，加上一个正数就向右移，加上一个负数就向左移，移动的距离是加数的绝对值。**最后停在哪里，和就是几。



从“移动”可以读出加法法则：

情况	移动的过程	结果	例子
同号相加	两次都朝同一个方向走	方向不变，距离相加：取相同的符号，绝对值相加	$(-2)+(-3)=-5$

情况	移动的过程	结果	例子
异号相加	先朝一个方向走，再往回走	往回抵消了一部分：取绝对值较大的数的符号，用较大的绝对值减去较小的绝对值	$2+(-5)=-3$
互为相反数相加	走出去多远，就走回来多远	回到原点：$a+(-a)=0$	$3.5+(-3.5)=0$
加 0	不移动	仍是这个数：$a+0=a$	$(-7)+0=-7$

先走哪一步、后走哪一步，最后停的位置不变，所以**加法交换律 $a+b=b+a$ 和结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 仍然成立**。计算时可以先把互为相反数的、同号的、能凑整的放在一起加。

减法：加法倒过来

减法是加法的逆运算：**$a-b$ 就是“加上 b 以后等于 a”的那个数。**

那么哪个数加上 b 等于 a？试一试 $a+(-b)$：

$$\big(a+(-b)\big)+b=a+\big((-b)+b\big)=a+0=a.$$

它正好满足要求，所以

$$a-b=a+(-b).$$

减去一个数，等于加上这个数的相反数。 这样减法就变成了加法，一串加减混合的算式可以全部看成加法，叫作**代数和**。比如 $5-8+3-(-2)$ 就是 5、−8、3、2 这四个数的和。

减法在数轴上也有意思：**$a-b$ 表示从点 b 走到点 a，要走多远、朝哪个方向。** 比如某天最高气温 3 ℃、最低气温 −2 ℃，温差是 $3-(-2)=3+2=5$（℃）。



差是正数，说明从 b 到 a 是向右走；差是负数，说明是向左走。不管方向，只看路程，就是**数轴上两点 a、b 之间的距离 $|a-b|$**。

乘法：让运算律继续成立

正数乘负数。 $3\times(-2)$ 是 3 个 −2 相加：$(-2)+(-2)+(-2)=-6$。比如水位每天下降 2 cm，3 天后比原来低 6 cm。

负数乘正数。 要让乘法交换律成立，$(-2)\times 3$ 必须等于 $3\times(-2)$，也是 −6。

负数乘负数。 $(-2)\times(-3)$ 没法再说成“几个几相加”，这时让分配律来决定。一方面 $3+(-3)=0$，另一方面用分配律展开：

$$\begin{aligned}(-2)\times\big[3+(-3)\big]&=(-2)\times 0=0,\\(-2)\times\big[3+(-3)\big]&=(-2)\times 3+(-2)\times(-3)=-6+(-2)\times(-3).\end{aligned}$$

所以 $-6+(-2)\times(-3)=0$，也就是说 $(-2)\times(-3)$ 是 -6 的相反数：

$$(-2)\times(-3)=6.$$

如果规定它等于 -6，分配律就不成立了。**负数乘负数得正数，不是随便规定的，而是保住分配律的唯一选择。**

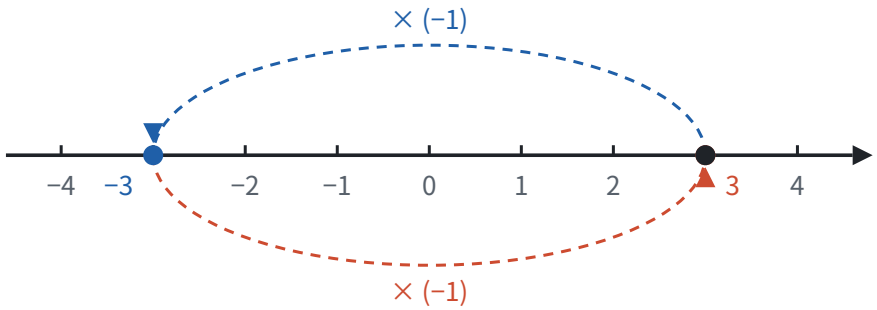
也可以看一串算式的规律：

算式	$(-2)\times3$	$(-2)\times2$	$(-2)\times1$	$(-2)\times0$	$(-2)\times(-1)$	$(-2)\times(-2)$
积	-6	-4	-2	0	?	?

第二个因数每减少 1，积就增加 2。顺着这个规律走下去，问号处应该是 2 和 4，和分配律推出来的结果一致。

归纳起来就是**乘法法则：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数与 0 相乘都得 0。**

乘以 -1，就是取相反数。 $3\times(-1)=-3$，$(-3)\times(-1)=3$。在数轴上，乘以 -1 就是把点翻到原点的另一侧：



乘一个负数，可以看成先乘它的绝对值、再乘以 -1 翻一次面。所以**几个不是 0 的数相乘，积的符号由负因数的个数决定：** 负因数有奇数个，翻了奇数次，积为负；有偶数个，翻回来了，积为正。只要有一个因数是 0，积就是 0。

乘法交换律、结合律、分配律对有理数都成立：

$$ab=ba,\quad (ab)c=a(bc),\quad a(b+c)=ab+ac.$$

除法：乘法倒过来

乘积是 1 的两个数互为倒数。 $-2/3$ 的倒数是 $-3/2$，-5 的倒数是 $-1/5$。0 乘任何数都得 0，得不到 1，所以 **0 没有倒数**。

除法是乘法的逆运算：**$a\div b$ 就是“乘以 b 以后等于 a”的那个数。** 试一试 $a\times 1/b$：

$$\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times b=a\times\left(\frac{1}{b}\times b\right)=a\times1=a.$$

它正好满足要求，所以**除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数**：

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}\quad(b\neq0).$$

这样除法就变成了乘法，符号法则也和乘法一样：同号得正，异号得负。比如 $(-12)\div4=-3$，$(-12)\div(-4)=3$。

为什么除数不能是 0？ 按定义，$a\div0$ 是“乘以 0 等于 a”的数。$a\neq0$ 时，任何数乘以 0 都是 0，找不到这样

的数；$a=0$ 时，任何数乘以 0 都等于 0，答案不唯一。两种情况都没法给出确定的结果，所以除数不能为 0。

乘方：相同因数的乘积

n 个相同的因数 a 相乘，记作 a^n，读作“a 的 n 次方”。这种运算叫**乘方**，结果叫**幂**，a 叫**底数**，n 叫**指数**。

乘方就是乘法，所以符号也由负因数的个数决定：

- 正数的任何次幂都是正数；
- **负数的偶数次幂是正数，负数的奇数次幂是负数**，比如 $(-2)^4=16$，$(-2)^3=-8$；
- 0 的任何正整数次幂都是 0。

指数只管紧挨着它的那个数。 $(-2)^4$ 的底数是 -2，表示 4 个 -2 相乘，等于 16；-2^4 的底数是 2，表示 2^4 的相反数，等于 -16。同样，$(2/3)^2=4/9$，而 $2^2/3=4/3$。

混合运算：先算“打包”的运算

运算顺序：先乘方，再乘除，最后加减；同级运算从左到右；有括号先算括号里面的。

这个顺序有它的道理。3×4 是 $4+4+4$ 的简写，3^2 是 3×3 的简写：级别越高的运算，越是把低一级的运算“打了包”。算 $2+3\times4$ 时，3×4 是一个整体，要先拆开这个包，再和 2 相加，所以先乘后加。括号的作用就是人为地打一个包，告诉你“这一部分先算”。

同级运算要从左到右，是因为减法和除法不满足交换律。比如 $8\div4\times2$，从左到右算是 $2\times2=4$；先算 4×2 就得到 1，错了。把除法先化成乘法，$8\times1/4\times2$，就可以任意交换顺序，不会出错。

例 1 计算：

$$-2^2+(-3)^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)-6\div\left(-\frac{3}{2}\right).$$

思路： 先认清式子里的“包”：两个乘方，一个乘法，一个除法，最外层是加减。-2^2 的底数是 2，不是 -2。除以 $-3/2$ 就是乘以 $-2/3$。

解：

$$\begin{aligned}&-2^2+(-3)^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)-6\div\left(-\frac{3}{2}\right)\\=\;&-4+9\times\left(-\frac{2}{3}\right)-6\times\left(-\frac{2}{3}\right)\\=\;&-4+(-6)-(-4)\\=\;&-4-6+4\\=\;&-6.\end{aligned}$$

例 2 计算：

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\times(-12).$$

思路： 按顺序应该先算括号，要通分；也可以注意到 12 是 4、6、3 的公倍数，用分配律把 -12 乘进去，每一项都能约掉分母。

解法一：先算括号。

$$\left(\frac{3}{12}-\frac{10}{12}+\frac{8}{12}\right)\times(-12)=\frac{1}{12}\times(-12)=-1.$$

解法二：用分配律。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\times(-12)-\frac{5}{6}\times(-12)+\frac{2}{3}\times(-12)\\=\;&-3-(-10)+(-8)\\=\;&-3+10-8\\=\;&-1.\end{aligned}$$

想一想： 两种解法结果相同，因为分配律保证了“先加后乘”和“先乘后加”一样。

比较	解法一：先算括号	解法二：用分配律
依据	运算顺序	分配律
麻烦在哪里	要通分，分数加减容易出错	要把 -12 的符号带进每一项
什么时候更好	括号里的分数容易合并时	括号外的数正好是各个分母的公倍数时

运算顺序是“默认怎么算”，运算律告诉你“还可以怎么算而结果不变”。先看清式子的结构，再决定走哪条路。

例 3　10 箱苹果，每箱标准重量是 20 kg。超过标准的千克数记作正数，不足的记作负数，称得的结果是：

$$0.5,\ -0.3,\ 0,\ -0.2,\ 0.4,\ -0.1,\ 0.3,\ -0.4,\ 0.2,\ -0.2.$$

这 10 箱苹果一共重多少千克？

思路： 把 10 个数直接相加很繁。换个角度：总重量 = 标准总重 + 所有偏差的和。偏差里有好几对相反数，用加法交换律、结合律先把它们凑在一起，和为 0。

解： 偏差的和是

$$\begin{aligned}&[(-0.3)+0.3]+[0.4+(-0.4)]+[0.2+(-0.2)]+0.5+0+(-0.2)+(-0.1)\\=\;&0+0+0+0.5-0.3\\=\;&0.2.\end{aligned}$$

所以总重量是 $20\times10+0.2=200.2$（kg）。

选一个基准、只算偏差，是处理一批相近数据的常用办法，求平均数时也可以这样做。

科学记数法

地球到太阳的平均距离大约是 150 000 000 km，这样的数写起来长，读起来还要一位一位数。

10^n 就是 1 后面跟 n 个 0，比如 $10^8=100\,000\,000$。所以

$$150\,000\,000=1.5\times100\,000\,000=1.5\times10^8.$$

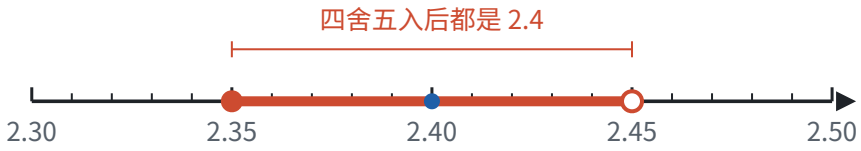
把一个数写成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数，叫科学记数法。 对于绝对值大于等于 10 的数，n 等于原数的整数位数减 1：150 000 000 有 9 位整数，$n=8$。负数也一样，$-32\,000=-3.2\times10^4$。

这样写的好处是一眼看出数的大小：比较 3.2×10^5 和 9.8×10^4，先看指数，10^5 比 10^4 大一个数量级，前者更大。

近似数

参加活动的人数、书的页数，都是准确数；量出来的长度、称出来的重量，往往是近似数。近似数与准确数的接近程度，用**精确度**表示：四舍五入到哪一位，就说**精确到哪一位**。

一个近似数代表的不是一个点，而是一段范围。**近似数 2.4（精确到十分位，也说精确到 0.1）代表的是四舍五入后等于 2.4 的所有数：**



所以 2.4 和 2.40 不一样：2.40 精确到百分位，代表大于或等于 2.395 且小于 2.405 的数，范围小得多。**近似数末尾的 0 不能随便去掉。**

例 4 把 3 076 500 精确到万位，并用科学记数法表示。

思路： 万位上的数字是 7，看它右边一位（千位）上的 6，大于等于 5，要进 1。结果是 308 万。如果写成 3 080 000，末尾的 0 会让人以为它精确到个位，所以要用科学记数法写。

解： $3\,076\,500 \approx 3.08 \times 10^6$。

反过来，已知近似数 3.08×10^6，要判断它精确到哪一位，就看最后一位数字 8 在原数中的位置：$3.08 \times 10^6 = 3\,080\,000$，8 在万位上，所以精确到万位。

易错点

- **把 -2^2 算成 4。** 指数只管紧挨着的 2，$-2^2 = -(2 \times 2) = -4$；要表示 -2 的平方，必须写成 $(-2)^2$。
- **同级运算不从左到右。** $8 \div 4 \times 2 = 4$，不是 1。把除法化成乘倒数，就不会出错。
- **以为除法也有分配律。** $(a+b) \div c = a \div c + b \div c$ 是对的，因为它就是 $(a+b) \times 1/c$；但 $c \div (a+b)$ 不能拆开。比如 $12 \div (1/2 + 1/3) = 12 \div 5/6 = 72/5$，而 $12 \div 1/2 + 12 \div 1/3 = 60$。
- **交换位置时丢了符号。** 把 $5 - 8 + 3$ 看成 $5 + (-8) + 3$，符号跟着数一起走，才能交换成 $5 + 3 + (-8)$。
- **多个因数相乘时符号判断错。** 先数负因数的个数定符号，再算绝对值；有一个因数是 0，积就是 0。
- **0 没有倒数，0 不能作除数。** 求倒数、做除法之前，先确认它不是 0。
- **科学记数法里 a 的范围不对。** 15×10^7 不是科学记数法，要写成 1.5×10^8。
- **近似数去掉了末尾的 0。** 2.40 和 2.4 的精确度不同。

联系

- **有理数：** 加法法则里的“绝对值”、减法里的“相反数”、乘以 -1 时的“关于原点对称”，都是前一页在数轴上定义的。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **实数：** 这一页的法则和运算律，到了实数里全部照样成立。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **整式的加减：** 去括号就是乘以 -1 再用分配律，合并同类项也是分配律。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。

- **整式的乘法：** 同底数幂相乘、幂的乘方，都从“乘方是相同因数的乘积”推出来。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **分式：** 分式的运算和分数的运算规则一样；绝对值小于 1 的数的科学记数法要用到负整数指数幂。见第三部分“分式”（第 74 页）。
- **平移和中心对称：** 加一个数是把点沿数轴平移，乘以 -1 是关于原点对称。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **数据的分析：** 例 3 称 10 箱苹果，以每箱 20 kg 为基准，只把偏差加起来（和是 0.2 kg），总重量就是 $20\times10+0.2=200.2$（kg）。这种选基准、算偏差的办法，求平均数时同样好用。见第十部分“数据的分析”（第 294 页）。

真题： 2026 年第 1 题（第 355 页）、2026 年第 8 题（第 357 页）、2025 年第 3 题（第 368 页）、2024 年第 2 题（第 381 页）、2023 年第 3 题（第 396 页）。

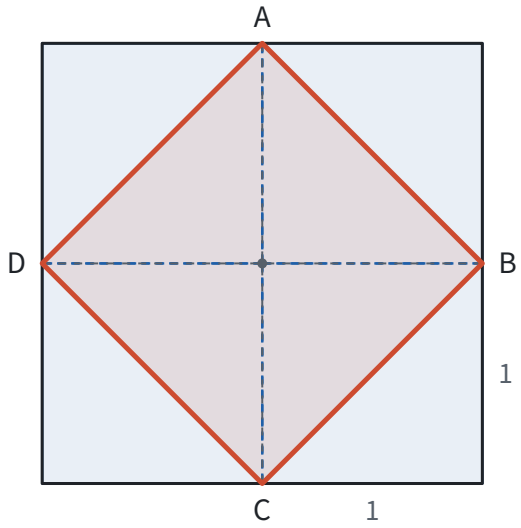
实数 ★

> 对应人教版七年级下册第八章。

边长为 1 的正方形，对角线的长度不能用任何有理数表示；把这样的无限不循环小数（无理数）添进来，就得到实数，实数和数轴上的点一一对应。

从哪里来：面积为 2 的正方形

用 4 个边长为 1 的小正方形拼成一个大正方形，面积是 4。连接大正方形四条边的中点，得到正方形 $ABCD$：



大正方形四个角上各有一个直角三角形，每个都是一个小正方形的一半。把它们分别绕斜边的中点转半圈，正好盖满正方形 $ABCD$。所以正方形 $ABCD$ 的面积是 4 个半个小正方形：

$$4\times\frac{1}{2}=2.$$

也可以用大正方形的面积减去四个角：$4-4\times1/2=2$。

设正方形 $ABCD$ 的边长是 x，那么 $x^2=2$。x 是多少？试着逼近它：

x	1.4	1.5	1.41	1.42	1.414	1.415
x^2	1.96	2.25	1.9881	2.0164	1.999396	2.002225

x 在 1.41 和 1.42 之间，又在 1.414 和 1.415 之间……每次都能再夹紧一位，却总也碰不到平方正好是 2 的数。后面会证明：**没有哪个有理数的平方等于 2。** 这条边的长度实实在在地画在纸上，却不是有理数，数必须再扩充一次。

平方根和算术平方根

如果 $x^2=a$，那么 x 叫作 a 的平方根。 求一个数的平方根的运算叫**开平方**，它和平方互为逆运算。

一个数有几个平方根？从“平方”的结果倒推：

- $3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 **正数有两个平方根，它们互为相反数**；
- 只有 $0^2=0$，所以 **0 的平方根是 0**；
- 正数、负数的平方都是正数（同号相乘得正），0 的平方是 0，没有哪个数的平方是负数，所以 **负数没有平方根**。

正数的两个平方根里，正的那个叫**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$；0 的算术平方根是 0。于是正数 a 的两个平方根可以写成 $\pm\sqrt{a}$。开头那个面积为 2 的正方形 $ABCD$，边长 x 满足 $x^2=2$，就是 $\sqrt{2}$，长度只能取正的那个，这正是要单独规定算术平方根的原因。

$\sqrt{a}$ 有两个“不小于 0”：**被开方数 $a\geqslant 0$，结果 $\sqrt{a}\geqslant 0$。** 由定义还直接得到 $(\sqrt{a})^2=a$（$a\geqslant 0$）。

例 1 （1）求 $49/100$ 的平方根和算术平方根；（2）求 $\sqrt{16}$ 的平方根；（3）求 $\sqrt{((-3)^2)}$。

思路： 每一问都先问自己：哪个数的平方等于它？要的是全部平方根，还是算术平方根？

解： （1）因为 $(\pm 7/10)^2=49/100$，所以 $49/100$ 的平方根是 $\pm 7/10$，算术平方根是 $7/10$。

（2）先算 $\sqrt{16}=4$，要求的是 4 的平方根，是 ± 2。

（3）先算根号里面：$(-3)^2=9$，所以 $\sqrt{((-3)^2)}=\sqrt{9}=3$。算术平方根不会是负数，结果不是 -3。

立方根

如果 $x^3=a$，那么 x 叫作 a 的立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$。 体积为 8 的正方体，棱长是 $\sqrt[3]{8}=2$；体积为 2 的正方体，棱长是 $\sqrt[3]{2}$。

立方和平方不同：三个负数相乘是负数，所以负数的立方是负数，正数的立方是正数，而且数越大，立方越大。所以**每个数都有且只有一个立方根**：正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0 的立方根是 0。比如 $\sqrt[3]{(-8)}=-2$，因为 $(-2)^3=-8$。一般地，$\sqrt[3]{(-a)}=-\sqrt[3]{a}$。

比较	平方根	立方根
定义	$x^2=a$	$x^3=a$
正数	两个，互为相反数	一个，是正数
0	0	0
负数	没有	一个，是负数

比较	平方根	立方根
原因	任何数的平方都不是负数	立方保持原来的符号

例 2　求下列各式中的 x：（1）$2x^2=50$；（2）$(x-1)^3=-27$。

思路： 先把“谁的平方（立方）”看成一个整体，求出这个整体，再求 x。

解：（1）两边同时除以 2，得 $x^2=25$。25 的平方根是 ±5，所以 $x=5$ 或 $x=-5$。

（2）把 $x-1$ 看成整体，它的立方是 -27，所以 $x-1=\sqrt[3]{(-27)}=-3$，得 $x=-2$。

为什么根号 2 不是有理数（拓展）

有理数都能写成两个整数的商。如果 $\sqrt{2}$ 是有理数，会发生什么？

证明： 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么可以写成 $\sqrt{2}=p/q$，其中 p、q 是正整数，并且这个分数已经约到最简，p、q 没有 1 以外的公因数。两边平方，得

$$p^2=2q^2.$$

右边是偶数，所以 p^2 是偶数。奇数的平方是奇数，所以 p 不能是奇数，p 是偶数。设 $p=2m$，代入得 $4m^2=2q^2$，即

$$q^2=2m^2.$$

同样的道理，q 也是偶数。p、q 都是偶数，有公因数 2，和“已经约到最简”矛盾。所以假设不成立，**$\sqrt{2}$ 不是有理数**。

这种先假设结论不成立、推出矛盾的证明方法叫**反证法**（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

无理数：无限不循环小数

把分数化成小数，会得到什么样的小数？用除法算 $1/7$：

$$\frac{1}{7}=0.142857\,142857\,142857\cdots$$

除以 7 时，每一步的余数只能是 0、1、2、3、4、5、6 中的一个。余数是 0 就除尽了，得到有限小数；除不尽的话，最多 6 步之后，一定会遇到一个出现过的余数，从那以后商就开始重复。这里余数依次是 1、3、2、6、4、5，然后又回到 1，所以 142857 这 6 个数字循环出现。**任何分数化成小数，都是有限小数或无限循环小数。**

反过来，有限小数和无限循环小数也都能化成分数（拓展：设 $x=0.1212\cdots$，则 $100x=12.1212\cdots$，两式相减得 $99x=12$，$x=12/99=4/33$）。所以：

有理数就是有限小数和无限循环小数。无限不循环小数叫无理数。

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ 不是有理数，所以它的小数既不会除尽，也不会循环。常见的无理数有三类：

- 开方开不尽的数，如 $\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$、$\sqrt[3]{2}$；
- 与 π 有关的数，如 π、$\pi/2$；
- 有规律但不循环的小数，如 $0.1010010001\cdots$（相邻两个 1 之间 0 的个数依次多一个）。

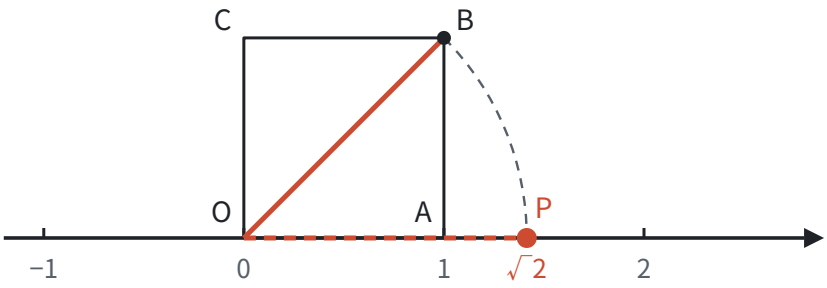
判断时看的是“能不能写成两个整数的商”，不是看样子：$\sqrt{4}=2$、$\sqrt[3]{(-8)}=-2$ 是有理数；22/7、3.14 是 π 的近似值，本身是有理数。

实数与数轴

有理数和无理数统称实数。

分类标准	第一层	第二层
按定义分	有理数	整数、分数（有限小数或无限循环小数）
	无理数	正无理数、负无理数（无限不循环小数）
按正负分	正实数	正有理数、正无理数
	0	—
	负实数	负有理数、负无理数

$\sqrt{2}$ 能在数轴上找到。以数轴上从 0 到 1 的线段 OA 为边作正方形 $OABC$，对角线 OB 的长是 $\sqrt{2}$（它是面积为 2 的正方形的边长，也可以用勾股定理算出来）。以 O 为圆心、OB 为半径画弧，交数轴正半轴于点 P，点 P 表示的数就是 $\sqrt{2}$：



同样，向左画弧得到的点表示 $-\sqrt{2}$。这说明**数轴上有些点不表示有理数**。有理数在数轴上已经非常密了，任意两个有理数之间都还有有理数，但它们之间仍然留着“缝”。把无理数补进来以后，数轴就被填满了：

每一个实数都可以用数轴上的一个点表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数。实数和数轴上的点一一对应。

在有理数里学过的概念，到了实数里意思不变，因为它们都是在数轴上定义的：

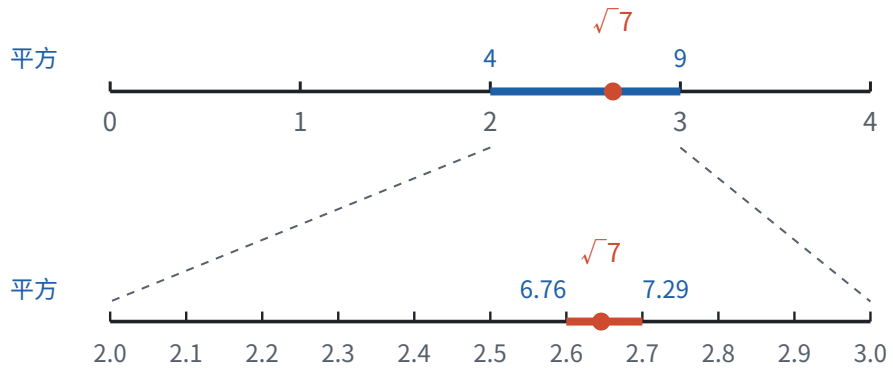
- $\sqrt{2}$ 的相反数是 $-\sqrt{2}$，关于原点对称；
- $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$；$\sqrt{2}>1$，所以 $1-\sqrt{2}<0$，$|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$；
- 数轴上右边的点表示的数更大。

有理数的运算法则和运算律，在实数里也全部成立。需要具体数值时，就用近似值计算，比如取 $\sqrt{2}\approx 1.414$，$\pi\approx 3.142$，精确到 0.01 时，$\sqrt{2}+\pi\approx 1.414+3.142=4.556\approx 4.56$。

估算：用平方夹紧

对于两个正数，**大的数平方后仍然大；反过来，被开方数大的，算术平方根也大。** 用正方形来想：边长越长，面积越大；面积越大，边长也越长。所以要知道 $\sqrt{7}$ 有多大，只要找平方在 7 两边的数：

- $2^2=4<7<9=3^2$，所以 $2<\sqrt{7}<3$；
- 把 2 到 3 十等分，$2.6^2=6.76<7<7.29=2.7^2$，所以 $2.6<\sqrt{7}<2.7$；
- 再十等分，$2.64^2=6.9696<7<7.0225=2.65^2$，所以 $2.64<\sqrt{7}<2.65$。



每夹一次，范围缩小到原来的十分之一，想要多精确都可以继续夹下去。

例 3　求 $5-\sqrt{7}$ 的整数部分和小数部分。

思路： 先把 $\sqrt{7}$ 夹在两个相邻整数之间，再看 $-\sqrt{7}$、$5-\sqrt{7}$ 的范围。取相反数时，数轴上的点关于原点翻过去，左右次序正好颠倒，所以不等号要改方向。

解： 因为 $2<\sqrt{7}<3$，取相反数，得 $-3<-\sqrt{7}<-2$。都加上 5，得 $2<5-\sqrt{7}<3$。

所以 $5-\sqrt{7}$ 的整数部分是 2，小数部分是 $(5-\sqrt{7})-2=3-\sqrt{7}$。

例 4　比较 $(\sqrt{5}-1)/2$ 与 $1/2$ 的大小。（参考数据：$\sqrt{5}\approx 2.236$）

思路： 两个分数的分母相同，只要比较 $\sqrt{5}-1$ 和 1，也就是看 $\sqrt{5}$ 比 2 大还是小。

解法一：用估算推理。 因为 $2^2=4<5$，所以 $\sqrt{5}>2$（被开方数大的，算术平方根也大），于是 $\sqrt{5}-1>1$，两边都除以 2，得

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}.$$

解法二：用近似值计算。 代入参考数据 $\sqrt{5}\approx 2.236$，得 $(\sqrt{5}-1)/2\approx(2.236-1)/2=0.618$。因为 $0.618>0.5$，所以 $(\sqrt{5}-1)/2>1/2$。

想一想： 两种办法都对，差别在于需要多精确。

比较	解法一：估算推理	解法二：近似值计算
做法	只需知道 $\sqrt{5}>2$	需要知道 $\sqrt{5}$ 的前几位小数
结论	严格成立	两个数相差较大时可靠
什么时候用	两数接近、需要说明理由时	手边有计算器、差距明显时

两个数离得越近，需要的精确度越高。用夹逼的办法，只要夹到足够把两个数分开就可以停下来，这里夹到 $2<\sqrt{5}<3$ 就够了。

易错点

- **把平方根和算术平方根混为一谈。** “16 的平方根是 4”不对，应该是 ± 4；$\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2，不是 ± 4，要先算出 $\sqrt{16}=4$。
- **认为 $\sqrt{((-3)^2)}=-3$。** 算术平方根一定不小于 0，结果是 3。一般地，$\sqrt{a^2}=|a|$。
- **负数开平方。** $\sqrt{(-4)}$ 没有意义；但负数可以开立方，$\sqrt[3]{(-8)}=-2$。
- **凭样子判断无理数。** 带根号的不一定是无理数（$\sqrt{9}=3$），无限小数也不一定是无理数（$0.333\cdots$ 是循环小数）。判断的标准是能否写成两个整数的商，或者说是否无限不循环。
- **说“有理数和数轴上的点一一对应”。** 有理数不能填满数轴，和数轴上的点一一对应的是实数。
- **估算时取相反数不改不等号方向。** 由 $2<\sqrt{7}<3$ 得到的是 $-3<-\sqrt{7}<-2$，不是 $-2<-\sqrt{7}<-3$。

联系

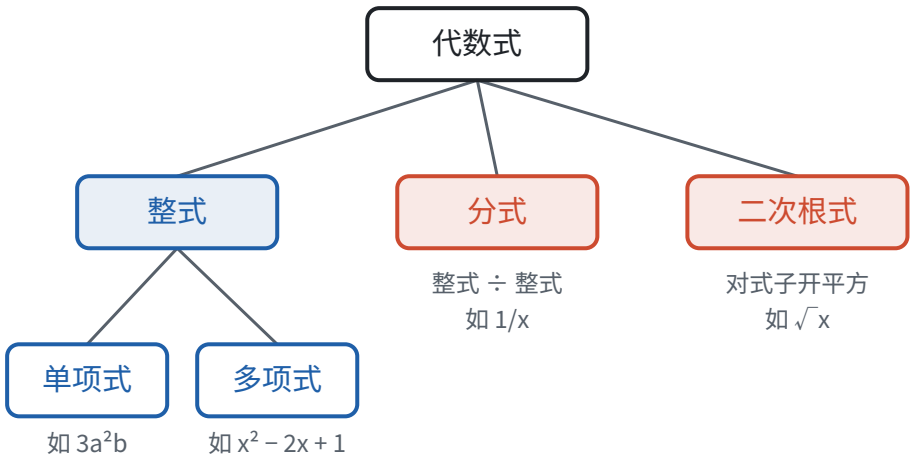
- **有理数：** 相反数、绝对值、大小比较都是在数轴上定义的，所以原样推广到实数。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **勾股定理：** 直角边为 1、1 的直角三角形，斜边是 $\sqrt{2}$；直角边为 1、2 的，斜边是 $\sqrt{5}$。勾股定理算出来的边长经常是无理数。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **二次根式：** 把 $\sqrt{a}$ 当成式子来运算、化简，$\sqrt{a^2}=|a|$ 是化简的关键。见第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **一元二次方程：** 解 $x^2=a$ 就是求 a 的平方根，正数有两个根，负数没有实数根，这就是判别式的雏形。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **怎样证明：** $\sqrt{2}$ 不是有理数，是反证法的经典例子。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。
- **平面直角坐标系：** 实数和数轴上的点一一对应，所以有序实数对和坐标平面上的点一一对应。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **与圆有关的计算：** π 是无理数，弧长、扇形面积的结果常常保留 π。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。

真题： 2026 年第 16 题（第 360 页）、2025 年第 16 题（第 373 页）、2023 年第 1 题（第 396 页）、2023 年第 16 题（第 401 页）、2022 年第 16 题（第 414 页）。

总览：式的家族

用字母代替数，一类计算就能写成一个式子；式的每一条运算法则，都是数的运算律在字母上的延续。

式的家族



式的家族是一步步扩充出来的，和数的扩充走的是同一条路（见第二部分“总览：数的扩充”（第 35 页））：

- 整式对加、减、乘都“封闭”：两个整式相加、相减、相乘，结果还是整式。这像整数。
- 整式除以整式，结果常常不再是整式，于是有了分式。这像整数除以整数得到分数。
- 对式子开平方，就有了二次根式。这像对数开平方得到 $\sqrt{2}$ 这样的无理数。

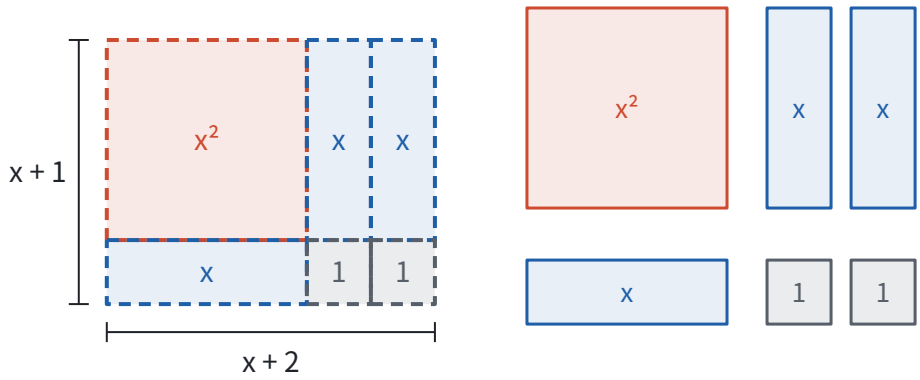
式	长什么样	对应哪一类数	能做的运算	“化简”指什么	页面
整式	单项式、多项式，字母不在分母里，也不在根号下	整数	加、减、乘、乘方；除以单项式	去括号、合并同类项，写成没有同类项的多项式	整式的加减、整式的乘法
分式	A/B，分母 B 里含字母	分数	加、减、乘、除、乘方	约分，化成最简分式或整式	分式
二次根式	$\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$），根号下含字母	$\sqrt{2}$ 这样的无理数	加、减、乘、除	化成最简二次根式，合并被开方数相同的根式，分母里不留根号	二次根式

两个方向：乘开与分解

整式的乘法和因式分解是同一个等式从两头读：

方向	做什么	例子	用在哪里
整式的乘法	积 → 和	$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$	展开、化简、代数推理
因式分解	和 → 积	$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$	约分、通分、解一元二次方程

两个方向在图上是同一个长方形：乘法是“知道两边，求面积”，因式分解是“知道面积由哪些块组成，把它们拼成长方形，找出两边”。比如一个 x^2、三个 x、两个 1 这几块，拼成两边为 $x+2$、$x+1$ 的长方形：



贯穿这一部分的三个想法

运算律不变。 交换律、结合律、分配律在字母上照样成立。合并同类项、去括号、多项式乘法、提公因式、合并二次根式，用的都是分配律。

类比数。 整式像整数，分式像分数，二次根式像 $\sqrt{2}$。分式的约分、通分和分数一模一样；二次根式的化简就是把 $\sqrt{8}$ 写成 $2\sqrt{2}$ 的那套办法。遇到新的式，先想“换成数是怎么做的”。

面积模型。 长方形的面积等于长乘宽，所以多项式的乘法、乘法公式、因式分解都能画成长方形的分块和拼接。这个模型后面还会用来证明勾股定理、推导配方法（见第五部分“勾股定理”（第 149 页）和第四部分“一元二次方程”（第 104 页））。

学习顺序

建议按页面顺序学，每一页都要用到前一页：

1. **代数式**：用字母表示数，列式子、求值（见第三部分“代数式”（第 54 页））。
2. **整式的加减**：认识单项式和多项式，学会合并同类项、去括号（见第三部分“整式的加减”（第 59 页））。
3. **整式的乘法**：幂的运算、多项式乘法和两个乘法公式，这一页是后面各页的基础（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。
4. **因式分解**：把乘法倒过来做（见第三部分“因式分解”（第 69 页））。
5. **分式**：约分和通分都要先因式分解（见第三部分“分式”（第 74 页））。
6. **二次根式**：先复习平方根和无理数（见第二部分“实数”（第 47 页）），再学根式的运算；它的乘法和加减又会用到乘法公式和合并同类项（见第三部分“二次根式”（第 79 页））。

式是后面各部分的工具：解方程就是对式子做变形（见第四部分“总览：从等式到方程”（第 85 页）），函数的解析式就是一个含字母的式子（见第七部分“函数”（第 201 页））。

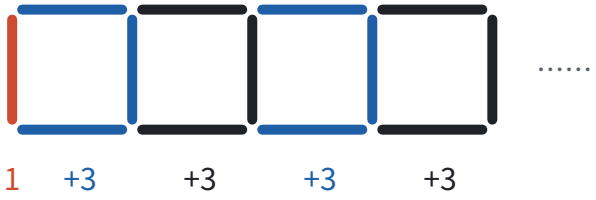
代数式

> 对应人教版七年级上册第三章。

用运算符号把数和表示数的字母连接起来的式子，叫代数式。 字母代表“任意一个数”，一个代数式就代表了一整类计算：字母取不同的值，式子就算出不同的结果。

从哪里来

用火柴棒摆正方形，一个挨一个排成一排：摆 1 个正方形要 4 根，摆 2 个要 7 根，摆 3 个要 10 根。摆 100 个要多少根？



一个一个数太慢。看看火柴是怎样增加的：最左边先放 1 根竖的，之后每添一个正方形，只要再加上、下、右 3 根。所以

- 摆 1 个：$1+3\times1=4$ 根；
- 摆 2 个：$1+3\times2=7$ 根；
- 摆 100 个：$1+3\times100=301$ 根。

这些算式的样子完全一样，变的只是正方形的个数。用字母 n 表示正方形的个数，就能一次说清所有情况：**摆 n 个正方形要 $3n+1$ 根火柴。**

$3n+1$ 就是一个代数式。像 $3n+1$、$0.8a$、a^2、a/b、$\sqrt{x}$ 这样，用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数和字母连起来的式子都是代数式。单独一个数或一个字母，比如 5、a，也算代数式。

换一种数法也可以：第一个正方形用 4 根，后面 $n-1$ 个正方形每个再加 3 根，共 $4+3(n-1)$ 根。两个式子样子不同，算出来的结果却总是一样，它们是“相等的式子”。怎样不用一个一个代数就看出它们相等，是下一页要讲的内容（见第三部分“整式的加减”（第 59 页））。

从算式到代数式，就是从“文字语言”翻译成“符号语言”：“正方形个数的 3 倍再加 1”写成 $3n+1$，短而且准确（见第一部分“三种数学语言”（第 12 页））。

代数式里没有等号和不等号。 $3n+1$ 是代数式；$3n+1=61$ 是方程，$3n+1>61$ 是不等式。

代数式的写法

代数式里字母和数混在一起，为了不产生误会，写法有几条约定：

约定	例子	为什么
数和字母、字母和字母相乘，乘号写成“·”或者省略	$3\times n$ 写成 $3n$，$a\times b$ 写成 ab	乘号“×”和字母 x 容易看混
数写在字母前面	$n\times3$ 写成 $3n$	统一写法，一眼看出字母前面的数

约定	例子	为什么
带分数和字母相乘，带分数要化成假分数	$11/2 \times a$ 写成 $(3/2)a$	带分数本身是“整数加分数”，后面紧跟字母容易读错
除法写成分数的形式	$a \div 3$ 写成 $a/3$	分数线就是除号，写起来更紧凑

数和数相乘，乘号不能省：3×5 不能写成 35。

列代数式

列代数式的关键是**先用文字把“谁和谁、按什么顺序算”说清楚，再换成符号。** 运算顺序靠括号表达，文字里先算的部分，式子里就要先算，必要时加括号。

文字	代数式	说明
a 与 b 的和的平方	$(a+b)^2$	先求和，再平方
a 与 b 的平方和	a^2+b^2	先各自平方，再求和
比 x 的 3 倍少 5 的数	$3x-5$	先算 3 倍，再减 5
x 与 1 的差的一半	$(x-1)/2$	先求差，再除以 2
十位数字是 a、个位数字是 b 的两位数	$10a+b$	十位上的 a 表示 a 个十
三个连续整数，中间一个是 n	$n-1$，n，$n+1$	相邻整数相差 1

例 1 某商品每件进价 a 元，商店按进价提高 40% 标价，再打八折出售。每件商品的利润是多少元？

思路： 利润 = 售价 − 进价。售价还不知道，要先求标价，再求售价，一步一步往前推。

解：

1. 标价：比进价提高 40%，是 $a(1+40\%)=1.4a$（元）。
2. 售价：打八折，是标价的 0.8 倍，$0.8 \times 1.4a = 1.12a$（元）。
3. 利润：$1.12a - a = 0.12a$（元）。

答：每件商品的利润是 $0.12a$ 元。

回顾： 结果说明，不管进价是多少，利润总是进价的 12%。这是用字母算一次就得到的一般规律，换成具体的数就得每次重算。

例 2 一个两位数，十位数字是 a，个位数字是 b。把十位数字和个位数字交换位置，得到一个新的两位数。说明：原数与新数的差一定是 9 的倍数。

思路： “说明对所有两位数都成立”，不能只举几个例子，要用字母表示任意一个两位数，再算差。

解： 原数是 $10a+b$，新数是 $10b+a$。它们的差是

$$(10a+b)-(10b+a)=10a+b-10b-a=9a-9b=9(a-b).$$

$a-b$ 是整数，所以差是 9 的倍数。

比如 $73-37=36=9\times4$，这里 $a-b=7-3=4$，和算出来的一样。这种用字母和运算说明一般规律的方法叫

代数推理（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））；式子的变形用到了去括号和合并同类项（见第三部分“整式的加减”（第 59 页））。

代数式的值

用数值代替代数式里的字母，按照式子中的运算算出的结果，叫代数式的值。 求值分两步：先代入，再计算，计算就是有理数的混合运算（见第二部分“有理数的运算”（第 41 页））。

代入时要注意两点：

- 字母换成负数或分数时，要**加上括号**。$a=-2$ 时，a^2 是 $(-2)^2=4$，不是 $-2^2=-4$。
- 代数式里省略的乘号，代入数后要**写回来**：$a=-2$，$b=3$ 时，$2ab$ 是 $2\times(-2)\times3$。

例 3　当 $a=-2$，$b=3$ 时，求 $a^2-2ab+b^2$ 和 $(a-b)^2$ 的值。

解：

$$a^2-2ab+b^2=(-2)^2-2\times(-2)\times3+3^2=4+12+9=25,$$

$$(a-b)^2=(-2-3)^2=(-5)^2=25.$$

两个式子的值相等。换别的 a、b 试试，比如 $a=1$，$b=4$，两个式子都得 9。这不是巧合：$a^2-2ab+b^2$ 和 $(a-b)^2$ 是同一个式子的两种写法（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。

例 4　已知 $x-2y=3$，求 $5-2x+4y$ 的值。

思路： 只有一个条件，求不出 x、y 各是多少。但看所求的式子：$-2x+4y$ 正好是 $x-2y$ 的 -2 倍。把 $x-2y$ 当成一个整体，就不必知道 x、y 各自的值。

解：

$$5-2x+4y=5-2(x-2y)=5-2\times3=-1.$$

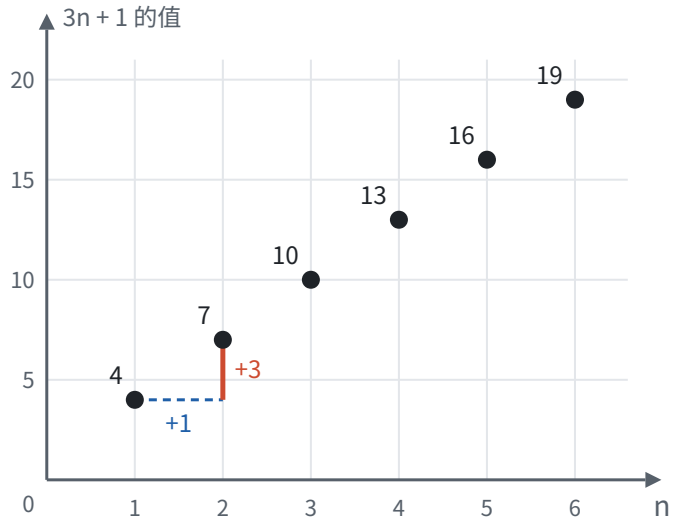
想一想： 也可以随便找一组满足条件的数，比如 $x=3$，$y=0$，代入得 $5-6+0=-1$。这样能检验答案，但不能代替解答：满足 $x-2y=3$ 的数有无数组，“整体代入”说明了不管取哪一组，结果都是 -1；只试一组，说明不了其他组也是 -1。

值随字母变化

回到开头的火柴棒：摆 n 个正方形要 $3n+1$ 根火柴。让 n 取 1，2，3，…，代数式 $3n+1$ 的值依次是：

n	1	2	3	4	5	6
$3n+1$	4	7	10	13	16	19

把每一对数画成一个点，横坐标是 n，纵坐标是 $3n+1$ 的值：



n 每增加 1，值就增加 3，这些点排在一条直线上。**代数式的值随字母的变化而变化，而且字母每取一个值，式子只有一个值和它对应。** 把这种对应关系本身当作研究对象，就是函数（见第七部分“函数”（第 201 页））；像 $3n+1$ 这样“每一步增加同样多”的关系，是一次函数（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。

这里的 n 是正方形的个数，只能取正整数，所以图上是一个一个分开的点，不能连成线。**字母能取哪些值，要看它在问题里代表什么。**

易错点

- **省略乘号时出错。** 数和数之间的乘号不能省：3×5 不能写成 35；两位数写成 ab 也是错的，ab 表示 $a\times b$，两位数是 $10a+b$。
- **顺序和括号没弄清。** “a 与 b 的和的平方”是 $(a+b)^2$，“a 与 b 的平方和”是 a^2+b^2；“x 的一半与 1 的差”是 $x/2-1$，“x 与 1 的差的一半”是 $(x-1)/2$。文字里哪部分先算，式子里就要先算。
- **代入负数不加括号。** $a=-2$ 时，$a^2=(-2)^2=4$，$-a^2=-4$。a^2 是“a 的平方”，a 换成 -2 后，平方的是整个 -2。
- **把求代数式的值当成解方程。** 代数式没有等号，“求值”是已知字母求结果；解方程是已知结果求字母。
- **忽略字母的实际意义。** 表示个数、人数的字母只能取正整数（或自然数），表示长度的字母只能取正数。

联系

- **三种数学语言：** 列代数式就是把文字语言翻译成符号语言。见第一部分“三种数学语言”（第 12 页）。
- **整式的加减：** $3n+1$ 和 $4+3(n-1)$ 为什么总相等，靠去括号、合并同类项说明。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。
- **方程：** 用了 61 根火柴，摆了几个正方形？令 $3n+1=61$，得 $n=20$。已知代数式的值反过来求字母，就是解方程。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。
- **函数：** 代数式的值随字母变化，字母每取一个值，式子只有一个值和它对应，这就是函数。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **一次函数：** $3n+1$ 每一步增加 3，画出来的点在一条直线上。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。

真题： 2025 年第 13 题（第 372 页）、2023 年第 11 题（第 399 页）。

整式的加减

> 对应人教版七年级上册第四章。

整式的加减只做两件事：去括号，合并同类项；这两件事的依据都是乘法分配律。

单项式和多项式

上一页列出的代数式里，有一类只含加、减、乘、乘方运算，字母不在分母里，也不在根号下，比如 $3n+1$、$0.12a$、$a^2-2ab+b^2$。它们叫**整式**。整式按项数分成两种。

单项式：数与字母的积。 比如 $-3a^2b$、$0.12a$、$(2/3)\pi r^2$。单独一个数或一个字母也是单项式。

- **系数：** 单项式中的数字因数。
- **次数：** 单项式中**所有字母**的指数的和。

单项式	系数	次数	说明
$-3a^2b$	-3	3	a 的指数 2 加 b 的指数 1
xy	1	2	系数 1 省略不写
$-m$	-1	1	$-m$ 就是 $(-1)\times m$
$(2/3)\pi r^2$	$(2/3)\pi$	2	π 是一个确定的数，不是字母
-2^3x^2y	-2^3，即 -8	3	2^3 是数，它的指数不算进次数
5	5	0	不含字母的单项式次数是 0

多项式：几个单项式的和。 比如 $3x^2-2x+5$ 是 $3x^2$、$-2x$、5 这三个单项式的和。

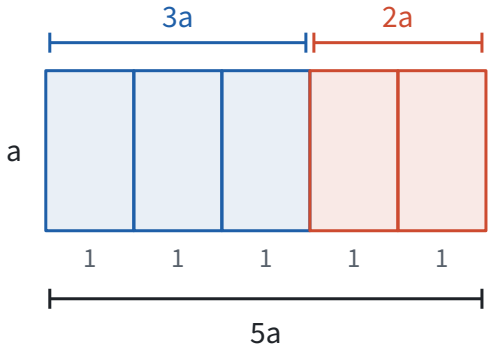
- **项：** 组成多项式的每个单项式，**连同它前面的符号**。$3x^2-2x+5$ 的一次项是 $-2x$，不是 $2x$。
- **常数项：** 不含字母的项，这里是 5。
- **次数：** 次数最高的项的次数。$3x^2-2x+5$ 有三项，最高次是 2，叫二次三项式。

为什么说 $3x^2-2x+5$ 是“和”，式子里明明有减号？因为减去一个数等于加上它的相反数（见第二部分“有理数的运算”（第 41 页））：$3x^2-2x+5=3x^2+(-2x)+5$。把减法都看成加法，每一项都带着自己的符号，后面的计算就不会丢符号。

单项式和多项式统称整式。写多项式时，一般按某个字母的指数从大到小排列（降幂排列），比如 $-x+3x^2-7$ 写成 $3x^2-x-7$，这样各项一目了然，也方便检查有没有同类项。

同类项和合并同类项

先看一个面积的问题：一块长方形由 5 个宽为 1、高为 a 的小长方形拼成，左边 3 个，右边 2 个。



左边面积是 $3a$，右边是 $2a$，合起来是 5 个同样的小长方形，面积是 $5a$。用分配律写出来就是

$$3a + 2a = (3 + 2)a = 5a.$$

能这样合并，是因为 $3a$ 和 $2a$ 都是“若干个 a”，分配律可以把共同的 a 提出来，只把个数相加。换成 $3a^2 + 2a$ 就不行了：a^2 和 a 不是同一种“块”，没有共同的部分可以提出来，结果只能写成 $3a^2 + 2a$。

所以规定：**所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项，叫同类项。** 所有常数项也都是同类项。同类项与系数无关，与字母的顺序无关：$2xy$ 和 $-5yx$ 是同类项，$3a^2b$ 和 $3ab^2$ 不是。

把多项式中的同类项合并成一项，叫合并同类项。 由分配律直接得到法则：**系数相加，字母和字母的指数不变。**

例 1 合并同类项：$3x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 7$。

思路： 先找出同类项：二次项 $3x^2$ 和 $-x^2$，一次项 $-5x$ 和 $4x$，常数项 2 和 -7。每一项带着自己前面的符号移动位置（加法交换律），再分别合并。

解：

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 7 \\ = \ & (3x^2 - x^2) + (-5x + 4x) + (2 - 7) \\ = \ & 2x^2 - x - 5. \end{aligned}$$

检验： 取 $x = 1$，原式 $= 3 - 5 + 2 - 1 + 4 - 7 = -4$，结果 $= 2 - 1 - 5 = -4$，一致。化简前后的两个式子对任何 x 的值都相等，随便代一个数进去，是检查化简有没有出错的简便办法。

去括号

去括号也是分配律：括号前面的数，要乘括号里的**每一项**。

$$3(2x - 1) = 6x - 3, \qquad -2(x - 3) = -2x + 6.$$

括号前只有正号或负号时，把它看成乘 $+1$ 或 -1：

$$+(a - b) = a - b, \qquad -(a - b) = (-1)(a - b) = -a + b.$$

所以：**括号前是“+”号，去掉括号，括号里各项都不变号；括号前是“−”号，去掉括号，括号里各项都改变符号。** 这不是另外的规定，只是乘 $+1$ 和乘 -1 的结果。

整式的加减

有了去括号和合并同类项，整式的加减就是：**有括号先去括号，再合并同类项。**

例 2　先化简，再求值：$(5a^2-3ab)-2(2a^2-ab+1)$，其中 $a=-1$，$b=2$。

思路： 可以直接代入，但式子里有好几项，每项都要算；先化简，式子变短了，代入只算一次。

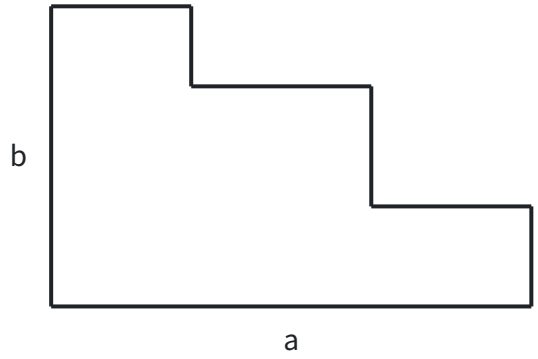
解：

$$\begin{aligned}&(5a^2-3ab)-2(2a^2-ab+1)\\=\ &5a^2-3ab-4a^2+2ab-2\\=\ &a^2-ab-2.\end{aligned}$$

当 $a=-1$，$b=2$ 时，原式 $=(-1)^2-(-1)\times 2-2=1+2-2=1$。

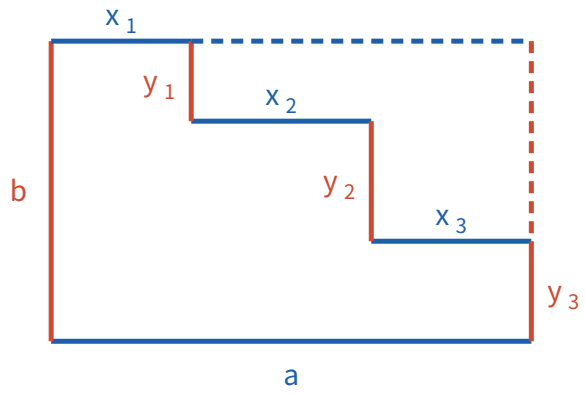
检验： 不化简直接代入，$5a^2-3ab=5+6=11$，$2a^2-ab+1=2+2+1=5$，$11-2\times 5=1$，一致。

例 3　如图，一个台阶形图形的底边长 a，左边长 b，右上方是三级台阶。求它的周长。



思路： 每一级台阶的长和高都不知道，好像求不出来。但周长只要各段长度的**和**，不必知道每一段。三段横的台阶面向上平移，正好拼成顶边，和底边一样长；三段竖的台阶面向右平移，正好拼成右边，和左边一样长。

解： 设三段横的台阶面长 x_1，x_2，x_3，三段竖的长 y_1，y_2，y_3。把横的三段向上平移到顶边，竖的三段向右平移到右边：



由图，$x_1+x_2+x_3=a$，$y_1+y_2+y_3=b$。周长是

$$a+b+(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=a+b+a+b=2a+2b.$$

台阶形的周长和长 a、宽 b 的长方形的周长相同。

例 4　说明：任意三个连续整数的和都是 3 的倍数。

解： 设中间一个整数是 n，三个数是 $n-1$，n，$n+1$。它们的和是

$$(n-1)+n+(n+1)=3n,$$

是 3 的倍数，而且正好是中间那个数的 3 倍。设中间的数，比设最小的数更方便：-1 和 $+1$ 正好抵消。

易错点

- **次数算错。** 次数只看字母的指数：-2^3x^2y 的次数是 3，不是 6；πr^2 的次数是 2，π 不是字母。多项式的次数是最高次项的次数，不是各项次数的和。
- **同类项判断错。** 看的是“字母相同，相同字母的指数也相同”：$3a^2b$ 和 $3ab^2$ 系数相同，却不是同类项；$2xy$ 和 $-yx$ 字母顺序不同，却是同类项。
- **合并时把指数也加了。** $3a^2+2a^2=5a^2$，不是 $5a^4$。分配律只把系数相加，“若干个 a^2”加起来还是 a^2。$a^2+a^2=2a^2$ 也不是 a^4。
- **去括号漏变号、漏乘。** $-(2x-3)=-2x+3$；$-2(x-3)=-2x+6$，括号前的数要乘括号里的每一项，连同符号。
- **丢了项的符号。** x^2-3x+1 的一次项是 $-3x$，一次项系数是 -3。

联系

- **代数式：** 用火柴棒摆 n 个正方形，一种数法得 $3n+1$ 根，另一种数法得 $4+3(n-1)$ 根；$4+3(n-1)$ 去括号、合并同类项后就是 $3n+1$，两种数法得到的是同一个式子。见第三部分“代数式”（第 54 页）。
- **有理数的运算：** 减法变成加相反数，是“多项式是单项式的和”的由来；合并同类项就是用分配律，和有理数的简便运算一回事。见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。
- **整式的乘法：** 单项式乘多项式、多项式乘多项式，都是分配律的进一步使用，最后一步总是合并同类项。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **周长和面积：** 图形的周长用字母表示出来是整式，求周长就是整式的加减，比如例 3 里底边长 a、左边长 b 的台阶形，周长是 $2a+2b$；长方形的面积是长乘宽，要用到整式的乘法。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **一元一次方程：** 解方程时的去括号、合并同类项，和这里完全一样。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。
- **二次根式：** 被开方数相同的二次根式合并，$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$，道理和合并同类项相同。见第三部分“二次根式”（第 79 页）。

真题： 2025 年第 16 题（第 373 页）、2024 年第 11 题（第 385 页）、2023 年第 16 题（第 401 页）。

整式的乘法 ★

> 对应人教版八年级上册第十六章。

整式乘法的每一条法则，都是由乘方的定义和乘法的交换律、结合律、分配律推出来的；多项式乘多项式，就是把一个长方形分成几块，再把各块的面积加起来。

幂的运算：从乘方的定义出发

整式相乘，先要会算字母的幂相乘。一切从乘方的定义开始：

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ 个 }a}.$$

同底数幂相乘：数一数一共有几个 a。

$$a^3\cdot a^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a^5.$$

3 个 a 再乘 2 个 a，一共 5 个 a。一般地，m 个 a 乘 n 个 a，一共 $m+n$ 个 a：

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}.$$

幂的乘方：n 个 a^m 相乘。

$$(a^3)^2 = a^3\cdot a^3 = a^{3+3} = a^6.$$

一般地，$(a^m)^n$ 是 n 个 a^m 相乘，由上一条，指数是 n 个 m 相加，得

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

积的乘方：用交换律和结合律重新分组。

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a\cdot a\cdot a)(b\cdot b\cdot b) = a^3b^3.$$

一般地，$(ab)^n = a^nb^n$：积的乘方，等于把积的每个因式分别乘方，再相乘。

同底数幂相除：约掉公共的 a。 比如

$$a^5\div a^2 = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = a^3.$$

5 个 a 除以 2 个 a，约掉 2 个，剩下 3 个。一般地，

$$a^m\div a^n = a^{m-n}\quad (a\neq 0,\ m>n).$$

$a\neq 0$，因为 0 不能作除数。

零指数幂：为了让法则继续成立而规定。 $m=n$ 时，一方面 $a^m\div a^m = 1$（一个不为 0 的数除以它自己）；另一方面，如果同底数幂相除的法则还能用，应该得到 $a^{m-m}=a^0$。为了让两边一致，规定

$$a^0 = 1\quad (a\neq 0).$$

a^0 不能再理解成“0 个 a 相乘”，它的意义来自“让法则继续成立”。0^0 没有意义，因为推导时用到了除以 a。

运算	法则	从定义看
同底数幂相乘	$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	m 个 a 和 n 个 a 放在一起
幂的乘方	$(a^m)^n = a^{mn}$	n 组，每组 m 个 a
积的乘方	$(ab)^n = a^nb^n$	把 n 个 a 和 n 个 b 分别放在一起
同底数幂相除	$a^m\div a^n = a^{m-n}$（$a\neq 0$，$m>n$）	约掉 n 个 a
零指数幂	$a^0 = 1$（$a\neq 0$）	规定，让相除的法则在 $m=n$ 时也成立

例 1　计算：$(-2a^2)^3 + a^2\cdot a^4$。

思路： 两项分开算，各自用哪条法则要看清：第一项是积的乘方，-2 和 a^2 都要三次方；第二项是同底数幂相乘。最后看两项能不能合并。

解：

$$(-2a^2)^3+a^2\cdot a^4=(-2)^3(a^2)^3+a^6=-8a^6+a^6=-7a^6.$$

例 2 已知 $2^m=3$，$2^n=5$，求 2^{m+n} 和 2^{2m+n} 的值。

思路： m、n 不好求，但法则可以倒过来用：指数相加的幂，可以拆成两个幂相乘；指数是倍数的幂，可以写成幂的乘方。

解：

$$2^{m+n}=2^m\cdot 2^n=3\times 5=15,$$
$$2^{2m+n}=2^{2m}\cdot 2^n=(2^m)^2\cdot 2^n=3^2\times 5=45.$$

单项式与单项式、多项式相乘

单项式乘单项式： 用交换律和结合律，把系数放在一起，同一个字母的幂放在一起：

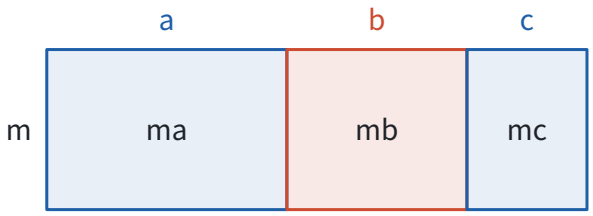
$$3a^2b\cdot(-2ab^3)=[3\times(-2)]\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b\cdot b^3)=-6a^3b^4.$$

也就是系数相乘，同底数幂相乘，只在一个单项式里出现的字母连同它的指数照写。

单项式乘多项式： 就是分配律，用单项式去乘多项式的每一项，再把积相加：

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

在图上，这是一个高为 m 的长方形，分成宽为 a、b、c 的三块：



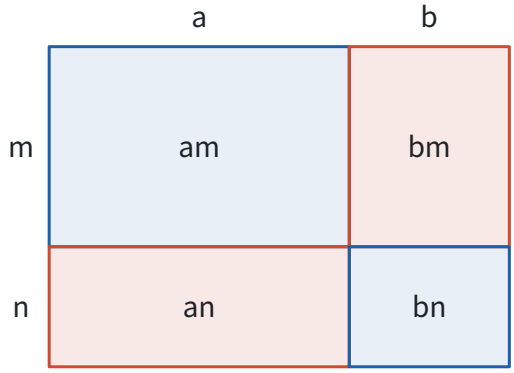
整个长方形的面积 $m(a+b+c)$，等于三块面积的和 $ma+mb+mc$。

多项式乘多项式

计算 $(a+b)(m+n)$ 时，先把 $m+n$ 看成一个整体，用一次分配律；再对每一部分各用一次：

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

结果是：**用一个多项式的每一项，乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。** 两项乘两项，得 $2\times 2=4$ 项（合并同类项之前）。在图上，长 $a+b$、宽 $m+n$ 的长方形正好被分成四块：



例 3　计算：$(x+2)(x-3)$。

解：

$$(x+2)(x-3)=x^2-3x+2x-6=x^2-x-6.$$

回顾： 把 2 和 -3 换成任意的 p、q，同样的步骤给出

$$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq.$$

一次项系数是 $p+q$，常数项是 pq。例 3 里 $p+q=-1$，$pq=-6$，和算出来的一致。这个式子倒过来读，就是因式分解的一种方法（见第三部分“因式分解”（第 69 页））。

乘法公式

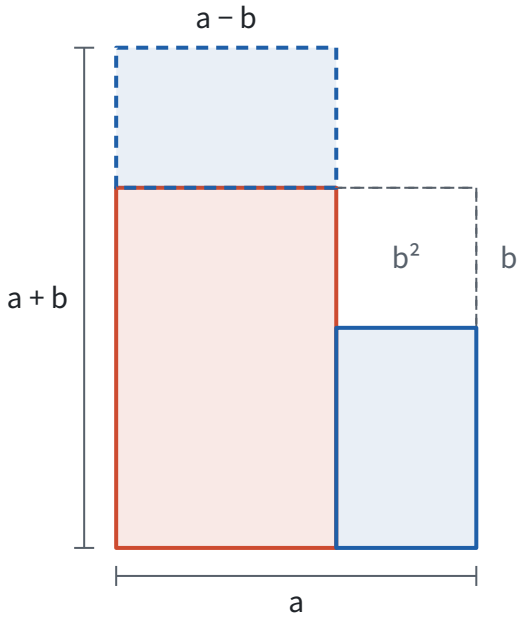
有两种多项式乘法特别常见，结果又特别整齐，把它们记成公式，以后看见这种结构就不必一项一项乘。

平方差公式： 两个数的和与这两个数的差相乘。

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

中间的 $-ab$ 和 $+ab$ 正好抵消，只剩两项：**两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。**

在图上：边长为 a 的正方形挖去边长为 b 的小正方形，剩下的面积是 a^2-b^2。把剩下的部分剪成两个长方形，把右下方的一块转过来拼到上面，就拼成一个长 $a+b$、宽 $a-b$ 的长方形：

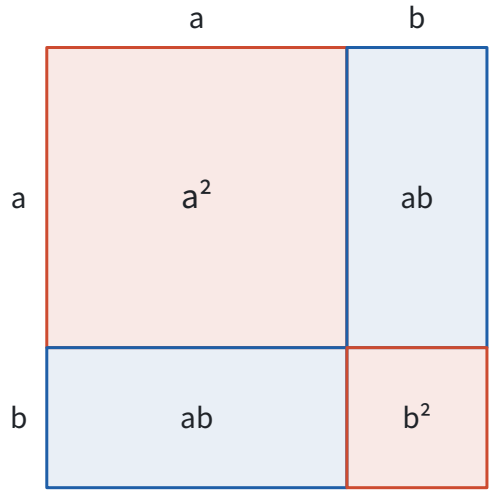


面积没有变，所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

完全平方公式： 两个数的和（或差）的平方。

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

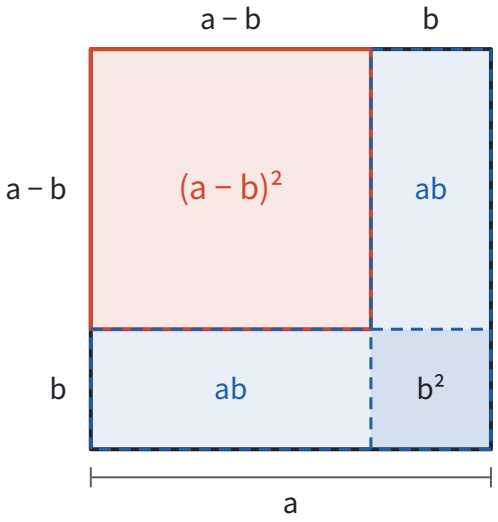
两个数的和的平方，等于它们的平方和，加上它们的积的 2 倍。 在图上，边长 $a+b$ 的正方形分成四块：两个正方形 a^2、b^2，两个同样的长方形 ab：



差的平方不必另外推导：把 $a-b$ 看成 $a+(-b)$，代入上面的公式，

$$(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

在图上，从边长 a 的正方形里去掉右边和下边两条 $a\times b$ 的长方形，就剩下边长 $a-b$ 的正方形。但右下角那块 b^2 被两条长方形都盖住了，减了两次，所以要加回一次：



例 4 用乘法公式计算：（1）102×98；（2）99^2。

思路： 两个数都靠近 100，写成 100 加减一个小数，就能用公式。

解：

$$102\times 98=(100+2)(100-2)=100^2-2^2=10000-4=9996,$$

$$99^2=(100-1)^2=100^2-2\times 100\times 1+1^2=10000-200+1=9801.$$

例 5　计算：$(2x-3y)^2$。

思路： 这是差的平方，公式里的 a 是 $2x$，b 是 $3y$。把整个 $2x$ 当作 a，平方时系数 2 也要平方。

解：

$$(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2.$$

例 6　已知 $a+b=5$，$ab=3$，求 a^2+b^2 和 $(a-b)^2$ 的值。

思路： 由 $a+b=5$、$ab=3$ 去求 a、b 很麻烦（它们不是整数）。但完全平方公式把 $(a+b)^2$、a^2+b^2、ab 三者连在一起：知道其中两个，就能求第三个。

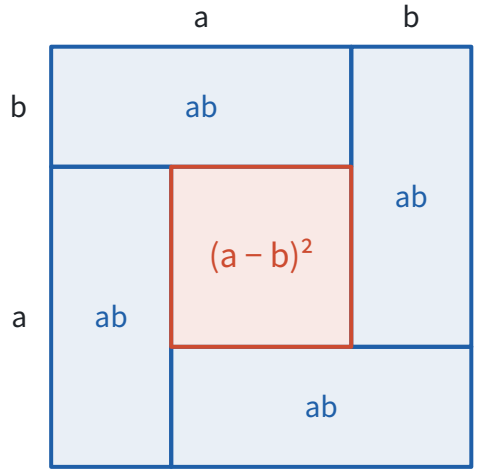
解： 由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，得

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times 3=19.$$

再由 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，得

$$(a-b)^2=(a^2+b^2)-2ab=19-6=13.$$

想一想： 上面求 $(a-b)^2$ 分了两步，先求出 a^2+b^2。其实 $(a+b)^2$ 和 $(a-b)^2$ 可以直接比较：用四个长 a、宽 b 的长方形围成一圈，拼成边长 $a+b$ 的大正方形，中间空出一个小正方形，它的边长是 $a-b$（长方形的长 a 减去宽 b）：



大正方形比中间的小正方形多了 4 块 ab，也就是 $(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=4ab$。所以 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=25-12=13$，一步就到。$(a+b)^2$、$(a-b)^2$、$ab$、$a^2+b^2$ 这几个量，任意知道两个，就能用完全平方公式求出其余的，不必先求出 a 和 b。

整式的除法

除法是乘法的逆运算：求“什么乘除式等于被除式”。

单项式除以单项式： 系数相除，同底数幂相除，只在被除式里出现的字母连同它的指数照写。

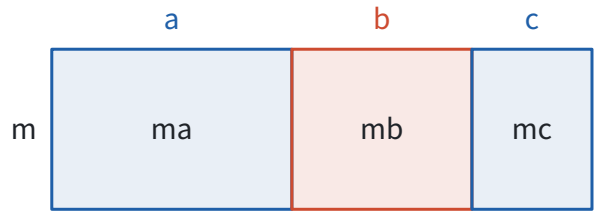
$$12a^3b^2\div 3ab=(12\div 3)\cdot(a^3\div a)\cdot(b^2\div b)=4a^2b.$$

检验：$3ab\cdot 4a^2b=12a^3b^2$，对了。

多项式除以单项式： 除以 m 就是乘 $1/m$，再用分配律，所以用多项式的每一项分别除以这个单项式，再把商相加：

$$(am+bm)\div m=am\div m+bm\div m=a+b.$$

前面算单项式乘多项式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 时，用的是这张图：高为 m 的长方形，分成宽为 a、b、c 的三块。



除法就是反过来看这张图：知道整个长方形的面积 $ma+mb+mc$ 和高 m，求宽。每一块的宽都是它的面积除以高：$ma\div m=a$，$mb\div m=b$，$mc\div m=c$，合起来宽就是 $a+b+c$。这正是“用多项式的每一项分别除以单项式，再把商相加”。

例 7 计算：$(6x^3-4x^2+2x)\div 2x$。

解：

$$(6x^3-4x^2+2x)\div 2x=6x^3\div 2x-4x^2\div 2x+2x\div 2x=3x^2-2x+1.$$

最后一项 $2x\div 2x=1$，不是 0。检验：$2x(3x^2-2x+1)=6x^3-4x^2+2x$。

杨辉三角（拓展）

用 $(a+b)^2$ 再乘一次 $a+b$：

$$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

把 $(a+b)^n$ 展开后各项的系数一行一行排起来：

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

每一行两端是 1，中间的每个数等于它“肩上”两个数的和。为什么？$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$，右边展开时，a^2b^2 这一项有两个来源：$(a+b)^3$ 里的 $3a^2b$ 乘 b，和 $3ab^2$ 乘 a。所以 a^2b^2 的系数是 $3+3=6$，正好是上一行相邻两个数的和。于是

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

这张表在南宋数学家杨辉的《详解九章算法》里就有记载，杨辉注明它出自更早的贾宪，所以叫杨辉三角，也叫贾宪三角。

易错点

- **幂的法则混用。** $a^3 \cdot a^2 = a^5$（指数相加），$(a^3)^2 = a^6$（指数相乘）。回到定义数一数有几个 a，就不会混。
- **把加法当乘法。** $a^3 + a^2$ 不能合并，更不是 a^5；$a^3 + a^3 = 2a^3$，不是 a^6。同底数幂相乘的法则只管乘法，加法只能合并同类项。
- **积的乘方漏乘。** $(ab)^3 = a^3b^3$，不是 ab^3；$(-2a)^2 = 4a^2$，不是 $-4a^2$，也不是 $-2a^2$。积里的每个因式都要乘方，包括系数和它的符号。
- **完全平方漏了中间项。** $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$。图上一眼就能看出：正方形里除了 a^2、b^2，还有两块 ab。取 $a = b = 1$ 也能看出，$(1+1)^2 = 4$，而 $1^2 + 1^2 = 2$。
- **不是平方差硬用平方差公式。** 用平方差公式，两个因式里要有一项完全相同、另一项互为相反数。$(-a+b)(-a-b) = (-a)^2 - b^2 = a^2 - b^2$ 可以用；$(a+b)(-a-b) = -(a+b)^2$，两项都互为相反数，不是平方差。
- **多项式除以单项式漏掉 1。** $(2x^2 + x) \div x = 2x + 1$，$x \div x = 1$ 不能丢。
- **忘了 $a^0 = 1$ 的条件。** $(x-2)^0 = 1$ 要求 $x \neq 2$。

联系

- **整式的加减：** 单项式乘多项式、多项式乘多项式，是分配律的连续使用；乘完的最后一步总是合并同类项。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。
- **因式分解：** 把乘法公式和 $(x+p)(x+q)$ 的展开式倒过来读，就是因式分解。见第三部分“因式分解”（第 69 页）。
- **分式：** 同底数幂相除要求 $m > n$；$m < n$ 时会出现负整数指数幂，那里把幂的运算推广到全部整数指数。见第三部分“分式”（第 74 页）。
- **怎样证明：** 用乘法公式做代数推理，比如两个连续奇数的平方差：$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$，总是 8 的倍数。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。
- **勾股定理：** 拼图证明勾股定理，用的就是完全平方公式的面积图。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **一元二次方程：** 配方法就是凑出完全平方公式 $a^2 + 2ab + b^2$ 的样子，几何上是把图形补成正方形。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **二次函数：** 顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 展开就是一般式，用的是完全平方公式。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。

真题： 2026 年第 7 题（第 357 页）、2025 年第 16 题（第 373 页）、2024 年第 7 题（第 383 页）、2022 年第 4 题（第 409 页）、2022 年第 8 题（第 410 页）。

因式分解 ★

> 对应人教版八年级上册第十七章。

把一个多项式化成几个整式的积，叫因式分解；它是整式乘法倒过来做。

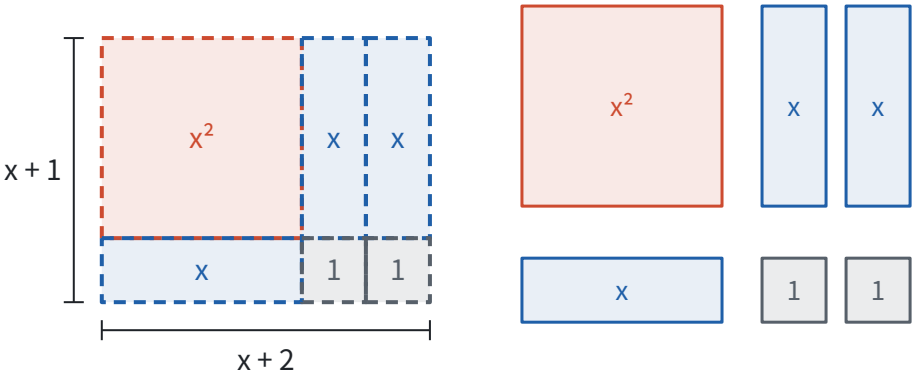
从哪里来

整式乘法把积变成和：$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$。同一个等式从右往左读，就是把和变成积：

方向	从	到	例子
整式乘法	积	和	$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$
因式分解	和	积	$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

这和把整数分解质因数是一回事：$12=2\times2\times3$ 是把一个数写成几个数的积，因式分解是把一个多项式写成几个整式的积。

在图上，乘法是“知道长方形的两边，求面积”；因式分解是反过来：**手里有一些面积块，把它们拼成一个长方形，找出两边。** x^2+3x+2 是一个 $x\times x$ 的正方形、三个 $x\times1$ 的长条和两个 1×1 的小正方形。它们能拼成一个长方形，两边分别是 $x+2$ 和 $x+1$：



所以 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$。

为什么要把和化成积？因为积有和没有的好处：

- **积为 0，至少有一个因式为 0。** 解方程 $x^2+3x+2=0$，化成 $(x+1)(x+2)=0$，就得到 $x+1=0$ 或 $x+2=0$，即 $x=-1$ 或 $x=-2$（见第四部分“一元二次方程”（第 104 页））。
- **积可以约分。** 分式的分子、分母都化成积，公因式才看得出来，才能约掉（见第三部分“分式”（第 74 页））。
- **积好算。** $99^2-1=(99+1)(99-1)=100\times98=9800$。

提公因式法

如果多项式的每一项都含有同一个因式 m，用分配律倒过来，就能把 m 提到括号外面：

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

各项都含有的因式叫**公因式**。找公因式分三部分：

- **系数：** 取各项系数的最大公约数；
- **字母：** 取各项都含有的字母；
- **指数：** 每个字母取各项中最低的次数。

这样找出的公因式“最大”，提出来以后，括号里的各项就没有公因式了。

例 1 分解因式：$6x^3y-9x^2y^2+3x^2y$。

思路： 系数 6、−9、3 的最大公约数是 3；三项都含 x 和 y，x 的最低次数是 2，y 的最低次数是 1。公因式是 $3x^2y$。再用每一项除以公因式，得到括号里的各项。

解：

$$6x^3y-9x^2y^2+3x^2y=3x^2y(2x-3y+1).$$

检验： 用乘法展开 $3x^2y(2x-3y+1)$，得到原式。最后一项 $3x^2y\div 3x^2y=1$，这个 1 不能丢，丢了之后项数就少了一项。

例 2　分解因式：$a(x-y)-b(y-x)$。

思路： 公因式可以是一个多项式。$x-y$ 和 $y-x$ 互为相反数，$y-x=-(x-y)$，先把它们统一成同一个式子。

解：

$$a(x-y)-b(y-x)=a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b).$$

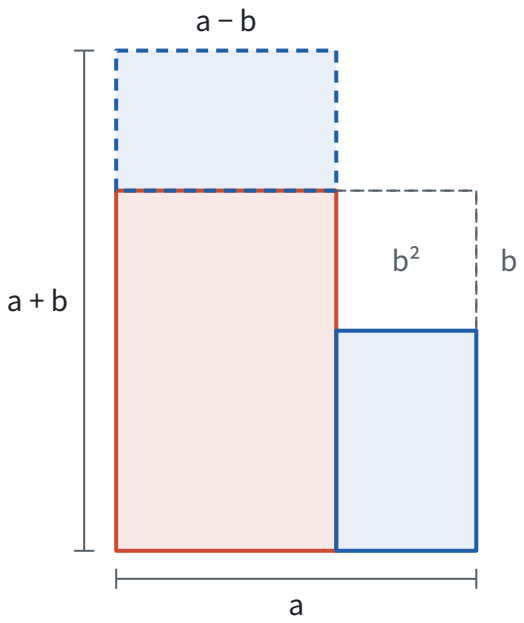
公式法

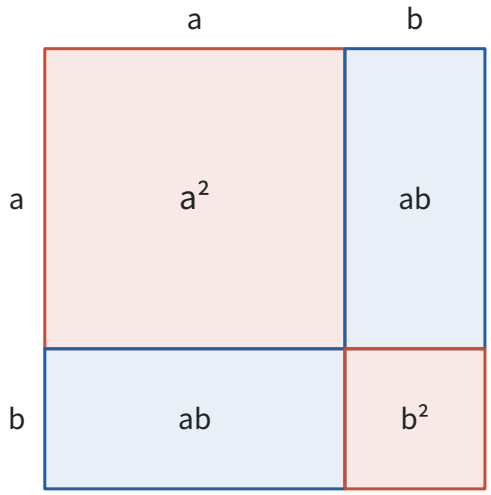
把乘法公式倒过来写，就得到两种分解的方法：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

面积图也倒过来看：挖去一角的正方形拼成长方形，四块拼成一个大正方形。下面是验证这两个公式时用过的两张图（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））：





用公式之前，先看多项式的样子对不对得上：

公式	项数	特征
平方差	两项	两项都能写成某个式子的平方，符号相反
完全平方	三项	两项能写成平方且同号，另一项是这两个式子的积的 2 倍（符号可正可负）

例 3 分解因式：$4x^2-9$。

思路： 两项，$4x^2=(2x)^2$，$9=3^2$，中间是减号，是平方差，公式里的 a 是 $2x$，b 是 3。

解：

$$4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x+3)(2x-3).$$

例 4 分解因式：（1）x^2-6x+9；（2）$-x^2+4xy-4y^2$。

思路： （1）三项，x^2 和 $9=3^2$ 是平方，中间项 $-6x=-2\cdot x\cdot 3$，是差的平方。（2）两个平方项都带负号，先提出 -1，括号里就是完全平方。

解：

$$x^2-6x+9=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=(x-3)^2,$$
$$-x^2+4xy-4y^2=-(x^2-4xy+4y^2)=-(x-2y)^2.$$

分解要彻底

因式分解要分解到每一个因式都不能再分解为止，就像分解质因数要分到每个因数都是质数。

例 5 分解因式：$2x^3-8x$。

思路： $2x^3-8x$ 本身不是平方差，$2x^3$ 不是一个整式的平方，直接套公式行不通。先看各项有没有公因式：有 $2x$。提出来以后，括号里剩 x^2-4，这才是平方差。

解：

$$2x^3-8x=2x(x^2-4)=2x(x+2)(x-2).$$

想一想： 如果只写到 $2x(x^2-4)$ 就停下，也是“化成了积”，但 x^2-4 还能再分，分解就不彻底。再看

x^4-16：

$$x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2).$$

x^2+4 是平方和，不能再分解（在有理数范围内）。

从这两个例子能看出思考的顺序，每一步都有它的道理：

1. **先看有没有公因式。** 提公因式后，括号里的式子更简单，也更容易看出公式的样子。
2. **再看项数和形式，能不能用公式。** 两项想平方差，三项想完全平方。
3. **最后检查每个因式还能不能再分。**

十字相乘（拓展）

由整式乘法里的展开式（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））

$$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$$

倒过来读：要分解 x^2+bx+c，只要找两个数 p、q，使 $p+q=b$，$pq=c$。开头拼长方形的例子 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，就是 $p=1$、$q=2$。

例 6　分解因式：（1）x^2-5x+6；（2）x^2+x-12。

思路： 先从乘积入手找 p、q，因为乘积的可能比较少，再用和去挑。

解：（1）$pq=6$，$p+q=-5$。积为正，两数同号；和为负，两数都是负数。-2 和 -3 符合。

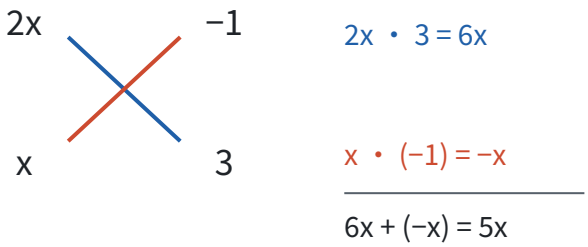
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

（2）$pq=-12$，$p+q=1$。积为负，两数异号；和为正，正数的绝对值较大。4 和 -3 符合。

$$x^2+x-12=(x+4)(x-3).$$

二次项系数不是 1 时，要同时拆二次项系数和常数项。比如 $2x^2+5x-3$：把 $2x^2$ 拆成 $2x\cdot x$，把 -3 拆成 $(-1)\times 3$，交叉相乘再相加，看能不能得到一次项 $5x$：

横着读：2x − 1 和 x + 3 是两个因式



$2x\cdot 3+x\cdot(-1)=6x-x=5x$，正好是一次项，所以

$$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3).$$

交叉相乘就是在检验：$(2x-1)(x+3)$ 展开时，一次项正是由“外项乘外项”$2x\cdot 3$ 和“内项乘内项”$(-1)\cdot x$ 相加得到的。拆法不对，就换一种拆法再试。

易错点

- **分解不彻底。** $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$ 还没完，$x^2-1=(x+1)(x-1)$，应该写成 $(x^2+1)(x+1)(x-1)$。
- **提公因式后漏掉 1。** $3a^2+3a=3a(a+1)$，不是 $3a\cdot a$。提出的公因式和某一项完全相同时，那一项剩下 1。
- **结果不是积。** $x^2+3x-4=x(x+3)-4$ 不是因式分解，整个式子最后一步是减法，还是“和”的形式。正确结果是 $(x+4)(x-1)$。
- **把乘法当成分解。** $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 是整式乘法，方向反了。
- **误用完全平方公式。** x^2+2x+4 不是完全平方，$(x+2)^2=x^2+4x+4$，中间项应该是 $4x$。先检查中间项是不是两个平方的底数的积的 2 倍。
- **平方和当成平方差。** a^2+b^2 不能用平方差公式分解。
- **提负号忘了变号。** $-x^2+4xy-4y^2=-(x^2-4xy+4y^2)$，括号里的每一项都要变号，道理和去括号一样。

联系

- **整式的乘法：** 每一种分解方法，都是一个乘法等式倒过来读；分解完可以乘回去检验。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **一元二次方程：** 因式分解法解方程，靠的是“两个数的积为 0，至少有一个为 0”。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **分式：** 约分和通分之前，先把分子、分母因式分解。见第三部分“分式”（第 74 页）。
- **二次函数：** $y=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，图象和 x 轴交于 $(2,0)$ 和 $(3,0)$，因式里直接看出交点。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。

真题： 2025 年第 7 题（第 370 页）、2024 年第 16 题（第 387 页）、2022 年第 16 题（第 414 页）。

分式 ★

> 对应人教版八年级上册第十八章。

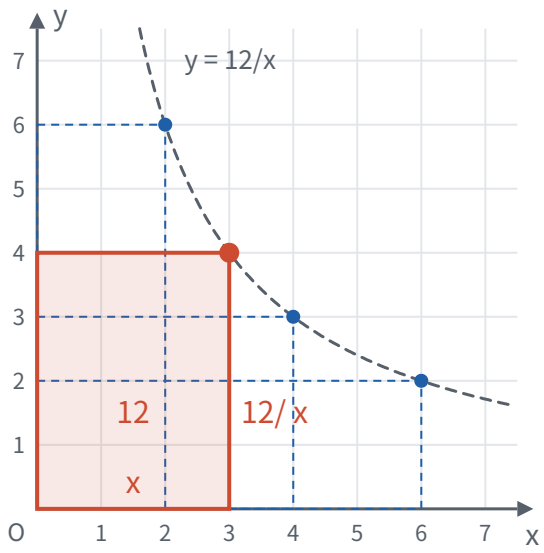
一般地，A、B 是整式，B 中含有字母，式子 A/B 叫分式；分式是字母版的分数，它的性质和运算法则都和分数一样。

从哪里来

两个整数相除，结果常常不是整数，于是有了分数。两个整式相除也一样，结果常常不是整式：

- 面积为 12 的长方形，一边长 x，另一边长 $12/x$；
- 走 m 千米用了 t 小时，平均速度是 m/t 千米/时；
- 一项工程，甲单独做要 a 天完成，甲每天完成全部工程的 $1/a$。

以第一个为例，面积固定是 12，一边 x 变长，另一边 $12/x$ 就变短：



这些式子的分母里有字母，它们不是整式，叫**分式**。分母里含字母是分式和整式的分界：$x/3$ 是整式（就是 $(1/3)x$），$3/x$ 是分式。

分式的分母代表除数，除数不能为 0，所以：

- **分式有意义：** 分母 $B \neq 0$；
- **分式的值为 0：** 分子 $A = 0$，**并且**分母 $B \neq 0$。

例 1　对于分式 $(x^2-1)/(x+1)$：（1）x 取什么值时它有意义？（2）x 取什么值时它的值为 0？

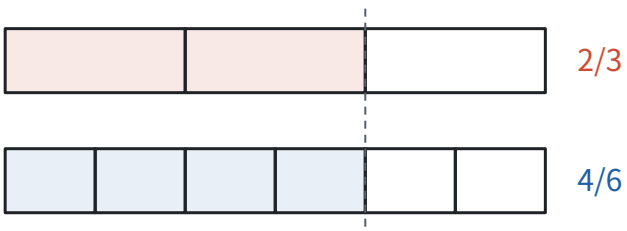
思路： （1）只看分母。（2）分子为 0 只是必要的，还要保证这时分式有意义。

解： （1）由 $x+1 \neq 0$，得 $x \neq -1$，所以 $x \neq -1$ 时分式有意义。

（2）由 $x^2-1=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$。但 $x=-1$ 时分母为 0，分式没有意义，应舍去。所以 $x=1$ 时分式的值为 0。

分式的基本性质

分数有基本性质：分子、分母同乘（或除以）同一个不为 0 的数，分数的值不变。比如 $2/3 = 4/6$：



把每一份再平分成两份，份数和取的份数都变成原来的 2 倍，取出的长度不变。

分式里的字母代表数，所以分式也有同样的性质：**分式的分子与分母乘（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变。**

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\qquad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}\qquad (C\neq 0).$$

$C \neq 0$ 这个条件不能少：乘 0 后分母变成 0，式子就没有意义了。

分子、分母和分式本身，三处的符号改变其中两处，分式的值不变：

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

第一个等式是基本性质的特例：分子、分母同乘 -1。第二个等式里，$(-a)/b$ 就是 $(-a) \div b$，由有理数除法的符号法则，它等于 $-(a \div b)$，也就是 $-a/b$；再把 $(-a)/b$ 的分子、分母同乘 -1，就得到 $a/(-b)$。

约分和通分

基本性质的两个用处，和分数完全一样。

约分： 约去分子、分母的公因式。分子、分母是多项式时，要**先因式分解**，公因式才能看出来（见第三部分“因式分解”（第 69 页））。约分后分子、分母没有公因式的分式，叫最简分式。

例 2 约分：$(x^2-4)/(x^2+4x+4)$。

思路： 分子是平方差，分母是完全平方，分解后找公因式。

解：

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}.$$

通分： 把几个异分母的分式化成同分母的分式。分母取**最简公分母**：把各分母因式分解，取每个因式的最高次幂，乘在一起。这就是分数里求最小公倍数的做法。

例 3 通分：$1/(x^2-x)$ 与 $1/(x^2-1)$。

解： 两个分母分解为 $x^2-x=x(x-1)$，$x^2-1=(x+1)(x-1)$。因式 x、$x-1$、$x+1$ 都要有，最简公分母是 $x(x+1)(x-1)$。

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}, \qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{x}{x(x+1)(x-1)}.$$

分式的运算

法则都和分数相同：

运算	法则
乘法	分子乘分子，分母乘分母：$a/b \cdot c/d = ac/(bd)$
除法	乘除式的倒数：$a/b \div c/d = a/b \cdot d/c$
乘方	分子、分母分别乘方：$(a/b)^n = a^n/(b^n)$
同分母加减	分母不变，分子相加减：$a/c \pm b/c = (a \pm b)/c$
异分母加减	先通分，变成同分母再加减

乘除的结果、加减的结果，都要约分化成最简分式或整式。

例 4 计算：$(x^2-1)/(x^2+2x) \div (x-1)/x$。

思路： 除法变乘法，分子、分母先因式分解，能约的先约掉，再乘，比先乘出来再约省事。

解：

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}.$$

例 5 计算：$2/(x^2-1)-1/(x-1)$。

思路： 分母不同，先通分。最简公分母是 $(x+1)(x-1)$，第二个分式的分子、分母都要乘 $x+1$。

解：

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}&=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{2-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1-x}{(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

减去的分子 $x+1$ 是一个整体，要加括号。最后一步用了 $1-x=-(x-1)$。

例 6 先化简，再求值：

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{x^2-1},\quad \text{其中 } x=3.$$

思路： 括号里是整式减分式，把 1 看成 $(x+1)/(x+1)$ 再通分；然后除法变乘法。

解：

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{x^2-1}&=\frac{x+1-1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}\\&=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=x-1.\end{aligned}$$

当 $x=3$ 时，原式 $=3-1=2$。

想一想： 直接代入也能算：$1-1/4=3/4$，$3/(3^2-1)=3/8$，$3/4\div3/8=2$，结果相同。先化简的好处是式子变成了简单的 $x-1$，代入只算一步。

但要注意：化简结果 $x-1$ 对任何 x 都有意义，原式却不是。原式里有分母 $x+1$、x^2-1，还有除式 $x/(x^2-1)$ 不能为 0，所以 x 不能取 -1、1、0。如果题目让你自己选一个 x 的值代入，只能从这三个数以外选。**化简前后的两个式子，只在原式有意义的范围内相等。**

负整数指数幂

同底数幂相除 $a^m\div a^n=a^{m-n}$，原来要求 $m>n$（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。$m<n$ 时会怎样？用分式约分来算：

$$a^2\div a^5=\frac{a^2}{a^5}=\frac{a^2}{a^2\cdot a^3}=\frac{1}{a^3}.$$

如果法则照用，应该得到 $a^{2-5}=a^{-3}$。为了让法则继续成立，规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq0,\ n\text{ 是正整数}).$$

和零指数幂 $a^0=1$（$a\neq0$）一样，这个规定是为了让法则在更大的范围里成立。看 10 的幂，每往右一格，指数减 1，值除以 10，规律一直延续下去：

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001

规定之后，同底数幂相乘、相除，幂的乘方，积的乘方，这些法则对全部整数指数都成立。比如 $a^{-2}\cdot a^5=a^3$，也等于 $1/(a^2)\cdot a^5=a^3$。

用科学记数法表示绝对值小于 1 的数。 大数写成 $a\times 10^n$（见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）），小数就写成 $a\times 10^{-n}$，其中 $1\leqslant |a|<10$。比如

$$0.000036=3.6\div 100000=3.6\times 10^{-5}.$$

为什么指数是 -5？把 0.000036 的小数点向右移 5 位得到 3.6，相当于乘了 10^5；要让数值不变，就得再乘 10^{-5}。小数点要移的位数，正好是第一个不为 0 的数字前面 0 的个数（包括小数点前的那个 0）：3 的前面有 5 个 0，所以指数是 -5。

例 7 （1）1 纳米 $=0.000000001$ 米，用科学记数法表示 7 纳米是多少米；（2）计算 $(2\times 10^{-3})\times(3\times 10^{-5})$；（3）计算 2^{-2} 和 $(-1/2)^{-2}$。

解： （1）$0.000000001=10^{-9}$，所以 7 纳米 $=7\times 10^{-9}$ 米。

（2）$(2\times 10^{-3})\times(3\times 10^{-5})=(2\times 3)\times 10^{-3+(-5)}=6\times 10^{-8}$。

（3）按负整数指数幂的规定，先化成正整数指数幂再算：

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

易错点

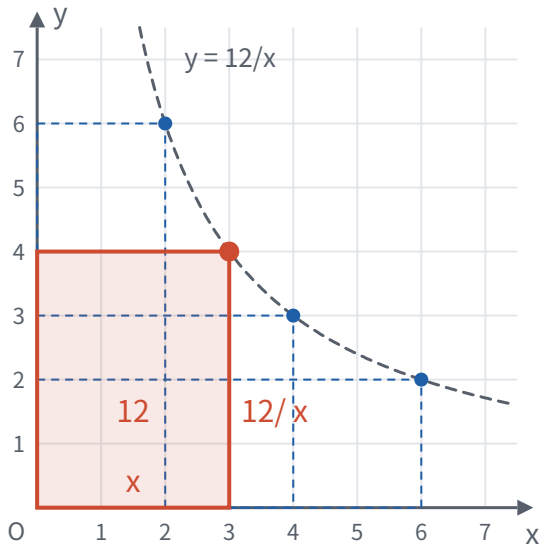
- **约分约的是因式，不是项。** $(x^2+2x)/x=(x(x+2))/x=x+2$ 可以，因为 x 是分子的因式；$(x^2+2)/x$ 不能约，x 只是分子中一项的因式。$(x+2)/(x+4)$ 更不能把 x “约掉”。
- **值为 0 时忘了分母。** 分子为 0 的同时，分母不能为 0，否则分式没有意义，更谈不上值是 0。
- **通分时分子漏乘，或减法漏了括号。** $2/c-(x+1)/c$ 的分子是 $2-(x+1)=1-x$，不是 $2-x+1$。
- **化简求值代入了使原式无意义的数。** 看的是原式，不是化简以后的式子：原式中所有分母、除式都不能为 0。
- **把分式化简当成解方程去分母。** 化简 $1/x+1/2$ 要通分得 $(2+x)/(2x)$，不能两边同乘 $2x$ 变成 $2+x$。“两边同乘”是对等式做的，这里没有等式（见第四部分“分式方程”（第 100 页））。
- **负整数指数幂算错。** $2^{-3}=1/8$，不是 -8，也不是 -6；$3a^{-2}=3/(a^2)$，负指数只作用在 a 上，不是 $1/(3a^2)$。

联系

- **有理数的运算：** 分式的约分、通分、四则运算，和分数一一对应；科学记数法从大数推广到小数。见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。
- **因式分解：** 约分、通分之前，先把分子、分母因式分解。见第三部分“因式分解”（第 69 页）。
- **整式的乘法：** 负整数指数幂把幂的运算法则从正整数指数推广到全部整数指数。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **分式方程：** 分母里含未知数的方程，解的时候两边同乘最简公分母，还要检验分母是否为 0。见第四部

分“分式方程”（第 100 页）。

- **反比例函数：** 面积为 12 的长方形，一边 x 变长，另一边 $12/x$ 就变短；把“从哪里来”那张图再放在下面，长方形右上角的顶点画出的正是 $y=12/x$ 的图象。见第七部分“反比例函数”（第 212 页）。



真题： 2025 年第 7 题（第 370 页）、2024 年第 16 题（第 387 页）、2023 年第 5 题（第 397 页）、2022 年第 16 题（第 414 页）。

二次根式 ★

> 对应人教版八年级下册第十九章。

形如 $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子叫二次根式；它的全部性质都来自一句话：$\sqrt{a}$ 是平方等于 a 的那个非负数。

从哪里来

面积为 2 的正方形，边长是 $\sqrt{2}$；直角边为 1 和 3 的直角三角形，斜边长是 $\sqrt{(1^2+3^2)}=\sqrt{10}$（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。求长度时总会遇到开平方，而且被开方的常常是含字母的式子：直角边为 a 和 b 的直角三角形，斜边是 $\sqrt{(a^2+b^2)}$。

$\sqrt{a}$ 表示 a 的**算术平方根**：平方等于 a 的那个非负数（见第二部分“实数”（第 47 页））。所以，

- **被开方数 $a\geqslant 0$。** 负数没有平方根，$a<0$ 时 $\sqrt{a}$ 没有意义。
- **$\sqrt{a}\geqslant 0$。** 算术平方根本身不是负数。

这两个“非负”是二次根式一切性质的出发点。

例 1　（1）x 取什么值时，$\sqrt{(x-2)}$ 有意义？$1/(\sqrt{(x-2)})$ 呢？（2）已知 $\sqrt{(a-3)}+(b+2)^2=0$，求 $a+b$ 的值。

思路：（1）根号下不能是负数；式子在分母上时，还不能为 0。（2）$\sqrt{(a-3)}\geqslant 0$，$(b+2)^2\geqslant 0$，两个非负数的和为 0，只能每个都是 0。

解：（1）由 $x-2\geqslant 0$，得 $x\geqslant 2$，所以 $x\geqslant 2$ 时 $\sqrt{(x-2)}$ 有意义。$\sqrt{(x-2)}$ 在分母上，还要 $\sqrt{(x-2)}\neq 0$，

所以 $x>2$ 时 $1/(\sqrt{(x-2)})$ 有意义。

（2）由 $\sqrt{(a-3)}=0$，$(b+2)^2=0$，得 $a=3$，$b=-2$，所以 $a+b=1$。

两条基本性质

性质一：

$$(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geq 0).$$

这就是定义本身：$\sqrt{a}$ 是平方等于 a 的数，它的平方当然是 a。

性质二：

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

$\sqrt{a^2}$ 是平方等于 a^2 的**非负**数。平方等于 a^2 的数是 a 和 $-a$（$a=0$ 时两者都是 0），要从中挑出非负的那一个：

- $a\geqslant 0$ 时，挑 a，$\sqrt{a^2}=a$；
- $a<0$ 时，$-a$ 是正数，挑 $-a$，$\sqrt{a^2}=-a$。

这正是绝对值的定义，所以 $\sqrt{a^2}=|a|$。比如 $\sqrt{((-3)^2)}=\sqrt{9}=3$，不是 -3。

两条性质的区别在于运算的顺序：性质一先开方、再平方，a 必须非负；性质二先平方、再开方，a 可以是任何数，结果要取绝对值。

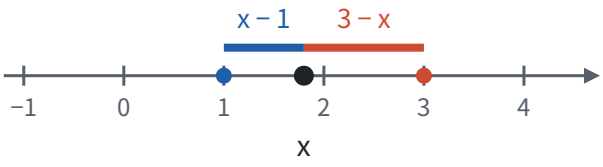
例 2 已知 $1<x<3$，化简 $\sqrt{((x-1)^2)}+\sqrt{((x-3)^2)}$。

思路： 由性质二，两项分别是 $|x-1|$ 和 $|x-3|$。去绝对值要看里面的正负，条件 $1<x<3$ 正是用来判断正负的。

解： 因为 $1<x<3$，所以 $x-1>0$，$x-3<0$。

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x-1|+|x-3|=(x-1)+(3-x)=2.$$

想一想： 结果是一个常数，和 x 无关，为什么？$|x-1|$ 是数轴上点 x 到 1 的距离，$|x-3|$ 是点 x 到 3 的距离（见第二部分“有理数”（第 36 页））。x 在 1 和 3 之间移动时，两段距离一长一短，加起来总是 1 到 3 的距离 2：



如果 $x>3$，两段距离就有重叠，和是 $2x-4$，不再是常数。

乘法和除法

乘法：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \quad (a\geq 0,\ b\geq 0).$$

为什么？看左边 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 这个数：

- 它的平方是 $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$（积的乘方，再用性质一）；
- 它是两个非负数的积，本身也非负。

平方等于 ab 的非负数，就是 $\sqrt{ab}$。

除法： 同样的道理，

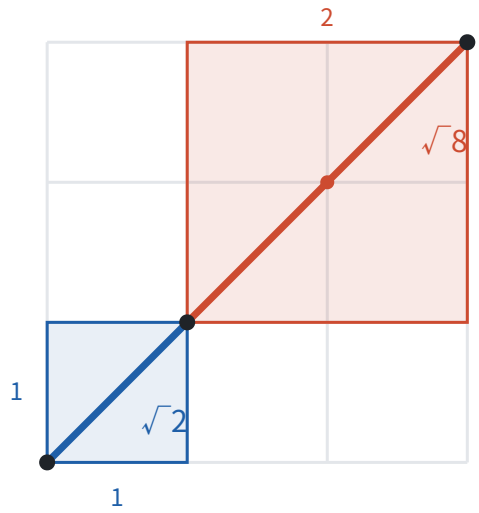
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0).$$

$b>0$ 是因为 $\sqrt{b}$ 在分母上。

化简：把乘法法则倒过来用。 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，被开方数里能开得尽方的因数就能移到根号外面：

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

在方格里也能看出来：$\sqrt{2}$ 是边长为 1 的正方形的对角线，$\sqrt{8}$ 是边长为 2 的正方形的对角线，后者正好由两条前者连成：



化简的目标是**最简二次根式**，满足两个条件：

- 被开方数不含分母；
- 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式。

根号外面可以有分母，但分母里不留根号。去掉分母中根号的做法叫**分母有理化**：分子、分母同乘一个根式，让分母变成平方，比如

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

为什么要统一化成最简形式？就像分数要约成最简分数，写法统一了，才看得出两个根式是不是“同一种”，才能合并和比较。

例 3　化简或计算：（1）$\sqrt{48}$；（2）$\sqrt{(2/3)}$；（3）$\sqrt{12}\times\sqrt{3}$；（4）$\sqrt{24}\div\sqrt{3}$。

思路：（1）找 48 里最大的平方因数 16。（2）被开方数有分母，先用除法法则拆开，再有理化。（3）（4）直接用乘、除法则，把被开方数合在一起算。

解：

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3},$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{36}=6,\qquad \sqrt{24}\div\sqrt{3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

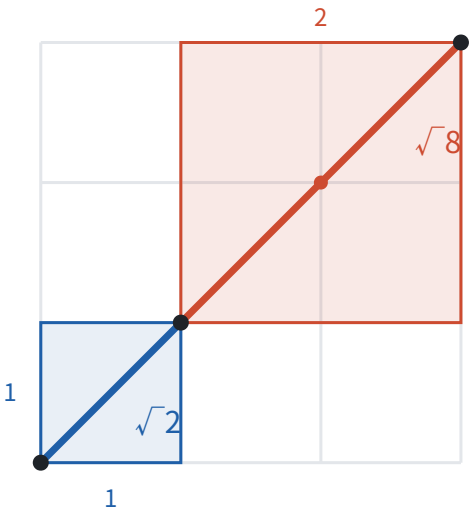
加法和减法

$2\sqrt{3}$ 是“2 个 $\sqrt{3}$”，$5\sqrt{3}$ 是“5 个 $\sqrt{3}$”，用分配律，

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}.$$

这和合并同类项是一回事（见第三部分“整式的加减”（第 59 页））：**化成最简二次根式后，被开方数相同的可以合并**，系数相加，根式不变。被开方数不同就不能合并。

所以做加减之前，先把每个根式化成最简。比如 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$，看起来不能合并，化简后是 $\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$。讲化简时的方格图里，$\sqrt{2}$ 是边长 1 的正方形的对角线，$\sqrt{8}$ 是边长 2 的正方形的对角线，两条接在一起：



合起来就是边长 3 的正方形的对角线：$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$。

例 4 计算：$\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{(1/3)}$。

思路： 三个根式先分别化成最简，再看哪些被开方数相同。

解：

$$\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{\frac{1}{3}}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\left(2-3+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

混合运算

二次根式表示的是实数，实数的运算律照样成立，所以整式里的乘法公式照样能用。

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1,$$

$$(\sqrt{5}-1)^2=(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5}.$$

拓展： 第一个式子说明，分母是 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 时，分子、分母同乘 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$，用平方差公式就能去掉分母里的根号：

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

例 5　已知 $x=\sqrt{3}+1$，求 x^2-2x+3 的值。

解法一：直接代入。

$$\begin{aligned}x^2-2x+3&=(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)+3\\&=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2+3=5.\end{aligned}$$

解法二：先变形再代入。 由 $x=\sqrt{3}+1$，得 $x-1=\sqrt{3}$。所求的式子可以凑成 $(x-1)^2$：

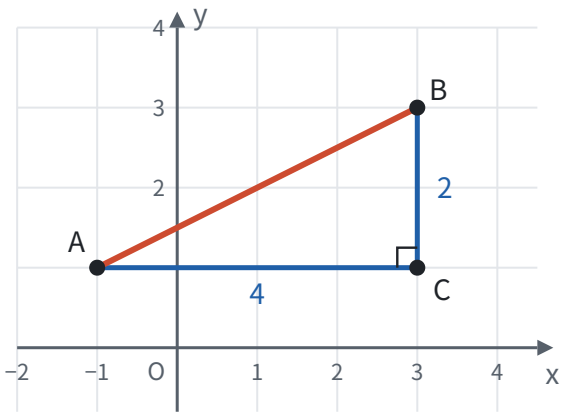
$$x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2=(\sqrt{3})^2+2=5.$$

想一想： 解法一老老实实展开，含 $\sqrt{3}$ 的项最后正好抵消，步骤多、容易算错；解法二看出了 $x-1$ 是个简单的数，把式子往 $x-1$ 上凑，根号一次就消掉了。这是“整体代入”的想法（见第三部分“代数式”（第 54 页）），凑的办法是完全平方公式（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。

两点间的距离

例 6　在平面直角坐标系中，点 $A(-1,1)$，$B(3,3)$，求线段 AB 的长。

思路： AB 是斜的，不能直接数格子。过 A 作水平线、过 B 作竖直线，交于点 $C(3,1)$，就得到以 AB 为斜边的直角三角形，两条直角边的长可以从坐标算出来。



解： $AC=3-(-1)=4$，$BC=3-1=2$。由勾股定理，

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

勾股定理算出的边长常常是二次根式，结果要化成最简。

易错点

- **$\sqrt{a^2}$ 忘了绝对值。** $\sqrt{a^2}=|a|$，只有知道 $a\geqslant 0$ 时才等于 a。$\sqrt{((-3)^2)}=3$；$x<3$ 时 $\sqrt{((x-3)^2)}=3-x$。
- **把根号当成对加法也能拆。** $\sqrt{(4+9)}=\sqrt{13}$，不是 $2+3=5$；$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$：两边平方，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$，比 $(\sqrt{5})^2=5$ 大。乘法法则 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 只对乘法成立。

- **乘法法则忘了条件。** $\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{36}=6$，不能写成 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$，因为负数的平方根没有意义。法则要求 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$。
- **被开方数不同也去合并。** $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ 要先化简成 $\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ 才能合并；$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ 化成最简后被开方数仍不同，不能合并。
- **结果不是最简。** $\sqrt{1/2}$ 被开方数含分母，$1/(\sqrt{2})$ 分母里有根号，都要化成 $\sqrt{2}/2$。
- **有意义的条件没考虑全。** 根号下的式子要 $\geqslant 0$；根式在分母上时，还要 $\neq 0$，即根号下的式子 >0。

联系

- **实数：** $\sqrt{2}$ 是无理数，二次根式的值常常是无理数；估算 $\sqrt{a}$ 的大小，看它夹在哪两个整数之间。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **有理数：** $\sqrt{a^2}=|a|$，绝对值是数轴上到原点的距离。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **整式的加减、整式的乘法：** 合并二次根式就是合并同类项；二次根式的乘法可以用乘法公式。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）和第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **勾股定理：** 由两条直角边求斜边，结果常是二次根式。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **平面直角坐标系：** 两点 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 间的距离是 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，就是例 6 的做法：过两点分别作水平线和竖直线，得到直角三角形，两条直角边是横、纵坐标之差，再用勾股定理求斜边。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **一元二次方程：** 求根公式里有 $\sqrt{b^2-4ac}$，根号下的式子为负时方程没有实数根。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **锐角三角函数：** 特殊角的三角函数值，如 $\sin 60^\circ=\sqrt{3}/2$，都是二次根式。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。

真题： 2025 年第 11 题（第 372 页）、2024 年第 16 题（第 387 页）、2022 年第 4 题（第 409 页）。

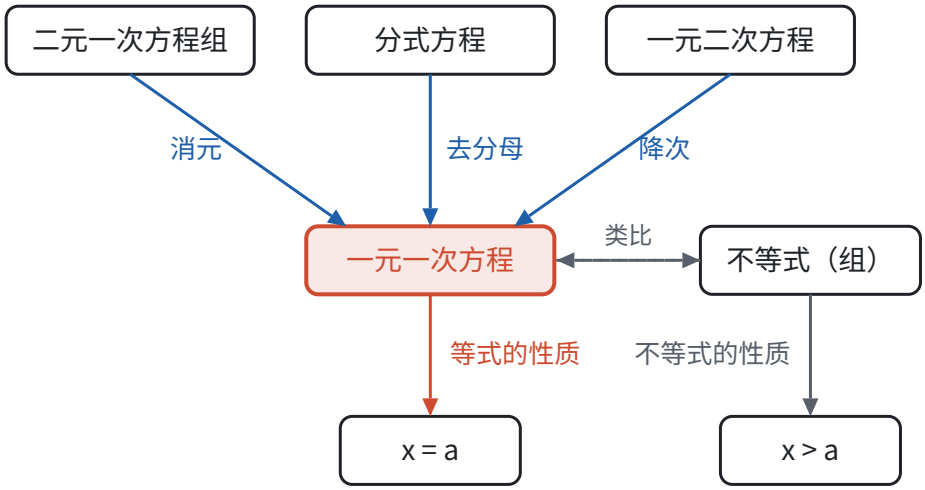
总览：从等式到方程

这一部分的主线是：从实际问题中找出等量关系或不等关系，写成方程或不等式；再依据等式和不等式的性质，把每一种方程都化归为一元一次方程来解。

类型总表

类型	未知数个数	次数	怎样解	解的个数
一元一次方程	1	1	用等式的性质变形成 $x=a$	1 个
二元一次方程组	2	1	消元（代入或加减），化成一元一次方程	通常 1 组；也可能无解或有无数组
一元一次不等式（组）	1	1	用不等式的性质变形成 $x>a$ 或 $x<a$；组要找公共部分	无数个，组成一个范围；不等式组可能无解
分式方程	1	分母含未知数	去分母化成整式方程，再检验	可能出现增根，也可能无解
一元二次方程	1	2	降次（开平方或因式分解），化成两个一元一次方程	由判别式决定：2 个、2 个相等或没有实数根

一条线：都化归为一元一次方程



- **一元一次方程**是起点。它的解法全部来自等式的两条性质：两边加减同一个式子，两边乘除同一个不为 0 的数（见第四部分“一元一次方程”（第 87 页））。
- **二元一次方程组**多了一个未知数，就多要一个方程；消元把两个未知数变成一个（见第四部分“二元一次方程组”（第 91 页））。
- **分式方程**的未知数在分母里，两边乘最简公分母就回到整式方程；因为乘的式子可能为 0，所以要检验（见第四部分“分式方程”（第 100 页））。
- **一元二次方程**的次数高了一次，开平方或因式分解把它拆成两个一次方程（见第四部分“一元二次方

程”（第 104 页））。

- **不等式**和方程对照着学：步骤几乎一样，只有两边乘除负数时不等号要改变方向；解不再是一个数，而是一个范围（见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页））。

遇到一种新方程，先问：它和已经会解的方程差在哪里？怎样把这个差别消掉？这就是化归。

每种方程在图象上的样子

每一种方程和不等式，都能在坐标系里找到对应的图形：

代数的问题	在图象上看
解一元一次方程 $kx+b=0$	直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标
解不等式 $kx+b>0$	直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方的部分对应的 x 的范围
解二元一次方程组	两条直线的交点；平行无解，重合有无数个解
解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$	抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标
判别式的正负	抛物线与 x 轴有两个、一个或没有交点

这些对应关系要到学了函数才完整（见第七部分“一次函数”（第 206 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）），这一部分先从数轴开始：不等式的解集画在数轴上，二元一次方程的解画成直线。

列方程解实际问题

不管列的是哪种方程，过程都一样：

1. 读题，找出等量关系（或不等关系）：通常是**同一个量的两种表示**；
2. 设未知数，用含未知数的式子表示其他有关的量；
3. 列出方程（组）或不等式（组）；
4. 解；
5. 检验：是不是方程的解（分式方程要查增根），是否符合实际（正数、整数、范围）；
6. 作答。

设哪个量为未知数，会影响列出的方程的类型：同一道工程题，设天数得到分式方程，设每天的工作量得到一元一次方程。多种情境的建模方法见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

学习顺序

按页面顺序学：

1. **一元一次方程：** 打好等式的性质和解方程步骤的基础；
2. **二元一次方程组：** 学会消元；
3. **不等式与不等式组：** 对照方程学，重点是不等号的方向和数轴表示；
4. **分式方程：** 学完第三部分“分式”（第 74 页）后再学，重点是增根；
5. **一元二次方程：** 学完第三部分“整式的乘法”（第 62 页）和第三部分“因式分解”（第 69 页）、第二部分“实

数”（第 47 页）中的平方根后再学，和第七部分“二次函数”（第 218 页）对照着看。

一元一次方程

> 对应人教版七年级上册第五章。

方程是含有未知数的等式；解方程就是依据等式的性质，把方程一步一步变形，直到变成“$x=a$”的样子。 只含一个未知数、未知数的次数是 1 的整式方程叫一元一次方程，它是后面所有方程的落脚点。

从哪里来：从“倒着算”到“顺着列”

“一个数的 3 倍减去 7，得 20，这个数是多少？”用算术做，要倒着想：最后得 20，减 7 之前是 $20+7=27$，乘 3 之前是 $27\div 3=9$。每一步都要把题目里的运算反过来。

用方程做，只要顺着题意把关系写下来：设这个数是 x，那么 $3x-7=20$。怎样从这个式子求出 x，是另一件事，而且有固定的办法。

题目再绕一点，差别就明显了：“一个数的 3 倍减去 7，等于它的 2 倍加上 5。”未知的数同时出现在两边，已经没法倒着算；列方程却一样容易：$3x-7=2x+5$，解得 $x=12$。

方程把“怎样求”和“关系是什么”分开了： 列方程时只管把等量关系如实写下来，解方程时只管按规则变形。

几个基本概念：

- **方程：** 含有未知数的等式。
- **方程的解：** 使方程左右两边的值相等的未知数的值。$x=12$ 是 $3x-7=2x+5$ 的解，因为两边都等于 29。
- **解方程：** 求方程的解的过程。
- **一元一次方程：** 只含有一个未知数（元），未知数的次数都是 1，等号两边都是整式。它总能整理成 $ax+b=0$（$a\neq 0$）的形式。

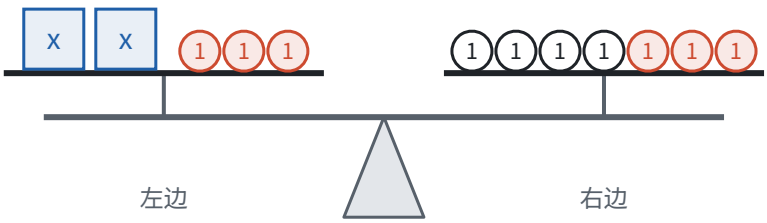
方程	是不是一元一次方程	原因
$2x+1=5$	是	一个未知数，次数是 1
$x+y=3$	不是	两个未知数，是二元一次方程
$x^2=4$	不是	未知数的次数是 2
$1/x=2$	不是	分母里有未知数，左边不是整式，是分式方程
$3+2=5$	不是	没有未知数，只是等式，不是方程

等式的性质：天平模型

等式就像一架平衡的天平：左盘放等号左边的量，右盘放等号右边的量。要让天平保持平衡，只能对两边做同样的事：

- **等式的性质 1：** 等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等。如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$。
- **等式的性质 2：** 等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等。如果 $a=b$，那么 $ac=bc$；如果 $a=b$，$c\neq 0$，那么 $a/c=b/c$。

下图的天平表示 $2x+3=7$。两边同时拿走 3 个 1（图中红色的 1，性质 1），天平仍平衡，得 $2x=4$；再把两边都平均分成 2 份，各取一份（性质 2），得 $x=2$。



为什么除数不能是 0？因为除以 0 没有意义。两边乘 0 虽然还是等式，但变成了 $0=0$，原来的信息全丢了，所以解方程时从来不乘 0。这一点到了分式方程会变得很要紧：两边乘一个含未知数的式子时，这个式子可能恰好等于 0（见第四部分“分式方程”（第 100 页））。

另外，等式还可以左右交换（$a=b$ 就是 $b=a$），相等的量可以互相替换（$a=b$，$b=c$，那么 $a=c$）。后一条叫**等量代换**，解方程组时的“代入”靠的就是它。

解方程：每一步都有依据

解一元一次方程，目标是把方程变成 $x=a$。通常经过下面几步，每一步都是等式的性质或运算律，不是新规定：

步骤	做法	依据	注意
去分母	两边乘各分母的最小公倍数	等式的性质 2	不含分母的项也要乘；分子是多项式时要加括号
去括号	用乘法分配律展开	乘法分配律	括号前是负号，括号里各项都要变号
移项	含未知数的项移到一边，常数项移到另一边	等式的性质 1	移过去的项要变号
合并同类项	整理成 $ax=b$	乘法分配律	只把系数相加
系数化为 1	两边除以 a	等式的性质 2	$a\neq 0$；是 b 除以 a，不要颠倒

移项为什么要变号？ 以 $3x-7=2x+5$ 为例，两边同时减 $2x$、再同时加 7（性质 1），得 $3x-2x=5+7$。结果看起来就像把 $2x$ 从右边“搬”到左边变成 $-2x$，把 -7 从左边“搬”到右边变成 $+7$。移项只是性质 1 的简便写法。

这几步不是非走不可的固定程序。比如 $3(x-2)=6$，先两边除以 3 得 $x-2=2$，比先去括号更快。每一步想清楚依据，顺序就可以灵活安排。

例 1　解方程 $(x+1)/2-(2x-1)/3=1$。

思路： 有分母，先去分母。分母 2 和 3 的最小公倍数是 6，两边同乘 6。右边的 1 也要乘；$2x-1$ 是一个整体，乘完要带着括号。

解：

$$
\begin{aligned}
3(x+1)-2(2x-1)&=6 && \text{去分母}\\
3x+3-4x+2&=6 && \text{去括号}\\
3x-4x&=6-3-2 && \text{移项}\\
-x&=1 && \text{合并同类项}\\
x&=-1 && \text{系数化为 }1
\end{aligned}
$$

检验： 把 $x=-1$ 代入原方程，左边 $=0/2-(-3)/3=0+1=1$，等于右边，所以 $x=-1$ 是原方程的解。

列方程解实际问题：找等量关系

列方程的关键，是找到**同一个量的两种表示**：一边用题目给的数表示，另一边用含未知数的式子表示，两者相等就是方程。一般的过程是：

1. 读题，找出等量关系；
2. 设未知数，用含未知数的式子表示有关的量；
3. 根据等量关系列出方程；
4. 解方程；
5. 检验：既要检验是不是方程的解，也要检验是否符合实际；
6. 写出答案。

例 2　某商品按成本价提高 40% 标价，再打八折出售，每件仍获利 12 元。每件商品的成本是多少元？

思路： 涉及的量有成本、标价、售价、利润。利润是“售价 − 成本”，这就是等量关系。成本不知道，设它为 x 元，其余的量都能用 x 表示：标价是 $(1+40\%)x=1.4x$，打八折后售价是 $1.4x\times 0.8=1.12x$。

解： 设每件商品的成本是 x 元。根据“售价 − 成本 = 利润”，得

$$1.12x-x=12.$$

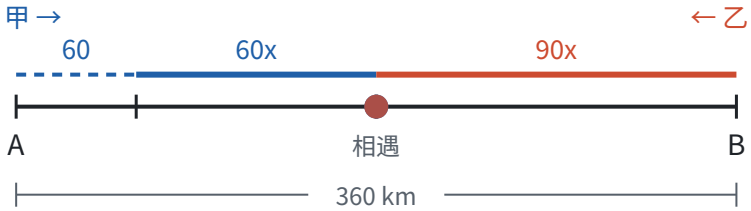
合并同类项，得 $0.12x=12$，所以 $x=100$。

检验： 成本 100 元，标价 140 元，售价 $140\times 0.8=112$ 元，获利 12 元，符合题意。

答：每件商品的成本是 100 元。

例 3　A、B 两地相距 360 km。甲车从 A 地开往 B 地，每小时行 60 km；甲车出发 1 h 后，乙车从 B 地开往 A 地，每小时行 90 km。乙车出发后多少小时两车相遇？

思路： 行程问题先画线段图，把两车走过的路程标在同一条线段上：



从图上看，等量关系是“甲走的路程 + 乙走的路程 = 全程”。设乙车出发后 x h 两车相遇，甲车比乙车多走 1 h，行驶了 $(x+1)$ h。

解： 设乙车出发后 x h 两车相遇。根据题意，得

$$60(x+1)+90x=360.$$

去括号，得 $60x+60+90x=360$；移项、合并同类项，得 $150x=300$，所以 $x=2$。

检验： 甲车行驶 3 h，走了 180 km；乙车行驶 2 h，走了 180 km；合起来 360 km，符合题意。

答：乙车出发后 2 h 两车相遇。

想一想： 未知数不一定设成题目问的量。也可以设相遇点离 A 地 y km，这时甲车用了 $y/60$ h，乙车用了 $(360-y)/90$ h。甲车比乙车多用 1 h，得

$$\frac{y}{60}-\frac{360-y}{90}=1.$$

两边乘 180，得 $3y-2(360-y)=180$，解得 $y=180$，再算出乙车用时 $180\div 90=2$ h，答案相同。

比较	设乙车的行驶时间为 x h	设相遇点离 A 地 y km
等量关系	路程之和 = 全程	甲的用时 − 乙的用时 = 1 h
方程	没有分母，一步到位	有分母，解完还要再算一步
什么时候用	问什么设什么，通常最直接	问的量不好表示、而另一个量能把关系说清时

同一个情境可以列出不同的方程，因为它们表达的是同一组数量关系，只是选了不同的量做未知数。先想清楚“哪个量用两种方式表示”，再决定设什么。

易错点

- **去分母时漏乘不含分母的项。** 解 $x/2-1=x/3$，两边乘 6 应得 $3x-6=2x$，不是 $3x-1=2x$。等式的性质 2 要求两边的**每一项**都乘 6。
- **分子是多项式，去分母后不加括号。** $-(2x-1)/3$ 乘 6 得 $-2(2x-1)=-4x+2$，不是 $-4x-1$。分数线本身就起括号的作用。
- **移项不变号。** 移项是两边同时加上或减去同一个式子，项从一边到另一边，符号一定改变；只在同一边交换位置的项，符号不变。
- **系数化为 1 时除反了。** $2x=3$ 的解是 $x=3/2$，不是 $2/3$；$-x=1$ 的解是 $x=-1$。
- **把分数的基本性质和等式的性质混在一起。** 解 $x/0.2-(x-1)/0.5=1$ 时，把 $x/0.2$ 化成 $5x$、把 $(x-1)/0.5$ 化成 $2(x-1)$，用的是分数的基本性质（分子、分母同乘一个数），只改变这一项的写法，右边的 1 不动，得 $5x-2(x-1)=1$。如果把右边也乘了 5 或 2，就错了。
- **实际问题只解不验。** 人数、件数要是正整数，时间、路程不能是负数。解出的结果不合实际，要么题目无解，要么方程列错了。

联系

- **一次函数：** 解方程 $kx+b=0$，就是找直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标。见第七部分“一次函数”（第

206 页）。

- **二元一次方程组、分式方程、一元二次方程：** 它们的解法最后都化成一元一次方程：方程组靠消元，分式方程靠去分母，一元二次方程靠降次。见第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第四部分“分式方程”（第 100 页）和第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **不等式：** 解一元一次不等式的步骤和解方程几乎一样，只有两边乘或除以负数时不等号要改变方向。见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **整式的加减：** 去括号、合并同类项就是整式加减的运算。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。
- **几何图形初步：** 求线段长、角的度数时，常设一个量为 x，再根据中点、角平分线、余角、补角列方程。见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。
- **方程思想与建模：** 找等量关系、设未知数、列方程，是用数学解决实际问题最基本的方法。见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

真题： 2026 年第 4 题（第 356 页）、2023 年第 21 题（第 404 页）。

二元一次方程组 ★

> 对应人教版七年级下册第十章。

两个未知数，需要两个独立的等量关系才能确定；解方程组的核心是消元：把两个未知数变成一个，化成一元一次方程。 在坐标系里看，每个二元一次方程的解组成一条直线，方程组的解就是两条直线的交点。

从哪里来：一个方程定不住两个数

“笼子里有鸡和兔共 10 只，数一数脚共 32 只。鸡、兔各有几只？”

设鸡有 x 只，兔有 y 只。题目里有两个等量关系：

- 头数：$x+y=10$；
- 脚数：$2x+4y=32$。

像 $x+y=10$ 这样，含有两个未知数、含未知数的项的次数都是 1 的整式方程，叫**二元一次方程**。使方程两边相等的一对值，比如 $x=3$，$y=7$，叫它的一个解，记作

$$\begin{cases} x=3, \\ y=7. \end{cases}$$

只看头数，满足 $x+y=10$ 的数对有很多；只看脚数，满足 $2x+4y=32$ 的数对也有很多。只取自然数，列出来：

满足的方程	解 (x,y)
$x+y=10$	$(0,10)$，$(1,9)$，$(2,8)$，$(3,7)$，**$(4,6)$**，$(5,5)$，$(6,4)$，$\cdots$
$2x+4y=32$	$(0,8)$，$(2,7)$，**$(4,6)$**，$(6,5)$，$(8,4)$，$(10,3)$，$\cdots$

两行里只有 $(4,6)$ 同时出现：鸡 4 只、兔 6 只。

一个二元一次方程有无数个解，两个未知数被“定住”需要两个条件同时成立。 把两个方程合在一起，用大括号连起来，就是**二元一次方程组**：

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+4y=32. \end{cases}$$

两个方程的公共解叫**方程组的解**。

消元：把二元变成一元

一个一个去试太慢。已经会解一元一次方程了，能不能把两个未知数变成一个？这就是**消元**。

其实用一元一次方程也能做开头这道鸡兔同笼题（鸡和兔共 10 只，脚共 32 只）：设鸡有 x 只，那么兔有 $(10-x)$ 只，根据脚数得 $2x+4(10-x)=32$，解得 $x=4$。这里用 $10-x$ 表示兔的只数，就是悄悄用了第一个方程 $y=10-x$。把这一步明明白白写出来，就是代入消元法。

代入消元法： 从一个方程中用一个未知数表示另一个，代入另一个方程。依据是等量代换：y 和 $10-x$ 相等，在另一个方程里就可以用 $10-x$ 替换 y。

加减消元法： 把两个方程的两边分别相加或相减，使某个未知数的系数变成 0。依据是等式的性质：如果 $a=b$，$c=d$，那么 $a+c=b+d$，$a-c=b-d$。某个未知数的系数不相等时，先用等式的性质 2 把方程两边同乘一个数，让它的系数相等或互为相反数。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$$

思路： 第一个方程已经是“用 x 表示 y”的样子，直接代入第二个方程。

解： 把 $y=2x-3$ 代入 $3x+2y=8$，得 $3x+2(2x-3)=8$，即 $7x-6=8$，所以 $x=2$。

把 $x=2$ 代入 $y=2x-3$，得 $y=1$。所以方程组的解是 $x=2$，$y=1$。

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 2x-3y=1. \end{cases}$$

思路： 哪个未知数的系数都不是 1 或 −1，用代入法要先变出 $x=(1+3y)/2$，带着分母算，很麻烦。看系数：y 的系数是 4 和 −3，符号相反。第一个方程乘 3、第二个方程乘 4，y 的系数就变成 12 和 −12，两式相加，y 就消掉了。

解： 第一个方程两边乘 3，第二个方程两边乘 4，得

$$\begin{cases} 9x+12y=30, \\ 8x-12y=4. \end{cases}$$

两式相加，得 $17x=34$，所以 $x=2$。把 $x=2$ 代入 $3x+4y=10$，得 $6+4y=10$，所以 $y=1$。

所以方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

检验： $3\times2+4\times1=10$，$2\times2-3\times1=1$，两个方程都成立。

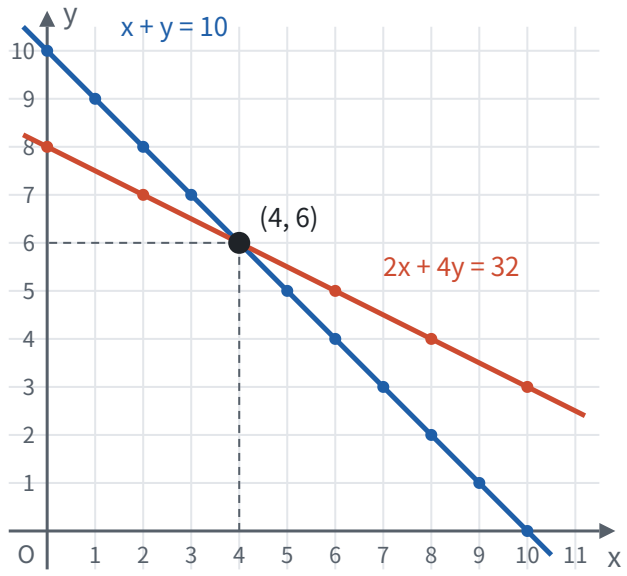
想一想： 两种方法怎么选？

方程组的样子	更方便的方法	原因
有一个方程已经是 $y=\cdots$ 或 $x=\cdots$，或者某个未知数的系数是 1、−1	代入消元	不用变形或变形简单，不会出现分母
同一个未知数的系数相等、互为相反数，或者成倍数	加减消元	直接相加减，或乘一次就能消去

两种方法的目标是一样的：让一个未知数消失，剩下一个一元一次方程。

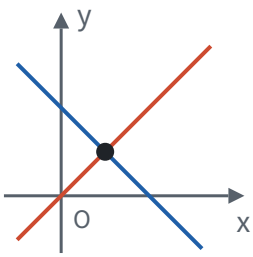
几何意义：两条直线的交点

把 $x+y=10$ 的每一个解 (x, y) 都看成坐标系中的一个点。只取整数时，这些点排成一行；x、y 可以取任意实数时，这些点连成一条直线。原因是 $x+y=10$ 可以写成 $y=-x+10$，这是一次函数，图象是直线（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。同样，$2x+4y=32$ 的解组成直线 $y=-(1/2)x+8$。

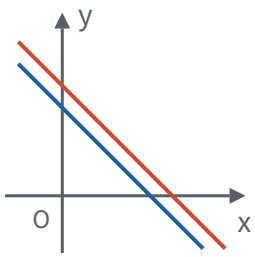


方程组的解要同时满足两个方程，就是**同时在两条直线上的点**，也就是交点 (4, 6)。

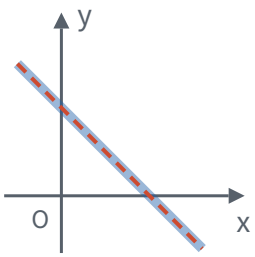
从这个角度看，就明白方程组的解为什么可能有三种情况：



相交：唯一解



平行：无解



重合：无数个解

方程组	消元时发生了什么	两条直线	解的情况
$x+y=2$，$x-y=0$	相加得 $2x=2$，$x=1$，$y=1$	相交	唯一解

方程组	消元时发生了什么	两条直线	解的情况
$x+y=2$，$2x+2y=5$	第一个方程乘 2 得 $2x+2y=4$，和第二个方程矛盾	平行	无解
$x+y=2$，$2x+2y=4$	第一个方程乘 2 就是第二个方程	重合	无数个解

第二行的两个方程互相矛盾：$x+y$ 不可能既等于 2 又等于 2.5。第三行的第二个方程只是第一个方程乘 2，没有提供新条件，等于只有一个方程。所以，“两个方程定住两个未知数”，要求这两个方程**互不矛盾、又不是同一个条件**。

实际问题：两个量，两个关系

题目里有两个不知道的量时，设两个未知数往往更自然：每个等量关系直接写成一个方程，不必先在脑子里消元。

例 3 一艘船顺流航行 48 km 用了 3 h，逆流航行 48 km 用了 4 h。求船在静水中的速度和水流的速度。

思路： 顺流时水推着船走，速度是“船速 + 水速”；逆流时水挡着船，速度是“船速 − 水速”。两个速度都能从路程和时间算出来：顺流速度 $48\div3=16$ km/h，逆流速度 $48\div4=12$ km/h。

解： 设船在静水中的速度为 x km/h，水流速度为 y km/h。根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=16, \\ x-y=12. \end{cases}$$

两式相加，得 $2x=28$，$x=14$；两式相减，得 $2y=4$，$y=2$。

答：船在静水中的速度是 14 km/h，水流速度是 2 km/h。

回顾： 这道题也可以只设一个未知数：设静水速度为 x km/h，则水速是 $(16-x)$ km/h，由逆流得 $x-(16-x)=12$。两种列法用的是同样的两个关系，区别只在于第一个关系是写成方程，还是直接用来表示另一个量。

三元一次方程组（拓展）

三个未知数、三个方程，想法完全一样：**消元**。先消去一个未知数，得到二元一次方程组，再消去一个，得到一元一次方程。

例 4 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x-y+z=2, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$$

思路： 前两个方程相减，x 和 z 同时消掉，直接得到 y。

解： 第一个方程减第二个方程，得 $2y=4$，所以 $y=2$。

把 $y=2$ 代入第一个和第三个方程，得

$$\begin{cases} x+z=4, \\ 2x-z=-1. \end{cases}$$

两式相加，得 $3x=3$，$x=1$，于是 $z=3$。

所以方程组的解是 $x=1$，$y=2$，$z=3$。

易错点

- **两式相减时只改了第一项的符号。** $(8x-12y)-(9x+12y)$ 是 $-x-24y$，减去的方程里**每一项**都要变号，右边的常数也一样。
- **方程乘一个数时漏乘常数项。** $2x-3y=1$ 两边乘 4，得 $8x-12y=4$，右边的 1 也要乘。
- **把变形后的式子代回它自己。** 从鸡兔同笼的第一个方程 $x+y=10$ 得出 $y=10-x$，要代入**第二个**方程 $2x+4y=32$；代回第一个方程只会得到 $10=10$，什么也求不出。
- **只求出一个未知数就停下。** 方程组的解是一对数，求出 x 后要代回去求 y，并写成方程组的形式。
- **列出的两个方程其实是同一个关系。** 两个方程如果只是互相乘了一个倍数，就只提供了一个条件，解不唯一。列方程时要找两个**不同**的等量关系。

联系

- **一次函数：** 每个二元一次方程的图象是一条直线，方程组的解就是两条直线的交点；平行无解，重合有无数个解。用两点求一次函数解析式的待定系数法，要解的正是二元一次方程组。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **一元一次方程：** 消元的目的就是化成一元一次方程；用一个未知数列方程时，“用 x 表示另一个量”其实就是代入。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。
- **平面直角坐标系：** 方程的一个解 (x, y) 就是坐标系里的一个点。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **一元二次方程：** 求直线和抛物线的交点，消元后得到的是一元二次方程。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **方程思想与建模：** 题目里有几个未知量，就去找几个互不相同的等量关系。见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

真题： 2026 年第 18 题（第 361 页）、2025 年第 20 题（第 376 页）、2024 年第 21 题（第 392 页）、2023 年第 12 题（第 399 页）。

不等式与不等式组 ★

> 对应人教版七年级下册第十一章。

不等式描述“谁大谁小”；解一元一次不等式和解一元一次方程的步骤几乎一样，唯一的区别是：两边乘或除以同一个负数时，不等号要改变方向。 不等式的解通常有无数个，合起来是一个范围，画在数轴上是一条射线或一段线段。

从哪里来：不等关系

生活中很多要求不是“正好等于”，而是“不能超过”“至少要有”：

- 一座桥限重 20 t，车和货的总质量 m（t）要满足 $m \leqslant 20$；

- 考试 60 分及格，及格的分数 x 满足 $x \geqslant 60$；
- 一个数的 2 倍加 3 大于 7，写成 $2x+3>7$。

用 $<$、$>$、$\leqslant$、$\geqslant$、$\neq$ 表示大小关系的式子叫**不等式**。和方程对照：

概念	方程	不等式
解	使等式成立的未知数的值	使不等式成立的未知数的值
解的个数	一元一次方程只有一个解	通常有无数个解
全部的解	就是那一个值，如 $x=2$	叫**解集**，是一个范围，如 $x>2$
解方程 / 解不等式	求出那个解	求出解集

比如 $2x+3>7$，$x=3$、$x=2.5$、$x=100$ 都是它的解，所有的解合起来是 $x>2$。

只含一个未知数、未知数的次数是 1、不等号两边都是整式的不等式，叫**一元一次不等式**。

不等式的性质：从“差的正负”推出来

在数轴上，右边的点表示的数总比左边的大。$a>b$，就是 a 在 b 的右边，也就是 $a-b$ 是正数。所以：

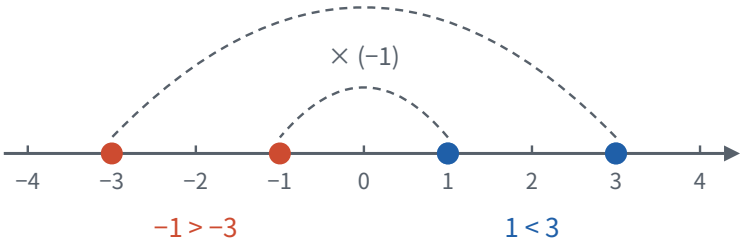
$$a>b \iff a-b>0.$$

有了这一条，不等式的性质都能推出来：

- **性质 1：** 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变。理由：$(a+c)-(b+c)=a-b$，差没变，正负当然不变。
- **性质 2：** 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。理由：如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac-bc=(a-b)c$，正数乘正数是正数，所以 $ac>bc$。
- **性质 3：** 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。理由：如果 $a>b$，$c<0$，那么 $(a-b)c$ 是正数乘负数，是负数，所以 $ac<bc$。

除以一个数等于乘它的倒数，倒数和原数同号，所以除法的情况和乘法一样。

性质 3 在数轴上看得很清楚。乘 −1 就是取相反数，每个点跳到关于原点对称的位置，原来在右边的点跑到了左边，先后顺序整个反过来：$1<3$，但 $-1>-3$。



乘其他负数，比如乘 −2，等于先乘 −1 再乘 2：先把顺序反过来，再按比例拉伸，顺序不再变。所以只要乘的是负数，不等号就要改变方向。

还有一条常用的：如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。在数轴上就是 a 在 b 右边，b 在 c 右边，a 当然在 c 右边。

解一元一次不等式：和解方程对照着做

解一元一次不等式的步骤和解一元一次方程一样，目标是化成 $x > a$ 或 $x < a$ 这样的形式。每一步都对照一下依据：

步骤	解方程的依据	解不等式的依据	要注意什么
去分母	等式的性质 2	性质 2（乘的是正数）	不等号方向不变
去括号	乘法分配律	乘法分配律	和解方程一样
移项	等式的性质 1	性质 1	不等号方向不变
合并同类项	乘法分配律	乘法分配律	和解方程一样
系数化为 1	等式的性质 2	性质 2 或性质 3	**系数是负数时，不等号改变方向**

例 1　解不等式 $(2x-1)/3-(5x+1)/2 \leqslant 1$，并把解集表示在数轴上。

思路： 和解方程一样先去分母，两边乘 6。6 是正数，不等号方向不变。最后一步要看系数的正负。

解：

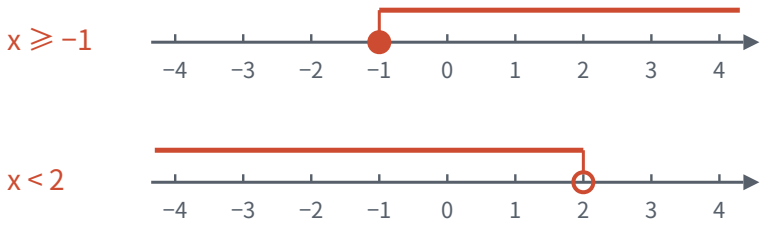
$$
\begin{aligned}
2(2x-1)-3(5x+1) &\leq 6 && \text{去分母}\\
4x-2-15x-3 &\leq 6 && \text{去括号}\\
4x-15x &\leq 6+2+3 && \text{移项}\\
-11x &\leq 11 && \text{合并同类项}\\
x &\geq -1 && \text{两边除以 } -11\text{，不等号改变方向}
\end{aligned}
$$

检验： 取解集里的 $x=0$，左边 $=-1/3-1/2=-5/6$，确实 $\leqslant 1$；取解集外的 $x=-2$，左边 $=-5/3+9/2=17/6$，大于 1，不满足。说明方向没有弄反。

解集画在数轴上

解集是一个范围，画在数轴上最清楚。约定两件事：

- **端点：** 包括这个数（$\leqslant$ 或 $\geqslant$）画实心点，不包括（$<$ 或 $>$）画空心圈；
- **方向：** 大于向右画，小于向左画。

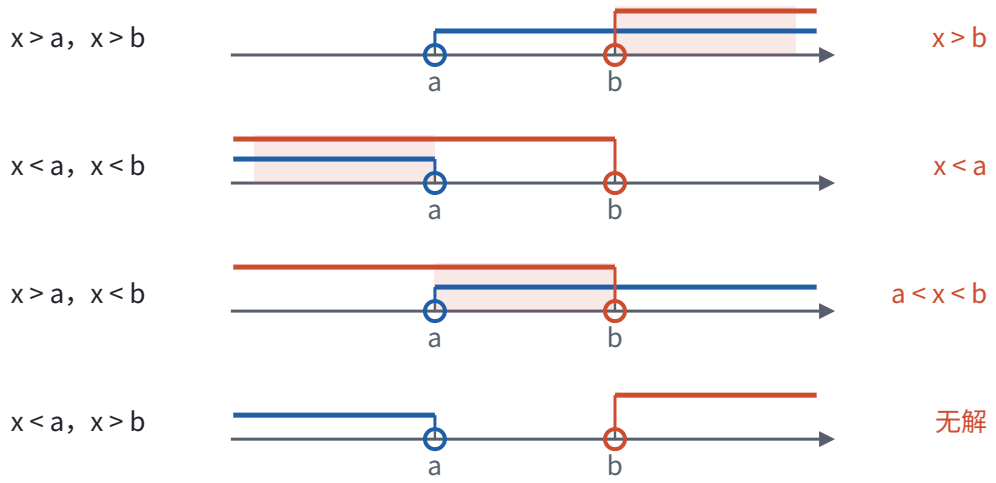


例 1 的解集 $x \geqslant -1$ 就是上面一行：从 −1 出发向右，−1 本身也在里面。

不等式组：找公共部分

有时一个未知数要同时满足几个条件，比如 x 既要大于 a，又要小于 b。把几个一元一次不等式合在一起，就组成**一元一次不等式组**。几个不等式解集的**公共部分**，叫不等式组的解集。

找公共部分，最可靠的办法是把每个解集都画在同一条数轴上，看哪一段被所有的线都覆盖。设 $a<b$，两个不等式组成的不等式组只有四种情况：



不等式组	在数轴上看	解集
$x>a$，$x>b$	两条线都向右，重叠部分从更靠右的 b 开始	$x>b$
$x<a$，$x<b$	两条线都向左，重叠部分到更靠左的 a 为止	$x<a$
$x>a$，$x<b$	一条向右、一条向左，中间重叠	$a<x<b$
$x<a$，$x>b$	一条向左、一条向右，背道而驰，没有重叠	无解

不用背这张表：每次画一下数轴，重叠的部分一眼就能看出来。

例 2 解不等式组

$$\begin{cases}2(x-1)<x+1,\\ \frac{x+5}{2}\geq 1,\end{cases}$$

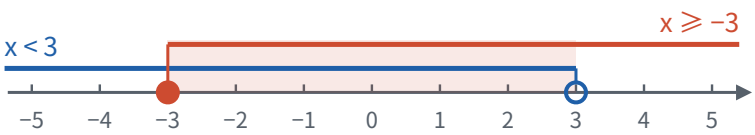
并写出它的所有整数解。

思路： 先分别解每一个不等式，再在数轴上找公共部分，最后在公共部分里数整数。

解： 解第一个不等式：$2x-2<x+1$，得 $x<3$。

解第二个不等式：$x+5\geqslant 2$，得 $x\geqslant -3$。

把两个解集画在同一条数轴上：



公共部分是 $-3\leqslant x<3$，这就是不等式组的解集。其中 -3 取得到（实心点），3 取不到（空心圈），所以整数解是 −3，−2，−1，0，1，2，共 6 个。

实际问题：不等关系定范围

实际问题里的“不超过”“至少”“不少于”，都是不等关系。翻译时要逐字对照：

说法	符号
不超过、不高于、至多	$\leqslant$
不少于、不低于、至少	$\geqslant$
超过、高于	$>$
不足、低于	$<$

例 3　某班计划买甲、乙两种奖品共 20 件，甲种每件 12 元，乙种每件 8 元。要求总费用不超过 200 元，并且甲种奖品的件数不少于乙种的一半。有哪几种购买方案？

思路： 只有一个量可以自由选：甲种买几件。设甲种买 x 件，乙种就是 $(20-x)$ 件。题目给了两个不等关系：费用“不超过”200 元，甲的件数“不少于”乙的一半，两个条件要同时满足，所以列不等式组。件数还必须是整数。

解： 设甲种奖品买 x 件，则乙种买 $(20-x)$ 件。根据题意，得

$$\begin{cases} 12x+8(20-x)\leq 200, \\ x\geq \frac{1}{2}(20-x). \end{cases}$$

解第一个不等式：$4x+160\leqslant 200$，得 $x\leqslant 10$。

解第二个不等式：$2x\geqslant 20-x$，$3x\geqslant 20$，得 $x\geqslant 20/3$，也就是 $x\geqslant 62/3$。

所以 $62/3\leqslant x\leqslant 10$。$x$ 是整数，只能取 7、8、9、10。

答：共有 4 种方案：甲 7 件、乙 13 件；甲 8 件、乙 12 件；甲 9 件、乙 11 件；甲 10 件、乙 10 件。

检验： 最贵的方案是甲 10 件，费用 $12\times 10+8\times 10=200$ 元，正好不超过；甲 6 件时乙 14 件，$6<7$，不满足“不少于一半”，所以 6 不行。

回顾： 方程求出的是一个确定的值，不等式求出的是一个范围；实际问题再加上“整数”“正数”等限制，范围就变成了几个具体的方案。要找其中费用最少的方案，还可以把费用写成 x 的一次函数，看它随 x 怎样变化（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。

易错点

- **两边乘或除以负数时忘了改变不等号方向。** $-11x\leqslant 11$ 两边除以 −11，得 $x\geqslant -1$，不是 $x\leqslant -1$。去分母乘的是正数，方向不变；系数化为 1 时要先看系数的正负。
- **两边乘或除以一个不知道正负的式子。** 比如关于 x 的不等式 $(m-1)x>m-1$ 的解集是 $x<1$，说明两边除以 $m-1$ 时不等号改变了方向，所以 $m-1<0$，$m<1$。如果不知道 $m-1$ 的正负，就要分情况讨论（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。
- **实心点和空心圈画反。** 含等号（$\leqslant$、$\geqslant$）的端点属于解集，画实心点；不含等号的画空心圈。求整数解时，端点能不能取也由这一点决定。
- **把“不超过”“至少”译错。** “不超过 200”包括 200，是 $\leqslant 200$；“少于 200”不包括 200，是 <200。

- **把不等式组的解集写成“合起来”。** 不等式组要求**同时**满足，解集是公共部分，不是两个解集拼在一起。$x<3$ 和 $x\geqslant -3$ 的公共部分是 $-3\leqslant x<3$，不是“所有实数”。
- **以为不等式两边可以随便“约掉”相同的因式。** 约掉就是两边除以它，要先确定它是正数、负数还是可能为 0。

联系

- **有理数：** 数轴上右边的数大，这是不等式所有性质的出发点；乘 −1 就是取相反数，关于原点对称，所以大小顺序反过来。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **一元一次方程：** 解不等式的每一步都和解方程对应，只有乘除负数这一步不同。不等式的边界点，就是把不等号换成等号后方程的解。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。
- **一次函数：** 解 $kx+b>0$，就是看直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方的部分对应的 x 的范围；比较两个一次函数的大小，就是看哪条直线在上面。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **三角形：** 三角形任意两边之和大于第三边，已知两边求第三边的范围，就是解不等式组。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **实数：** 估算 $\sqrt{5}$ 在 2 和 3 之间，写出来就是 $2<\sqrt{5}<3$。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **分类讨论：** 系数含字母时，不等号的方向要看字母的正负，需要分情况。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2026 年第 16 题（第 360 页）、2025 年第 11 题（第 372 页）、2025 年第 20 题（第 376 页）、2024 年第 5 题（第 383 页）、2022 年第 12 题（第 412 页）。

分式方程 ★

> 对应人教版八年级上册 18.5。

分母里含有未知数的方程叫分式方程；解法是两边乘最简公分母，化成整式方程。因为乘的式子可能等于 0，这一步可能多出原方程没有的“解”，所以必须检验。

从哪里来：未知数跑进了分母

一艘船在静水中的速度不知道，水流速度是 3 km/h。它顺流航行 80 km 和逆流航行 60 km 所用的时间相同，求船在静水中的速度。

设船在静水中的速度为 x km/h，顺流速度是 $(x+3)$ km/h，逆流速度是 $(x-3)$ km/h。等量关系是“两段用时相同”，而时间 = 路程 ÷ 速度，于是

$$\frac{80}{x+3}=\frac{60}{x-3}.$$

未知数出现在分母里了。这不是偶然：时间 = 路程 ÷ 速度，工作时间 = 工作量 ÷ 工作效率，数量 = 总价 ÷ 单价，**只要未知的量是除数，列出的方程就是分式方程。**

分母中含有未知数的方程叫**分式方程**。注意是“分母中含有未知数”：$x/2+1=3$ 虽然有分数线，但分母是数，它仍是一元一次方程。

解法：化成整式方程

已经会解整式方程了，自然想到把分母去掉。和一元一次方程去分母一样，两边同乘各分母的最简公分母（见第三部分“分式”（第 74 页））。

上面船速问题列出的方程是

$$\frac{80}{x+3}=\frac{60}{x-3},$$

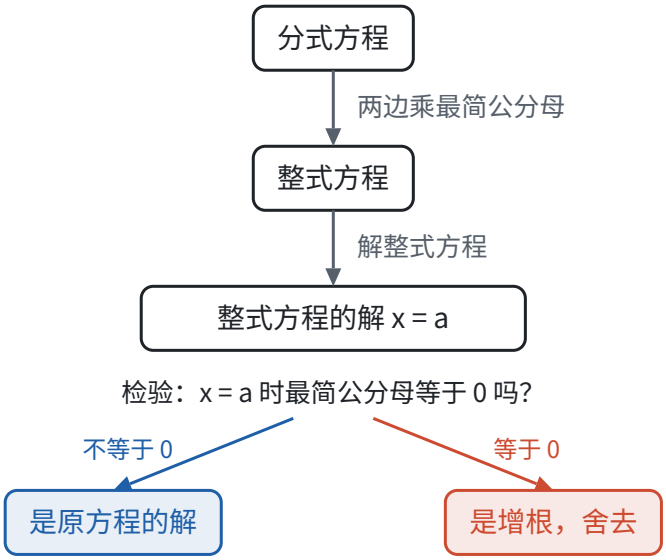
最简公分母是 $(x+3)(x-3)$，两边同乘它，得

$$80(x-3)=60(x+3).$$

去括号，得 $80x-240=60x+180$，所以 $20x=420$，$x=21$。

检验：$x=21$ 时，$(x+3)(x-3)=24\times 18\neq 0$，所以 $x=21$ 是原方程的解。回到题目，顺流速度 24 km/h，用时 $80/24=10/3$ h；逆流速度 18 km/h，用时 $60/18=10/3$ h，确实相同。船在静水中的速度是 21 km/h。

整个过程可以画成下面的流程，最后一步“检验”是分式方程特有的：



例 1　解方程 $x/(x+1)=2x/(3x+3)+1$。

思路： 先把分母分解因式，才看得出最简公分母：$3x+3=3(x+1)$，所以最简公分母是 $3(x+1)$。右边的 1 也要乘。

解： 两边乘 $3(x+1)$，得

$$3x=2x+3(x+1).$$

去括号，得 $3x=2x+3x+3$；移项、合并同类项，得 $-2x=3$，所以 $x=-3/2$。

检验： $x=-3/2$ 时，$3(x+1)=-3/2\neq 0$，所以 $x=-3/2$ 是原方程的解。

增根从哪里来

例 2　解方程 $1/(x-2)+3=(x-1)/(x-2)$。

解： 两边乘 $x-2$，得 $1+3(x-2)=x-1$，即 $3x-5=x-1$，所以 $x=2$。

检验： $x=2$ 时，$x-2=0$，原方程的分母为 0，没有意义。所以 $x=2$ 不是原方程的解，原方程无解。

这里的 $x=2$ 是去分母后的整式方程的解，却不是原方程的解，叫原方程的**增根**。它是怎么多出来的？

回忆等式的性质 2：两边乘同一个数，等式仍成立。反过来却不一定：一个本来**不成立**的等式，两边都乘 0 以后，就变成了成立的 $0=0$。比如 $1\neq 3$，可是 $1\times 0=3\times 0$。

去分母时乘的 $x-2$ 是含未知数的式子。x 取别的值时它不等于 0，变形前后等价；可是当 $x=2$ 时它等于 0，原方程在这里根本没有意义，乘完以后却可能“成立”了。所以：

- 整式方程的解，**只可能**在“最简公分母等于 0”的地方多出来；
- 检验时，**只要把解代入最简公分母**：不等于 0，就是原方程的解；等于 0，就是增根，要舍去。

也可以代入原方程检验，那样还能顺便查出计算错误，只是麻烦一些。

含字母的分式方程（拓展）

增根的来历弄清楚了，就能反过来用：增根一定让最简公分母等于 0。

例 3 关于 x 的方程 $x/(x-2)-3=m/(x-2)$。

（1）如果这个方程有增根，求 m 的值；

（2）如果这个方程的解是正数，求 m 的取值范围。

思路： 先照常去分母，把 x 用 m 表示出来。增根只可能是让 $x-2=0$ 的 $x=2$；“解是正数”除了要求 $x>0$，还要求这个解不是增根。

解： 两边乘 $x-2$，得 $x-3(x-2)=m$，即 $-2x+6=m$，所以 $x=(6-m)/2$。

（1）方程有增根，增根只能是 $x=2$。令 $(6-m)/2=2$，得 $m=2$。

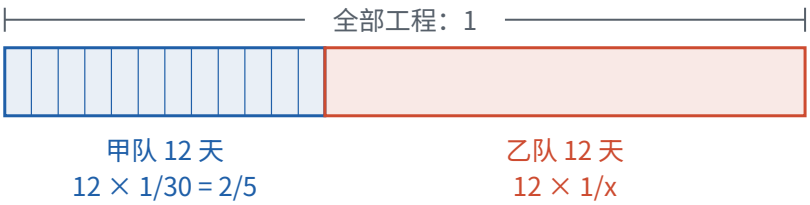
（2）解是正数，需要 $(6-m)/2>0$，得 $m<6$；同时这个解不能是增根，即 $(6-m)/2\neq 2$，得 $m\neq 2$。所以 $m<6$ 且 $m\neq 2$。

回顾： 第（2）问最容易漏掉 $m\neq 2$。$m=2$ 时整式方程的解是 $x=2$，虽然是正数，却让分母为 0，原方程其实无解。

实际问题：工程问题

例 4 一项工程，甲队单独做需要 30 天完成。甲、乙两队合做 12 天完成。乙队单独做需要多少天完成？

思路： 工程问题的关键是把全部工作量看成 1。甲队 30 天完成，每天完成 $1/30$；设乙队单独做需要 x 天，每天完成 $1/x$。等量关系是：甲 12 天的工作量 + 乙 12 天的工作量 = 全部工作量 1。



解： 设乙队单独做需要 x 天完成。根据题意，得

$$\frac{12}{30}+\frac{12}{x}=1.$$

两边乘 $30x$，得 $12x+360=30x$，所以 $18x=360$，$x=20$。

检验： $x=20$ 时 $30x\neq 0$，是原方程的解，而且天数为正，符合题意。

答：乙队单独做需要 20 天完成。

想一想： 如果设的不是天数，而是乙队每天完成的工作量 y，方程就是

$$12\times\frac{1}{30}+12y=1,$$

这是一元一次方程，解得 $y=1/20$，乙队单独做需要 $1\div 1/20=20$ 天。

比较	设天数 x	设每天的工作量 y
方程	分式方程	一元一次方程
要不要检验增根	要	不要
最后一步	直接得到答案	还要用 $1\div y$ 换算成天数

天数和每天的工作量互为倒数：设哪一个，另一个就在分母里。未知数放在分母还是分子，取决于设的是哪个量，方程的类型可以通过换个设法来改变。

实际问题要两次检验： 先检验是不是增根，再检验是否符合实际（天数、速度为正，人数为整数等）。

易错点

- **去分母时漏乘不含分母的项。** 例 4 的方程 $12/30+12/x=1$ 两边乘 $30x$，左边的 $12/30$ 和 $12/x$ 要乘，右边的 1 也要乘，得 $30x$。
- **分子是多项式时不加括号。** $-(x+1)/(x-2)$ 乘 $x-2$ 得 $-(x+1)$，括号里的每一项都要变号。
- **最简公分母找错。** 分母能分解因式的先分解，如 $3x+3=3(x+1)$，$x^2-1=(x+1)(x-1)$，再取各因式的最高次幂的积。
- **忘记检验，或者检验时代错了地方。** 检验是把解代入**最简公分母**（或原方程），不是代入去分母后的整式方程——整式方程的解代回整式方程总是成立的。
- **把“有增根”和“无解”当成一回事。** 分式方程无解有两种可能：去分母后的整式方程本身无解；或者整式方程的解都是增根。反过来，有增根也不一定无解：去分母后得到一元二次方程时，可能一个根是增根，另一个根是原方程的解。
- **“解是正数”漏掉“不是增根”这个条件。** 例 3 中，方程 $x/(x-2)-3=m/(x-2)$ 去分母后得 $x=(6-m)/2$；解是正数，除了 $m<6$，还要这个解不是增根 $x=2$，即 $m\neq 2$。

联系

- **分式：** 分式的分母不能为 0，这正是分式方程要检验的原因；找最简公分母、分解因式，都是分式运算的基本功。见第三部分“分式”（第 74 页）。
- **一元一次方程：** 去分母后大多化成一元一次方程；去分母的做法也和一元一次方程一样，只是乘的式子可能

为 0。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。

- **反比例函数：** 路程一定时，时间和速度成反比；工作量一定时，时间和工作效率成反比。分式方程里的 $80/(x+3)$、$12/x$，都是反比例关系。见第七部分“反比例函数”（第 212 页）。
- **一元二次方程：** 有的分式方程去分母后得到一元二次方程，照样要检验。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **方程思想与建模：** 行程、工程、购物中的“÷”关系，是分式方程最常见的来源。见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

真题： 2026 年第 12 题（第 358 页）、2022 年第 20 题（第 417 页）。

一元二次方程 ★

> 对应人教版九年级上册第二十五章。

只含一个未知数、未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程；它的各种解法都在做同一件事：降次，把一个二次方程变成两个一次方程。

从哪里来

一块长方形空地，长比宽多 4 m，面积是 60 m^2，长和宽各是多少？

设宽为 x m，长就是 $(x+4)$ m，根据面积得 $x(x+4)=60$，整理成

$$x^2+4x-60=0.$$

和一元一次方程比，多了一个 x^2 项。面积、增长率、自由落体的距离……很多数量关系里都有“一个量乘它自己”，列出的就是这样的方程。

只含有一个未知数、未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫**一元二次方程**。它都能整理成**一般形式**

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0),$$

其中 ax^2 是二次项，bx 是一次项，c 是常数项，a、b 分别是二次项系数和一次项系数。要求 $a\neq 0$，因为 $a=0$ 时 x^2 项消失，就成了一次方程。

一次方程已经会解了，所以问题是：**怎样把“二次”降成“一次”？** 手里有两件工具：

- **开平方：** 如果 $x^2=p$（$p\geqslant 0$），那么 $x=\pm\sqrt{p}$。这是平方根的定义。
- **乘积为 0：** 如果 $ab=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$。

下面的几种解法，都是想办法用上这两件工具之一。

直接开平方

例 1 解方程 $(x-1)^2=9$。

思路： 平方等于 9 的数是 3 和 −3，所以 $x-1$ 要么是 3，要么是 −3。一个二次方程变成了两个一次方程。

解： 由平方根的定义，$x-1=3$ 或 $x-1=-3$，所以 $x_1=4$，$x_2=-2$。

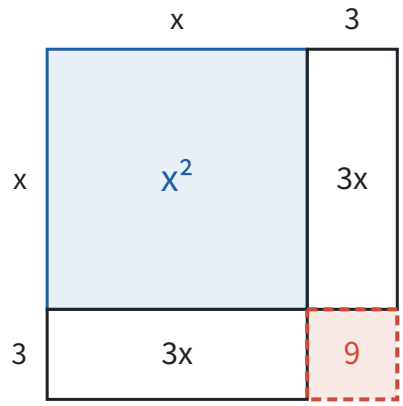
一般地，方程 $(x+m)^2=p$：

p 的情况	开平方后	根
$p>0$	$x+m=\sqrt{p}$ 或 $x+m=-\sqrt{p}$	两个不相等的实数根
$p=0$	$x+m=0$	两个相等的实数根 $x_1=x_2=-m$
$p<0$	没有数的平方是负数	没有实数根

配方法：配成正方形

只要方程能写成 $(x+m)^2=p$ 的样子，就能开平方。那么，$x^2+6x=16$ 能不能变成这个样子？

把 x^2 看成边长为 x 的正方形，把 $6x$ 看成两个 $3\times x$ 的长方形，一个贴在右边，一个贴在下边。拼起来差一个角，这个角是 3×3 的小正方形。补上它，就是边长为 $x+3$ 的大正方形：



方程两边同时加上这个角的面积 9（等式的性质 1），得

$$x^2+6x+9=25,\quad \text{即}\quad (x+3)^2=25.$$

所以 $x+3=\pm 5$，$x_1=2$，$x_2=-8$。

图里 x 是边长，只能看到正数根 2；代数上 $x=-8$ 也满足方程：$64-48=16$。图帮我们想到“补一个角”，算的时候仍然用代数。

补多少？ 用完全平方公式对照（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））：

$$(x+m)^2=x^2+2mx+m^2.$$

一次项系数是 $2m$，所以 m 是**一次项系数的一半**，要补上的是 m^2，即一次项系数一半的平方。

例 2　用配方法解方程 $x^2-4x-1=0$。

思路： 常数项移到右边，左边补上一次项系数 -4 的一半的平方，也就是 $(-2)^2=4$。

解： 移项，得 $x^2-4x=1$。两边加 4，得 $x^2-4x+4=5$，即 $(x-2)^2=5$。所以 $x-2=\pm\sqrt{5}$，$x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$。

二次项系数不是 1 时，先两边除以二次项系数，再配方。

公式法：配方的一般结果

对一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）配方，得到的结果以后就能直接套用。两边除以 a，移项，再加上一次项系数 b/a 一半的平方：

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

右边的分母 $4a^2>0$，所以右边的正负由 b^2-4ac 决定。当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，开平方得（分母开方得 $2|a|$，前面有 $\pm$，写成 $2a$ 结果一样）

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这就是**求根公式**。用它解方程叫公式法：先把方程化成一般形式，写出 a、b、c，算出 b^2-4ac，再代入公式。

例 3　解方程 $3x^2-5x+1=0$。

解： $a=3$，$b=-5$，$c=1$，$b^2-4ac=25-12=13>0$。

$$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6},$$

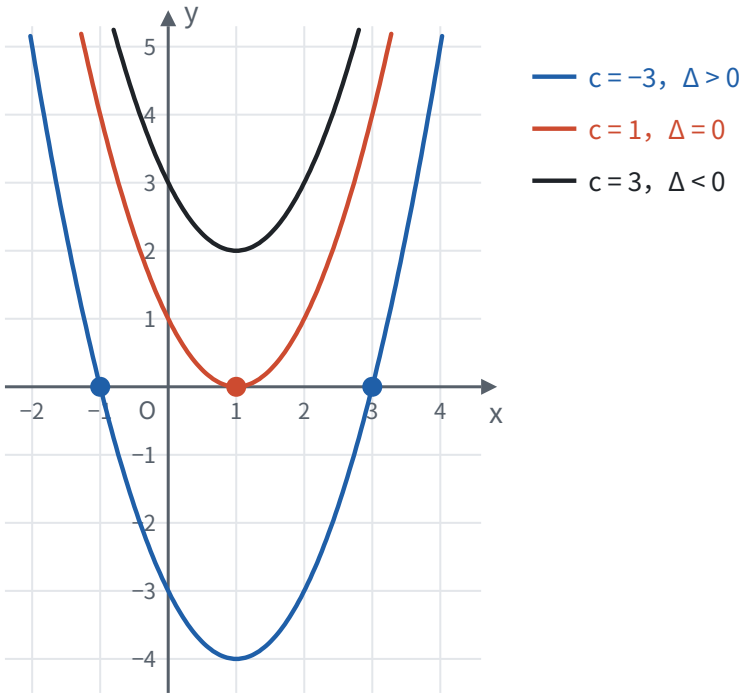
即 $x_1=(5+\sqrt{13})/6$，$x_2=(5-\sqrt{13})/6$。

判别式：根的个数

推导公式时已经看到，$(x+b/(2a))^2$ 等于一个和 b^2-4ac 同号的数。所以不用解方程，只看 b^2-4ac 就知道根的情况。b^2-4ac 叫一元二次方程根的**判别式**，记作 Δ：

$\Delta=b^2-4ac$	根的情况	抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴
$\Delta>0$	两个不相等的实数根	两个交点
$\Delta=0$	两个相等的实数根	一个交点（相切）
$\Delta<0$	没有实数根	没有交点

表的最后一列是几何的说法：方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，就是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上纵坐标为 0 的点的横坐标，也就是抛物线和 x 轴交点的横坐标。下图是 $y=x^2-2x+c$ 在 $c=-3$、1、3 时的图象，对应的 Δ 分别是 16、0、−8：抛物线越往上，和 x 轴的交点从 2 个变成 1 个，再变成没有。



例 4　关于 x 的方程 $kx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围。

思路：　“两个不相等的实数根”对应 $\Delta>0$。但先要保证它是一元二次方程：二次项系数 $k\neq 0$。

解：　由题意，$k\neq 0$，且 $\Delta=(-2)^2-4\times k\times 1=4-4k>0$，得 $k<1$。

所以 $k<1$ 且 $k\neq 0$。

因式分解法：乘积为 0

如果方程一边是 0，另一边能分解成两个一次因式的积，就用第二件工具：两个数的积为 0，至少有一个是 0。

例 5　解方程 $x(x-3)=2(x-3)$。

思路：　两边都有 $x-3$，移到一边后提公因式，就变成“积为 0”。

解：　移项，得 $x(x-3)-2(x-3)=0$，提公因式，得 $(x-3)(x-2)=0$。所以 $x-3=0$ 或 $x-2=0$，$x_1=3$，$x_2=2$。

想一想：　能不能两边直接除以 $x-3$，得 $x=2$？不能。$x-3$ 可能等于 0，除以它不符合等式的性质 2，正好把 $x=3$ 这个根丢了。这和分式方程两边乘含未知数的式子会产生增根，是同一个道理的两面（见第四部分“分式方程”（第 100 页））。

像 $x^2-5x+6=0$，左边分解成 $(x-2)(x-3)$，也能用因式分解法，得 $x_1=2$，$x_2=3$（见第三部分“因式分解”（第 69 页））。

开头长方形空地的问题（长比宽多 4 m，面积 60 m²）列出的方程 $x^2+4x-60=0$ 也是这样：左边分解成 $(x+10)(x-6)$，得 $x_1=-10$，$x_2=6$。宽不能是负数，舍去 -10，所以宽 6 m，长 10 m。

怎样选方法

方程的样子	方便的方法	用哪件工具降次
$(x+m)^2=p$，或没有一次项	直接开平方	开平方
一边为 0，另一边容易分解因式	因式分解法	积为 0
二次项系数为 1，一次项系数是偶数	配方法	配成 $(x+m)^2=p$ 再开平方
其他情况	公式法	配方的结果，公式里的 $\pm$ 就是两个一次方程

四种方法其实是两种想法：开平方，或者因式分解。配方法和公式法是为了用上开平方，先把方程变形。

根与系数的关系

设方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根是 x_1、x_2（$\Delta\geqslant 0$）。把求根公式给出的两个根相加、相乘：

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

也可以这样看：二次项系数为 1 时，x_1、x_2 是方程的根，方程就能写成 $(x-x_1)(x-x_2)=0$，展开得

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

和 $x^2+px+q=0$ 对照，一次项系数是两根之和的相反数，常数项是两根之积。

例 6 设 x_1、x_2 是方程 $x^2-3x-1=0$ 的两个根，求 $x_1^2+x_2^2$ 和 $1/(x_1)+1/(x_2)$ 的值。

思路： 两个根都是带根号的数，直接代入很繁。要求的两个式子都能用“两根之和”与“两根之积”表示出来，而这两个量从系数就能读出。先检查 $\Delta=9+4=13>0$，方程确实有两个实数根。

解： 由根与系数的关系，$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=-1$。

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9+2=11,$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{3}{-1}=-3.$$

实际问题

例 7 某商品原价 100 元，连续两次降价，每次降价的百分率相同，现价 81 元。求每次降价的百分率。

思路： 每次降价后的价格是降价前的 $(1-x)$ 倍。降两次，就是乘两次 $(1-x)$。

解： 设每次降价的百分率为 x，根据题意，得

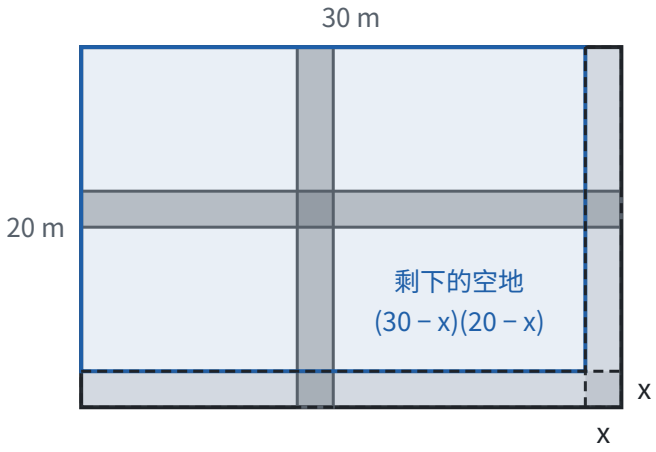
$$100(1-x)^2=81.$$

所以 $(1-x)^2=0.81$，$1-x=\pm 0.9$，$x_1=0.1$，$x_2=1.9$。降价的百分率不能超过 100%，$x_2=1.9$ 不合题意，舍去。

答：每次降价的百分率是 10%。

例 8　一块长 30 m、宽 20 m 的长方形空地上，修两条互相垂直、宽度相同的小路，一条和长平行，一条和宽平行，剩下的部分种草，面积是 504 m^2。小路宽多少米？

思路： 两条小路交叉，重叠的地方不好算。但把小路平移到空地的边上，剩下部分的面积不变（平移不改变图形的大小），剩下的就拼成了一个长方形，长 $(30-x)$ m，宽 $(20-x)$ m。下图中，实线是小路原来的位置，虚线是平移到边上以后的位置，蓝框就是拼成的长方形。



解： 设小路宽 x m，根据题意，得

$$(30-x)(20-x)=504.$$

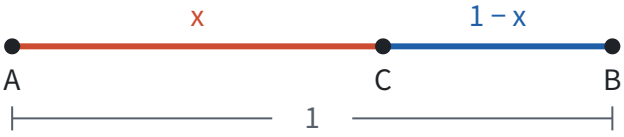
整理，得 $x^2-50x+96=0$，即 $(x-2)(x-48)=0$，所以 $x_1=2$，$x_2=48$。小路宽不能超过空地的宽 20 m，$x_2=48$ 舍去。

答：小路宽 2 m。

回顾： 方程有两个根，不等于实际问题有两个答案。解完以后要回到题目，逐个检查根是否符合实际。

黄金分割数（拓展）

在线段 AB 上找一点 C，使较长的一段 AC 与全长 AB 的比，等于较短的一段 CB 与较长一段 AC 的比。设 $AB=1$，$AC=x$，那么 $CB=1-x$：



$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}.$$

两边乘 x，得 $x^2=1-x$，即 $x^2+x-1=0$。用公式法，$\Delta=1+4=5$，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

x 是线段长，取正根 $x=(\sqrt{5}-1)/2\approx 0.618$（参考数据：$\sqrt{5}\approx 2.236$）。这个数叫**黄金分割数**，点 C 叫线段 AB 的黄金分割点。它在建筑、绘画中常用，在相似中还会再遇到（见第八部分“相似”（第 230 页））。

易错点

- **忘了二次项系数不为 0。** 题目说“一元二次方程”或“两个实数根”，就隐含 $a \neq 0$。例 4 中方程 $kx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，由 $\Delta>0$ 得 $k<1$，还要加上 $k \neq 0$，漏掉它是最常见的错误。
- **两边同除以含未知数的式子。** 例 5 解 $x(x-3)=2(x-3)$，如果两边除以 $x-3$，会丢掉 $x=3$。应该移项后因式分解。
- **没化成一般形式就套公式。** $3x^2=5x-1$ 要先化成 $3x^2-5x+1=0$，这时 $b=-5$，不是 5。
- **配方时只在一边加。** 补上的一次项系数一半的平方，两边都要加；二次项系数不是 1 时要先除掉。
- **开平方漏掉负根。** $x^2=4$ 的解是 $x=\pm 2$，不只是 2。
- **用根与系数的关系前不看判别式。** $x^2+x+1=0$ 的 $\Delta=-3<0$，没有实数根，“两根之和为 −1”就没有意义。
- **实际问题不舍根。** 百分率、长度、人数有各自的范围，解出的根要逐个检验。

联系

- **二次函数：** 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标，判别式决定交点个数；把二次函数配方化成顶点式，和配方法解方程是同一种变形。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **整式的乘法：** 配方就是反用完全平方公式，配方法那张拼图里，把 x^2+6x 拼成缺一个角的正方形，再补上 3×3 的角，这个“补一个角”就是 $(x+m)^2=x^2+2mx+m^2$ 的面积模型。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **因式分解：** 因式分解法把二次方程拆成两个一次方程。见第三部分“因式分解”（第 69 页）。
- **实数和二次根式：** 直接开平方用的是平方根的定义，公式法的结果常常要化简二次根式。见第二部分“实数”（第 47 页）和第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 小路问题靠平移把零散的图形拼成长方形。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **勾股定理：** 已知直角三角形边长之间的关系求边长，列出的往往是一元二次方程。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **与圆有关的位置关系：** 直线和圆有两个、一个或没有公共点，和判别式决定抛物线与 x 轴交点个数的道理类似。见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **相似：** 黄金分割是比例线段的一种。见第八部分“相似”（第 230 页）。

真题： 2026 年第 4 题（第 356 页）、2025 年第 5 题（第 369 页）、2024 年第 13 题（第 386 页）、2023 年第 7 题（第 398 页）、2022 年第 6 题（第 410 页）。

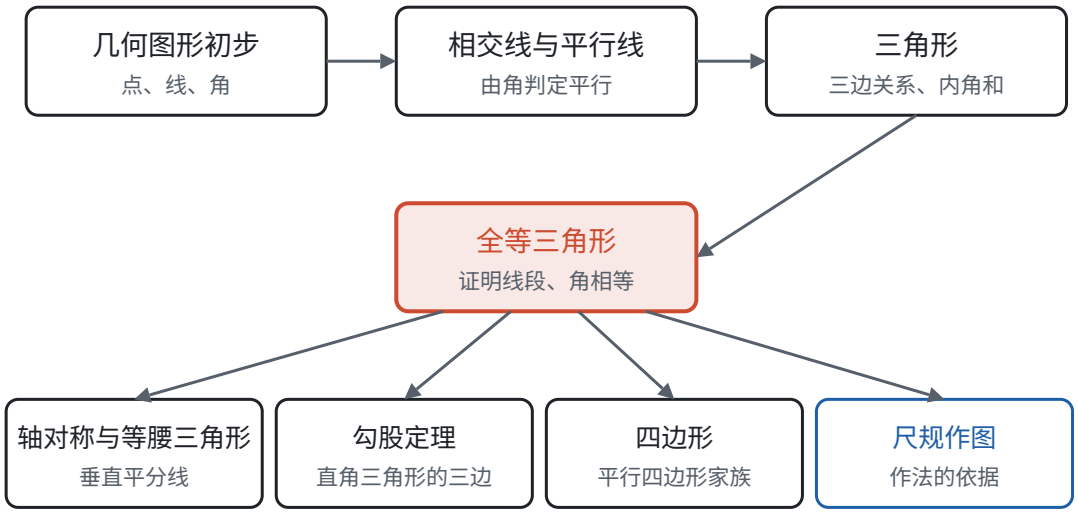
总览：从直线形到证明

这一部分从点、线、角出发，经过三角形走到四边形；每一类图形都按“定义 → 性质 → 判定”来研究，每一条结论都从基本事实一步一步推出来，而不是量出来、看出来。

一条主线

由线段组成的图形叫直线形。这一部分研究直线形的顺序，是从简单的部件一步步搭起来的：

1. **部件：** 点、线、角，以及线段的长度、角的大小（第五部分“几何图形初步”（第 113 页））；
2. **两条直线：** 相交时形成的角、平行时角的关系，第一次用推理代替测量（第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））；
3. **三条线段：** 三角形的三边关系、内角和，任何多边形都能分成三角形（第五部分“三角形”（第 128 页））；
4. **两个三角形：** 什么时候完全一样，这是证明线段相等、角相等最主要的工具（第五部分“全等三角形”（第 136 页））；
5. **特殊的三角形和四边形：** 等腰三角形、直角三角形、平行四边形和它的特殊情况（第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第五部分“四边形”（第 157 页））；
6. **把推理画出来：** 只用直尺和圆规作图，每一步都要有定理作依据（第五部分“尺规作图”（第 169 页））。



图中间的全等三角形是整个部分的枢纽：前面三页为它准备了工具（平行线、内角和、三边关系），后面几页的性质几乎都要靠它来证明。

定义、性质、判定对照表

研究一类图形，总是问三个问题：它是什么（**定义**）？已知是它，能得到什么（**性质**）？满足什么条件，才能说是它（**判定**）？性质和判定往往条件、结论互换，互为逆命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。

对象	定义	主要性质	主要判定	页面
平行线	同一平面内不相交的两条直线	同位角相等，内错角相等，同旁内角互补	同位角相等（基本事实），内错角相等，同旁内角互补；平行于同一条直线	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
垂线	两条直线相交成直角	过一点有且只有一条垂线；垂线段最短	相交所成的角中有一个是直角	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
三角形	不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接	两边之和大于第三边；内角和 $180°$；外角等于不相邻的两个内角的和；稳定性	较短两边之和大于最长边的三条线段能组成三角形	第五部分“三角形”（第 128 页）
全等三角形	能够完全重合的两个三角形	对应边相等，对应角相等	SSS，SAS，ASA，AAS；直角三角形还有 HL	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
角的平分线	把角分成两个相等的角的射线	平分线上的点到角两边的距离相等	角的内部到角两边距离相等的点在平分线上	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
线段的垂直平分线	经过线段中点并且垂直于这条线段的直线	垂直平分线上的点到线段两端的距离相等	到线段两端距离相等的点在垂直平分线上	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
等腰三角形	有两条边相等的三角形	等边对等角；底边上的高、中线、顶角平分线重合	有两个角相等（等角对等边）	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
直角三角形	有一个角是直角的三角形	两锐角互余；两直角边的平方和等于斜边的平方；斜边上的中线等于斜边的一半	有两个角互余；三边满足 $a^2+b^2=c^2$	第五部分“三角形”（第 128 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）
平行四边形	两组对边分别平行的四边形	对边相等，对角相等，对角线互相平分	两组对边分别相等；一组对边平行且相等；对角线互相平分	第五部分“四边形”（第 157 页）
矩形、菱形、正方形	有一个角是直角、有一组邻边相等、两者兼有的平行四边形	矩形对角线相等；菱形对角线互相垂直；正方形兼有两者	在平行四边形的基础上加角的条件或边的条件（或对角线的条件）	第五部分“四边形”（第 157 页）

从上往下看，后面的对象都是在前面对象的基础上**加条件**得到的：三角形加“两边相等”是等腰三角形，加“一个直角”是直角三角形；四边形加“两组对边平行”是平行四边形，再加“一个直角”是矩形。加的条件越多，图形越特殊，性质也越多。

要证什么，去哪里找工具

几何证明的第一步是看清结论要证什么，再到学过的性质里找能推出它的那一条。常用的工具集中在下面几页：

要证明	常用的工具	出自
两个角相等	对顶角相等；同角（等角）的余角、补角相等；平行线的性质；全等三角形的对应角；等边对等角	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）、第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
两条线段相等	全等三角形的对应边；等角对等边；角平分线的性质；垂直平分线的性质；平行四边形的性质	第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）
两条直线平行	平行线的判定；平行四边形的对边；三角形的中位线	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）
两条直线垂直	相交成直角；等腰三角形三线合一；勾股定理的逆定理；菱形的对角线	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）
求角的度数	三角形内角和、外角；多边形内角和、外角和；平行线的性质	第五部分“三角形”（第 128 页）、第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
求线段的长	勾股定理；线段的和差、中点；全等、等腰转移线段	第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第五部分“几何图形初步”（第 113 页）

建议的学习顺序

- **按目录顺序学。** 从“几何图形初步”到“四边形”，每一页都用到前面几页的结论，跳着学会发现理由接不上。
- **证明的写法和几何同步学。** 学“相交线与平行线”时第一次写推理，可以同时读第一部分“怎样证明”（第 29 页）和第一部分“基本事实”（第 22 页），弄清推理从哪里开始、每一步为什么要写理由。
- **尺规作图穿插着学。** 学完“几何图形初步”就能作等长的线段；学完“全等三角形”就能作等角、作角平分线；学完“轴对称与等腰三角形”就能作垂直平分线和垂线。最后再集中看一遍第五部分“尺规作图”（第 169 页），把每种作法的依据串起来。
- **往后看，这一部分会反复出现。** 全等推广成相似（见第八部分“相似”（第 230 页）），三种图形的变化让全等“动起来”（见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）），圆的性质又要用到等腰三角形、全等和勾股定理（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。

几何图形初步

> 对应人教版七年级上册第六章。

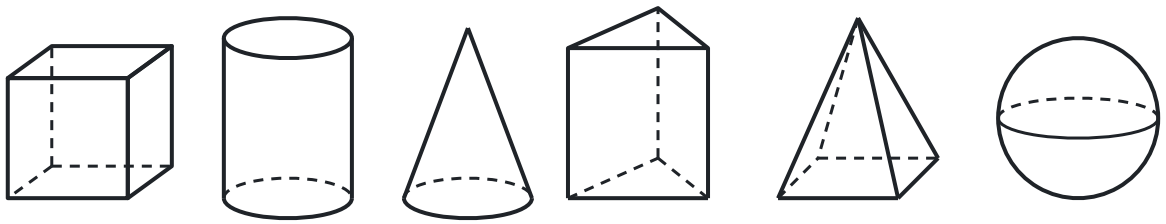
几何研究物体的形状、大小和位置关系；最基本的图形是点、线、面、体，最基本的量是线段的长度和角的大小。

从哪里来

一个易拉罐、一块砖、一个篮球，颜色、材料、重量各不相同。几何只关心它们的形状、大小和位置，把其余的都丢掉，剩下的就是**几何图形**：易拉罐是圆柱，砖是长方体，篮球是球。

几何图形分两类：

- **立体图形：** 各部分不都在同一个平面内，如正方体、长方体、圆柱、圆锥、棱柱、棱锥、球；
- **平面图形：** 各部分都在同一个平面内，如线段、角、三角形、长方形、圆。



正方体　圆柱　圆锥　三棱柱　四棱锥　球

区分这些立体图形，看它们由什么样的面围成：

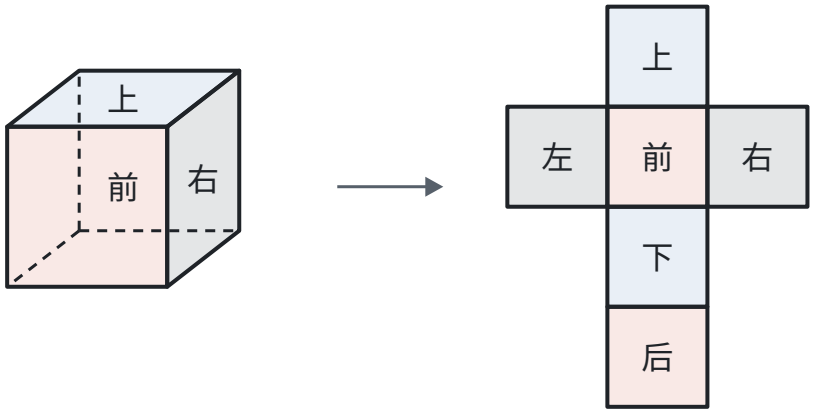
立体图形	底面	侧面	特点
棱柱	两个，是形状、大小相同的多边形	平行四边形（直棱柱是长方形）	上下一样粗
圆柱	两个，是大小相同的圆	一个曲面	上下一样粗
棱锥	一个多边形	三角形，交于一点（顶点）	越往上越细，收成一点
圆锥	一个圆	一个曲面	越往上越细，收成一点
球	没有	没有	只由一个曲面围成，处处一样“圆”

正方体、长方体是特殊的四棱柱。棱柱按底面的边数叫三棱柱、四棱柱……，棱锥也一样。

立体图形和平面图形可以互相转化：从不同方向看一个立体图形，看到的是平面图形（见第八部分“投影与视图”（第 248 页））；把立体图形的表面剪开、摊平，得到的也是平面图形，叫**展开图**。

展开图

正方体有 6 个面。沿着一些棱剪开，可以把它的表面摊成一个平面图形：



读展开图最常用的问题是：**哪两个面是相对的？** 从正方体本身想：

1. 相对的两个面（比如上面和下面）没有公共的棱；相邻的两个面有一条公共的棱。
2. 展开图里两个正方形有公共边，说明折回去以后它们共用一条棱，所以它们在正方体上是**相邻**的面。因此，相对的两个面在展开图里一定**不相邻**。
3. 展开图里排成一行的三个正方形，中间的一个两边各折起 90°，两端的正方形一共转过 180°，正好面对面。所以**一行中隔着一个的两个面是相对的面。**

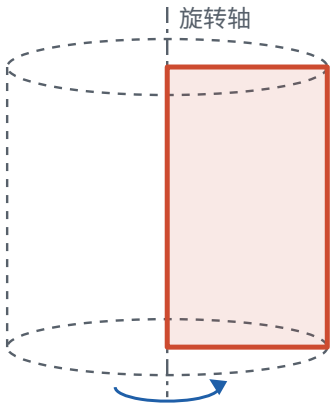
上图中，“上”和“下”隔着“前”，“前”和“后”隔着“下”，“左”和“右”隔着“前”，都在同一行里隔一个。

正方体的展开图一共有 11 种，不用背，用上面的道理就能判断一个图形能不能折成正方体、哪两个面相对。圆柱的展开图是一个长方形和两个圆，圆锥的展开图是一个扇形和一个圆（见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页））。

点、线、面、体

把立体图形拆开来看：**体**由**面**围成，面和面相交成**线**，线和线相交成**点**。正方体有 6 个面、12 条棱、8 个顶点，棱就是面与面相交成的线，顶点就是棱与棱相交成的点。面有平的（正方体的面），也有曲的（圆柱的侧面）；线有直的，也有曲的。

反过来，也可以用运动的眼光看：**点动成线，线动成面，面动成体。** 笔尖（点）划过纸面留下一条线；雨刷（线）扫过挡风玻璃扫出一个面；一个长方形绕它的一边旋转一周，扫出一个圆柱：



同样地，直角三角形绕一条直角边旋转一周形成圆锥，半圆绕它的直径旋转一周形成球。

直线、射线、线段

拉紧的绳子、笔直的铁轨，给人“直”的印象。把这种“直”的线抽象出来，按有没有端点、能不能延伸，分成三种：

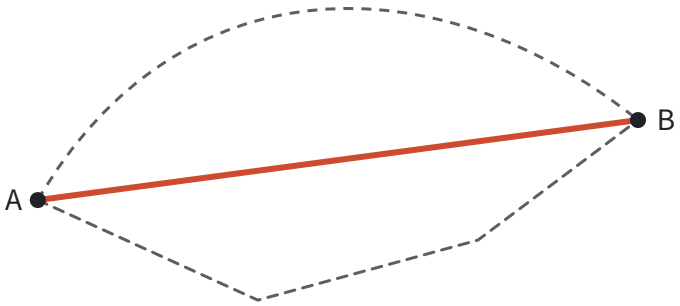
图形	端点	延伸	能否度量长度	表示方法
直线	没有	向两方无限延伸	不能	直线 AB（或直线 BA）、直线 l
射线	1 个	向一方无限延伸	不能	射线 OA，端点 O 必须写在前面
线段	2 个	不延伸	能	线段 AB（或线段 BA）、线段 a



三者的关系：把线段向一方无限延长，得到射线；向两方无限延长，得到直线。射线和线段都是直线的一部分。

关于直线和线段，有两条最基本的事实，全部几何推理都要从这样的事实出发（见第一部分“基本事实”（第 22 页））：

- **两点确定一条直线：** 经过两点有一条直线，并且只有一条。木工用两个钉子就能把木条固定住，植树时先定两端的树再种中间的树，用的都是这一条。
- **两点之间，线段最短：** 连接两点的所有线中，线段最短。连接两点的线段的**长度**叫作这两点间的**距离**。



线段的比较和中点

比较两条线段的长短有两种办法：**度量法**，用刻度尺量出长度再比较；**叠合法**，把一条线段移到另一条上，一端对齐，看另一端落在哪里。两条线段在同一条直线上首尾相接，可以得到它们的和；一条从另一条上截去，

得到它们的差。

把一条线段分成两条相等线段的点，叫作这条线段的中点。 点 M 是线段 AB 的中点，就是

$$AM = MB = \frac{1}{2}AB, \quad AB = 2AM = 2MB.$$

线段的计算，依据只有两条：点在线段上时，整条线段等于各段的和（线段的和差）；中点把线段分成相等的两半（中点的定义）。长度不能直接算出时，就设未知数，按这两条依据列方程。

例 1　如图，点 C 在线段 AB 上，$AC:CB = 2:3$，点 M 是 AB 的中点，MC 长 2 cm。求 AB 的长。



思路： 已知的是一个比和一小段的长，都不能直接得出 AB。比 2:3 提示“每一份”设为 x，这样 AC、CB、AB、AM 都能用 x 表示；再看 MC 在图上是哪两条线段的差，就得到一个方程。

解： 设 $AC = 2x$ cm，则 $CB = 3x$ cm，$AB = 5x$ cm。因为 M 是 AB 的中点，所以 $AM = (1/2)AB = 2.5x$ cm。由图可知

$$MC = AM - AC = 2.5x - 2x = 0.5x.$$

所以 $0.5x = 2$，$x = 4$，$AB = 5x = 20$（cm）。

检验： $AC = 8$ cm，$CB = 12$ cm，比是 2:3；$AM = 10$ cm，$MC = 10 - 8 = 2$（cm），和已知一致。

例 2　如图，点 C 在线段 AB 上，点 M、N 分别是 AC、CB 的中点，AB 长 10 cm，AC 长 6 cm。求 MN 的长。



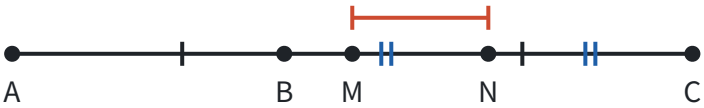
思路： MN 被点 C 分成 MC 和 CN 两段，每一段都是一条已知线段的一半。

解： $MC = (1/2)AC = 3$ cm，$CB = AB - AC = 4$ cm，$CN = (1/2)CB = 2$ cm，所以 $MN = MC + CN = 5$ cm。

想一想： 答案 5 正好是 AB 的一半，是巧合吗？把具体的数换成字母再算一遍：

$$MN = MC + CN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB.$$

所以不论点 C 在线段 AB 上的什么位置，都有 $MN = (1/2)AB$，AC 的长其实用不着。如果点 C 在线段 AB 的延长线上（A、B、C 依次排列），M、N 仍然分别是 AC、CB 的中点：

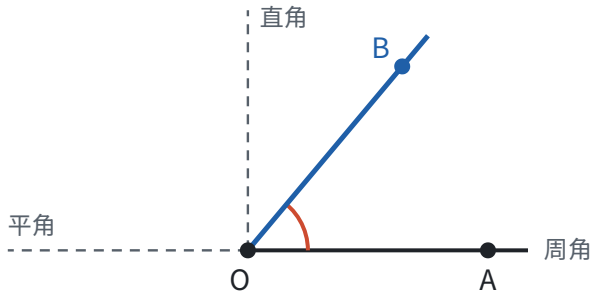


这时 N 比 M 更靠近 C，MN 是 MC 和 NC 的差：$MN = MC - NC = (1/2)AC - (1/2)BC = (1/2)(AC - BC) = (1/2)AB$，结论仍然成立。用数算只能得到一个答案，用字母算才看得出结论和 C 的位置无关。

角

有公共端点的两条射线组成的图形叫作角。 公共端点叫角的**顶点**，两条射线叫角的**边**。

角也可以看成一条射线绕着它的端点旋转而成：射线从起始位置 OA 转到终止位置 OB，就形成了 $\angle AOB$。转得越多，角越大。转到终止边和起始边成一条直线时，得到**平角**；转满一圈回到原处，得到**周角**。用旋转的眼光看，平角和周角也是角，这是只看“两条射线”看不出来的。



角的表示方法：$\angle AOB$（顶点的字母写在中间）；顶点处只有一个角时可以写成 $\angle O$；也可以在角内标上数字或希腊字母，写成 $\angle 1$、$\angle \alpha$。

角的度量。 把周角平均分成 360 份，每一份是 **1 度**，记作 $1°$。所以周角是 $360°$，平角是 $180°$，平角的一半是直角 $90°$。小于 $90°$ 的角是锐角，大于 $90°$ 而小于 $180°$ 的角是钝角。

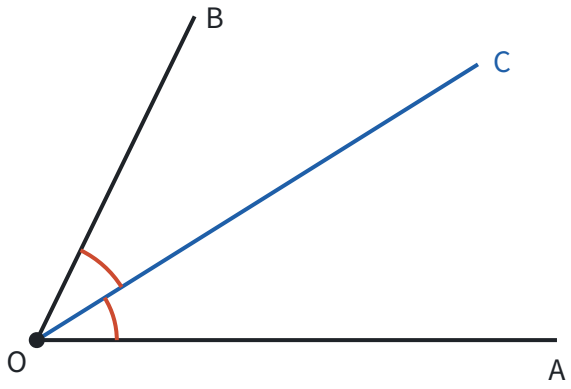
比 1 度更小的单位是分和秒，采用六十进制，和钟表上的时、分、秒一样：$1° = 60'$，$1' = 60''$。换算时，小数部分乘 60 化成下一级单位，反过来除以 60：

$$36.25^\circ = 36^\circ + 0.25 \times 60' = 36^\circ 15', \qquad 48^\circ 36' = 48^\circ + \left(\frac{36}{60}\right)^\circ = 48.6^\circ.$$

角的比较也有度量法和叠合法：叠合时让两个角的顶点和一条边重合，另一条边放在这条边的同一侧；哪个角的另一条边落在另一个角的内部，哪个角就较小。

从一个角的顶点出发，把这个角分成两个相等的角的射线，叫作这个角的平分线。 OC 平分 $\angle AOB$，就是

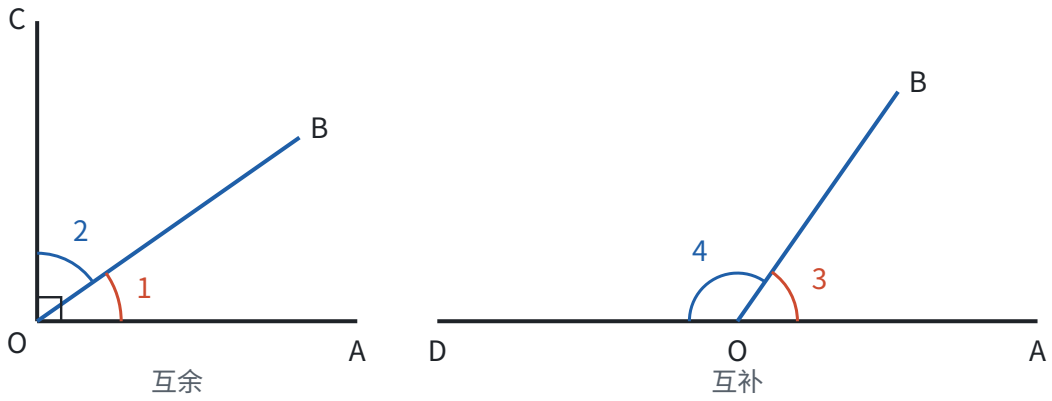
$$\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$



角的平分线和线段的中点是一回事的两种样子：一个把角分成相等的两半，一个把线段分成相等的两半，计算方法也完全一样。

余角和补角

如果两个角的和等于 90°，就说这两个角互为余角；如果两个角的和等于 180°，就说这两个角互为补角。



这是两个角之间的**数量关系**，和它们的位置无关：两个角不挨着，只要度数加起来是 90°，也互为余角。$\angle\alpha$ 的余角是 $90^\circ-\angle\alpha$，补角是 $180^\circ-\angle\alpha$，所以一个锐角的补角比它的余角大 90°。

由定义可以推出一条常用的性质：**同角（或等角）的余角相等，同角（或等角）的补角相等。**

推导很短：如果 $\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$ 都是 $\angle\alpha$ 的余角，即 $\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$，$\angle\alpha+\angle\gamma=90^\circ$，那么 $\angle\beta=90^\circ-\angle\alpha$，$\angle\gamma=90^\circ-\angle\alpha$，所以 $\angle\beta=\angle\gamma$。等角的情形也一样：$\angle\beta$ 是 $\angle\alpha$ 的余角，$\angle\gamma$ 是另一个角 $\angle\text{delta}$ 的余角，而 $\angle\alpha=\angle\text{delta}$，那么 $\angle\beta=90^\circ-\angle\alpha=90^\circ-\angle\text{delta}=\angle\gamma$。补角把 90° 换成 180° 即可。

这条性质是后面证明角相等的第一个工具，“对顶角相等”就是由它推出来的（见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））。

例 3　一个角的补角比它的余角的 3 倍少 10°，求这个角的度数。

思路： 余角、补角都由这个角决定，设这个角为 $x°$，它的余角、补角就都能写出来，再把“比……的 3 倍少 10°”翻译成等式。

解： 设这个角是 $x°$，则它的余角是 $(90-x)°$，补角是 $(180-x)°$。根据题意，

$$180-x=3(90-x)-10.$$

去括号，得 $180-x=260-3x$；移项、合并，得 $2x=80$，$x=40$。这个角是 40°。

检验： 补角 140°，余角 50°，$3\times50^\circ-10^\circ=140^\circ$，符合题意。

易错点

- **延长直线、延长射线。** 直线本来就向两方无限延伸，不能说“延长直线 AB”；射线只能说“反向延长射线 OA”。能延长的只有线段。
- **射线的名字写反。** 射线 OA 和射线 AO 端点不同、方向相反，是两条不同的射线。端点的字母必须写在前面。
- **把线段当作距离。** 距离是线段的**长度**，是一个数；“线段 AB 是 A、B 两点间的距离”的说法不对，应该说“线段 AB 的长度是 A、B 两点间的距离”。
- **没有图时只考虑一种位置。** 题目只说“点 C 在直线 AB 上”，C 可能在线段 AB 上，也可能在它的延长线上；“$\angle AOB=70^\circ$，$\angle BOC=30^\circ$”，射线 OC 可能在 $\angle AOB$ 的内部，也可能在外部。要分情况画图（见第

十一部分“分类讨论”（第 332 页））。

- **度分秒按十进制换算。** $0.5° = 30′$，不是 $50′$；$1°30′$ 是 $1.5°$，不是 $1.3°$。
- **以为互余的角必须挨在一起。** 互余、互补只看度数的和。另外，只有锐角才有余角，钝角没有余角。
- **一个顶点处有好几个角时写 $\angle O$。** 这时 $\angle O$ 不知道指哪个角，必须用三个字母或数字表示。

联系

- **投影与视图：** 从不同方向看立体图形，得到三视图，是立体图形和平面图形互相转化的另一种方式。见第八部分“投影与视图”（第 248 页）。
- **与圆有关的计算：** 圆柱、圆锥的侧面积，要先把侧面展开成长方形、扇形再算。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **一元一次方程：** 线段、角的计算，只要一个量不知道，就设为 x，按线段的和差、角的和差列方程。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。
- **相交线与平行线：** “同角的补角相等”推出“对顶角相等”；直角引出垂直。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **三角形：** “两点之间，线段最短”推出三角形的三边关系。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **有理数：** 数轴上两点的距离是两数之差的绝对值，线段的计算和数轴上的计算是一回事。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **尺规作图：** 作一条线段等于已知线段、作角的平分线，都是这一页的概念用圆规和直尺实现出来。见第五部分“尺规作图”（第 169 页）。

真题： 2026 年第 2 题（第 355 页）、2025 年第 2 题（第 368 页）、2025 年第 4 题（第 369 页）、2022 年第 2 题（第 408 页）。

相交线与平行线

> 对应人教版七年级下册第七章。

同一平面内的两条直线，要么相交，要么平行；研究它们，就是研究直线相交时形成的角：角的相等关系可以推出平行，平行又能推出角的相等关系。

从哪里来

在同一平面内画两条直线，它们的公共点最多只有一个：如果有两个公共点，由“两点确定一条直线”，这两条直线就是同一条（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。所以同一平面内两条不重合的直线只有两种情况：

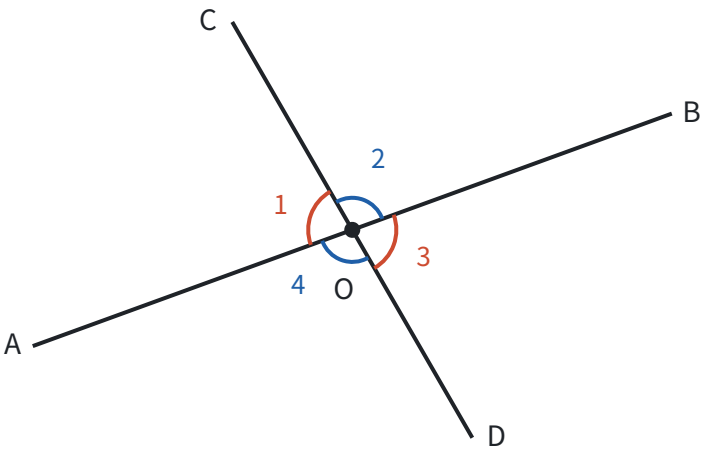
位置关系	公共点	要研究的问题
相交	1 个	交点处形成的 4 个角有什么关系；特别地，什么时候垂直
平行	没有	怎样判断两条直线平行；平行时能得到什么

平行线“永不相交”，但直线无限长，谁也没法把它画到尽头去检验。所以要判断平行，只能另找一个能看得见、量得出的东西，这就是第三条直线和它们相交成的角。整页的主线就是：**相交产生角，角决定平行。**

长方体里有些棱既不相交也不平行，比如上底面的一条棱和下底面上与它方向不同的一条棱，它们不在同一个平面内。这一页只研究同一平面内的直线。

相交：对顶角

直线 AB、CD 相交于点 O，形成 4 个角：



- $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有一条公共边 OC，另一边 OA、OB 互为反向延长线，它们合起来是平角，叫**邻补角**；
- $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有公共顶点，两边分别互为反向延长线，叫**对顶角**。

对顶角相等。 推导只用到邻补角和“同角的补角相等”：

1. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$（邻补角，合起来是平角 $\angle AOB$）；
2. $\angle 3 + \angle 2 = 180°$（邻补角，合起来是平角 $\angle COD$）；
3. 所以 $\angle 1 = \angle 3$（同角的补角相等，见第五部分“几何图形初步”（第 113 页））。

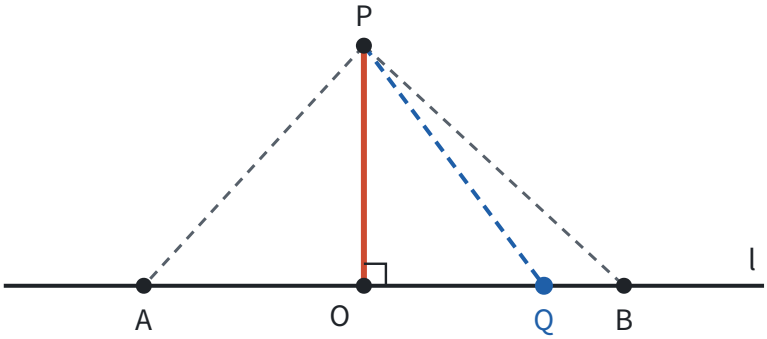
同理 $\angle 2 = \angle 4$。所以两条直线相交，4 个角里只要知道一个，其余 3 个就都确定了：比如 $\angle 1 = 80°$，则 $\angle 3 = 80°$，$\angle 2 = \angle 4 = 100°$。

垂直

两条直线相交时，如果 4 个角中有一个是直角，由上面的推导，另外 3 个也都是直角。这时说这两条直线**互相垂直**，其中一条叫另一条的**垂线**，交点叫**垂足**。直线 AB 与 CD 垂直，记作 $AB \perp CD$。

关于垂线，有两条常用的结论：

- **在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。** 点在直线上、在直线外都一样。
- **连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短。** 简单说成“垂线段最短”。

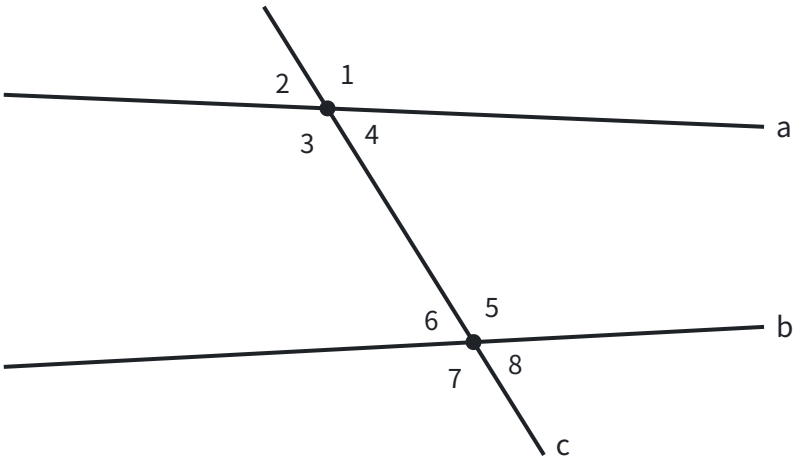


直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫作点到直线的距离。 上图中 $PO \perp l$，垂足为 O，线段 PO 的长度就是点 P 到直线 l 的距离；直线上别的点，比如 A、B，和 P 连成的线段都比 PO 长。跳远比赛量成绩，量的就是落地点到起跳线的垂线段的长度。

为什么垂线段最短？学了勾股定理可以直接算出来：$PQ^2 = PO^2 + OQ^2$，只要 Q 不和 O 重合，$OQ^2 > 0$，就有 $PQ > PO$（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。

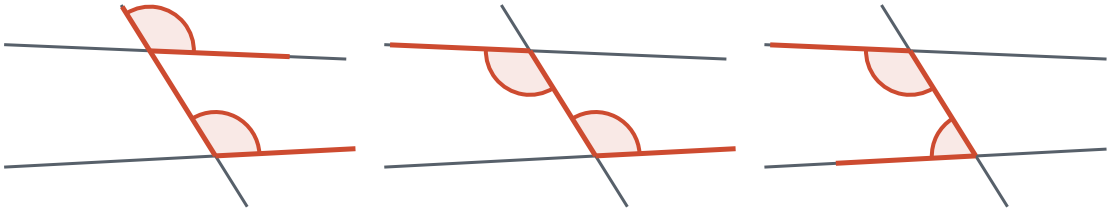
三线八角

平行线的问题要借助第三条直线来研究。直线 a、b 被直线 c 所截，两个交点处各形成 4 个角，一共 8 个：



这 8 个角中，不在同一个交点处的两个角，按位置分成三类：

名称	位置	图中的例子	形状
同位角	在直线 a、b 的同一方（都在上方或都在下方），在直线 c 的同一侧	$\angle 1$ 与 $\angle 5$，$\angle 2$ 与 $\angle 6$，$\angle 3$ 与 $\angle 7$，$\angle 4$ 与 $\angle 8$	像字母 F
内错角	在直线 a、b 之间，在直线 c 的两侧	$\angle 3$ 与 $\angle 5$，$\angle 4$ 与 $\angle 6$	像字母 Z
同旁内角	在直线 a、b 之间，在直线 c 的同一侧	$\angle 3$ 与 $\angle 6$，$\angle 4$ 与 $\angle 5$	像字母 U



同位角　　内错角　　同旁内角

这三个名称只说明角的**位置**。上图中 a、b 并不平行，同位角就不相等，所以不能一看到同位角、内错角就说它们相等。

三类角之间有联系。因为每个交点处的 4 个角由一个角就能确定（对顶角相等、邻补角互补），所以下面三个条件只要有一个成立，另外两个也就成立：

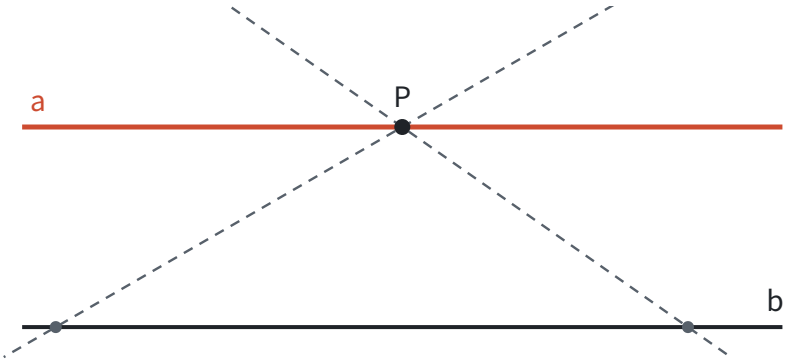
- 同位角相等，比如 $\angle 1 = \angle 5$；
- 内错角相等，比如 $\angle 3 = \angle 5$（因为 $\angle 3 = \angle 1$，对顶角）；
- 同旁内角互补，比如 $\angle 3 + \angle 6 = 180°$（因为 $\angle 6 = 180° - \angle 5$，邻补角）。

三个条件其实说的是同一件事：**直线 a、b 与直线 c 相交成的“倾斜程度”相同。** 下面的判定和性质，都围绕这件事展开。

平行线和平行公理

在同一平面内，不相交的两条直线叫作平行线。 直线 a 与 b 平行，记作 $a \parallel b$。

过直线 b 外一点 P 画直线，让它绕 P 转动：大多数位置都会和 b 相交，只是交点有时近、有时远；只有一个位置和 b 不相交。

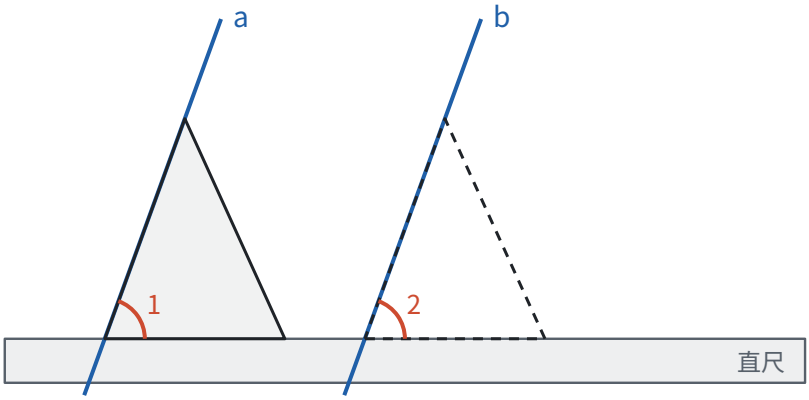


这就是**平行公理**，是一条基本事实：**经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。**

由平行公理可以推出：**如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。** 理由：设 $a \parallel c$，$b \parallel c$。假如 a 与 b 相交于点 P，那么过点 P 就有两条直线 a、b 都与 c 平行，和平行公理矛盾。所以 a 与 b 不相交，$a \parallel b$。这种“假设结论不成立，推出矛盾”的说理方法叫反证法（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

平行线的判定：由角得平行

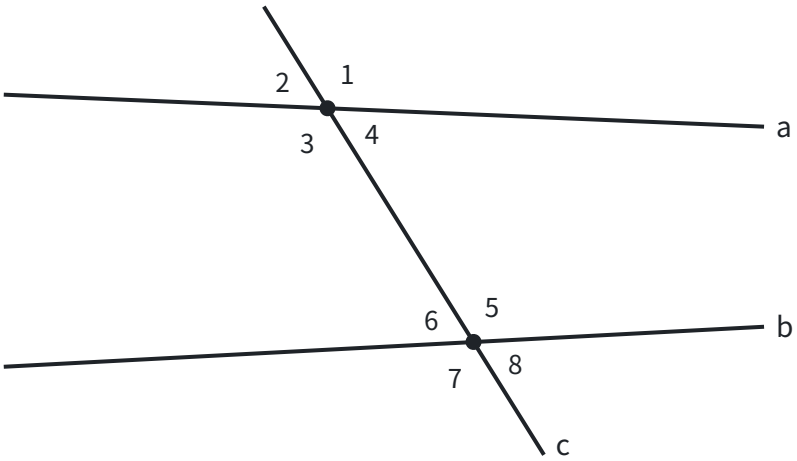
用直尺和三角尺画平行线：直尺固定不动，三角尺的一边紧靠直尺，沿直尺滑动，沿三角尺的另一边先后画出直线 a 和 b。



三角尺在滑动中形状不变，所以 $\angle 1 = \angle 2$，它们正是直线 a、b 被直尺边所在直线截得的同位角。画出来的 a、b 是平行的。把这个经验概括成基本事实：

同位角相等，两直线平行。

有了这一条，另外两个判定都能推出来。还是用“三线八角”一节的图，直线 a、b 被直线 c 所截，形成 $\angle 1$ 到 $\angle 8$：



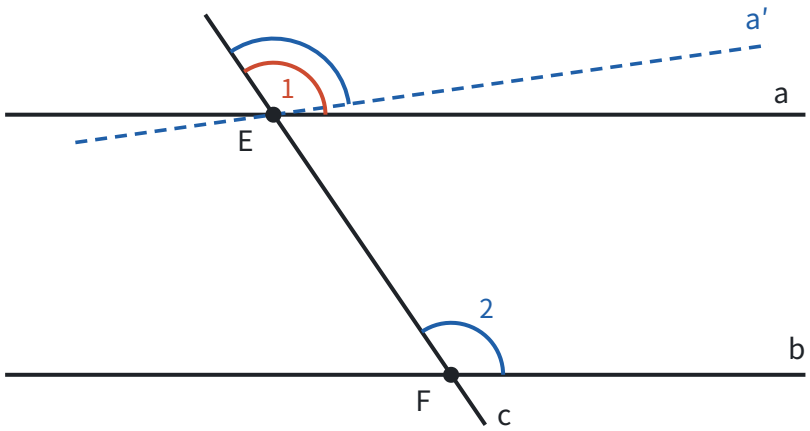
- **内错角相等，两直线平行。** 如果 $\angle 3 = \angle 5$，因为 $\angle 3 = \angle 1$（对顶角相等），所以 $\angle 1 = \angle 5$，同位角相等，所以 $a \parallel b$。
- **同旁内角互补，两直线平行。** 如果 $\angle 3 + \angle 6 = 180°$，因为 $\angle 5 + \angle 6 = 180°$（邻补角），所以 $\angle 3 = \angle 5$（同角的补角相等），内错角相等，所以 $a \parallel b$。

还有两个常用的判定：平行于同一条直线的两条直线平行（上一节）；在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行（它们和这条直线的同位角都是 $90°$）。

平行线的性质：由平行得角

反过来，如果已经知道 $a \parallel b$，同位角一定相等吗？

两直线平行，同位角相等。 用平行公理可以说明它：



设 $a \parallel b$，直线 c 与 a、b 分别交于点 E、F，同位角是 $\angle 1$ 和 $\angle 2$。假如 $\angle 1 \neq \angle 2$，过点 E 作直线 a'，使 a' 与 c 所成的同位角等于 $\angle 2$。由判定，$a' \parallel b$。这样过点 E 就有 a、a' 两条直线都与 b 平行，和平行公理矛盾。所以 $\angle 1 = \angle 2$。

有了这一条，和判定的推导一样，借助对顶角、邻补角就得到另外两条：**两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补。**

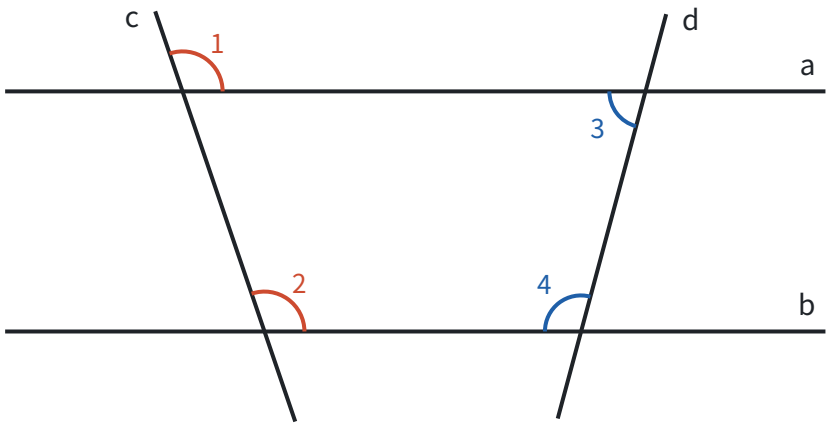
判定和性质放在一起看：

角	判定：由角得平行	性质：由平行得角
同位角	同位角相等 → 两直线平行	两直线平行 → 同位角相等
内错角	内错角相等 → 两直线平行	两直线平行 → 内错角相等
同旁内角	同旁内角互补 → 两直线平行	两直线平行 → 同旁内角互补

每一行的判定和性质，条件和结论正好互换，互为逆命题，而且都是真命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。用哪一个，看已知的是什么：**已知角的关系、要证平行，用判定；已知平行、要得到角的关系，用性质。**

先判定，再用性质

例 1 如图，直线 a、b 被直线 c、d 所截，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = 75°$。求 $\angle 4$ 的度数。



思路： 要求的 $\angle 4$ 和已知的 $\angle 3$ 都在直线 d 上，它们是直线 a、b 被 d 所截的同旁内角。如果 $a \parallel b$，就有

$\angle 3+\angle 4=180°$。但 $a\parallel b$ 题目没有直接给，要先从 $\angle 1=\angle 2$ 得到：它们是 a、b 被 c 所截的同位角。所以这道题分两步：先用**判定**得到平行，再用**性质**求角。

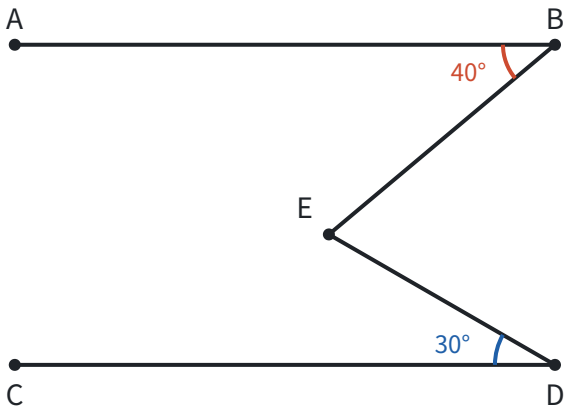
解： 因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $a\parallel b$（同位角相等，两直线平行）。

所以 $\angle 3+\angle 4=180°$（两直线平行，同旁内角互补），$\angle 4=180°-75°=105°$。

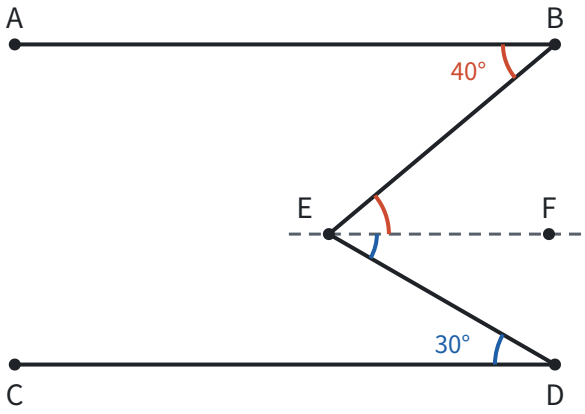
回顾： 直线 c 的作用是“证明平行”，直线 d 的作用是“传递角”。平行线就像一座桥：从一条截线上的角走到平行，再从平行走到另一条截线上的角。

拐角问题：添一条平行线

例 2 如图，$AB\parallel CD$，点 E 在 AB、CD 之间，$\angle B=40°$，$\angle D=30°$。求 $\angle BED$ 的度数。



思路： 平行线的性质只能用在“两条平行线被第三条直线所截”的图形里。$\angle BED$ 的顶点 E 不在 AB、CD 上，图中找不到和它构成同位角、内错角的角。那就自己造一条：过点 E 作 $EF\parallel AB$，EF 把 $\angle BED$ 分成两部分，上面一部分和 $\angle B$ 是 AB、EF 被 BE 所截的内错角，下面一部分和 $\angle D$ 是 EF、CD 被 DE 所截的内错角。



解： 过点 E 作 $EF\parallel AB$。

因为 $AB\parallel CD$，所以 $EF\parallel CD$（平行于同一条直线的两条直线平行）。

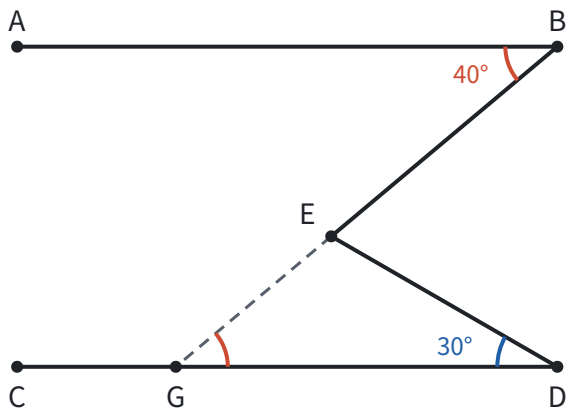
所以 $\angle BEF=\angle B=40°$，$\angle FED=\angle D=30°$（两直线平行，内错角相等）。

所以 $\angle BED=\angle BEF+\angle FED=70°$。

回顾： 把 40°、30° 换成任意度数，推理完全一样，所以这种图形里总有 $\angle BED=\angle B+\angle D$。添 EF 这条辅助线，是为了造出“两条平行线被第三条直线所截”的图形，让平行线的性质用得上（见第十一部分“辅助线从

哪里来”（第 336 页））。

想一想： 也可以延长 BE，交 CD 于点 G：



因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle EGD = \angle B = 40°$（内错角相等）。$\angle BED$ 是 $\triangle EGD$ 的外角，等于和它不相邻的两个内角的和，所以 $\angle BED = \angle EGD + \angle D = 70°$（见第五部分“三角形”（第 128 页））。

两种辅助线的想法相同，都是把 $\angle B$ “搬”到能和 $\angle D$ 放在一起的位置：第一种用平行线把角分开再搬，第二种用平行线把 $\angle B$ 搬到 G 处，再用三角形的外角把两个角合起来。

易错点

- **只要角相等就说是对顶角。** 对顶角要求两条边分别互为反向延长线，也就是由两条相交直线形成。相等的角不一定是对顶角。
- **看到同位角、内错角就说相等。** 只有两条直线平行时它们才相等。题目没说平行，就要先证平行。
- **判定和性质的理由写反。** 由 $\angle 1 = \angle 2$ 得 $a \parallel b$，理由是“同位角相等，两直线平行”（判定）；写成“两直线平行，同位角相等”就是把结论当成了理由。
- **找错平行的是哪两条直线。** 由一对角相等推平行，要先看清这两个角是哪两条直线被哪条直线所截形成的。比如四边形 $ABCD$ 中，由 $\angle BAC = \angle DCA$，得到的是 $AB \parallel CD$（它们被 AC 所截的内错角），不是 $AD \parallel BC$。
- **把垂线段当作距离。** 点到直线的距离是垂线段的**长度**，是一个数；垂线是直线，垂线段是线段。
- **过直线上一点作平行线。** 平行公理说的是“经过直线**外**一点”；过直线上的点作不出与它平行的直线。

联系

- **平移：** 三角尺沿直尺滑动就是平移，平移前后的对应线段平行（或在同一条直线上）且相等。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **平面直角坐标系：** 两条坐标轴互相垂直；平行于 x 轴的直线上各点的纵坐标相同，平行于 y 轴的直线上各点的横坐标相同。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **一次函数：** k 相同、b 不同的两条直线平行，因为它们和 x 轴所成的同位角相等。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **三角形：** 三角形内角和是 180°，证明时要过一个顶点作对边的平行线，用的正是平行线的性质。见第五部分“三角形”（第 128 页）。

- **定义、命题与定理：** 判定和性质互为逆命题，是理解“逆命题”最好的例子。见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）。
- **四边形：** 平行四边形的定义就是两组对边分别平行，它的性质和判定都要反复用到这一页的内容。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **勾股定理：** “垂线段最短”可以用勾股定理说明。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。

真题： 2026 年第 6 题（第 356 页）、2025 年第 4 题（第 369 页）、2024 年第 3 题（第 382 页）、2023 年第 4 题（第 397 页）、2022 年第 3 题（第 408 页）。

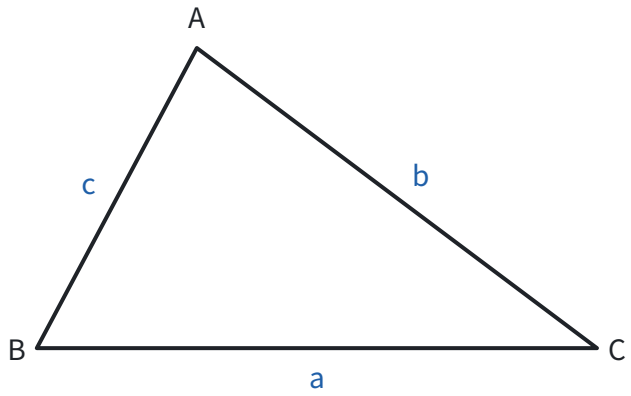
三角形

> 对应人教版八年级上册第十三章、八年级下册 21.1。

三角形是由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形，是最简单的多边形；任何多边形都能分成三角形，所以三角形的性质是研究一切直线形的基础。

从哪里来

两条线段围不成封闭的图形，三条线段才可以。所以三角形是边数最少的多边形，也是最“基本”的多边形：四边形画一条对角线就分成两个三角形，五边形、六边形也都能分成若干个三角形。弄清楚三角形，就能推出多边形的很多性质。



三角形 ABC 记作 $\triangle ABC$。它有三个顶点 A、B、C，三条边 AB、BC、CA，三个内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。顶点 A 所对的边 BC 常记作 a，顶点 B 所对的边 CA 记作 b，顶点 C 所对的边 AB 记作 c。

三角形可以按角分类，也可以按边分类：

分类方法	类别	特征
按角	锐角三角形	三个角都是锐角
	直角三角形	有一个角是直角
	钝角三角形	有一个角是钝角
按边	三边都不相等的三角形	三条边互不相等
	等腰三角形	有两条边相等；三条边都相等的是等边三角形，它是特殊的等腰三角形

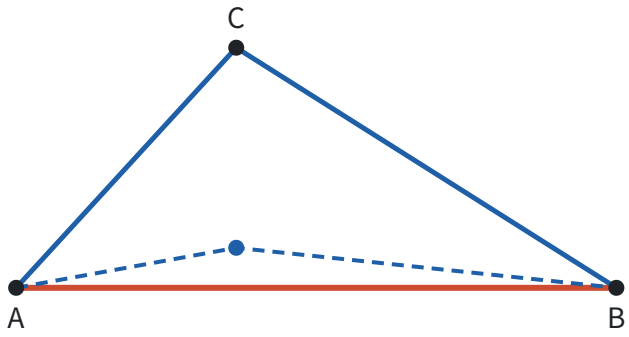
一个三角形最多有一个直角或一个钝角，理由见后面的内角和。

三边关系

任取三根小棒，不一定能围成三角形：3 cm、4 cm、8 cm 的三根就围不起来。什么样的三条线段才能围成三角形？

从“两点之间，线段最短”出发（见第五部分“几何图形初步”（第 113 页））：在 $\triangle ABC$ 中，从 A 到 B 可以直接走线段 AB，也可以绕道经过 C，走 $AC+CB$。直接走的线段最短，所以

$$AC+CB>AB.$$



对另外两条边也一样。于是得到：**三角形两边的和大于第三边。** 把 $AC+CB>AB$ 移项，得 $AB-AC<CB$，所以也有：**三角形两边的差小于第三边。**

合起来，第三边 x 的取值范围夹在另两边的差与和之间。比如两边长 3 和 7，第三边满足

$$7-3<x<7+3,\quad \text{即}\quad 4<x<10.$$

判断三条线段能否组成三角形，不必把三个不等式都验证一遍：**只要较短的两条线段的和大于最长的线段**就可以了，因为最长的一条加上任何一条，一定大于剩下的那条。

例 1　一个等腰三角形的两边长分别是 4 cm 和 9 cm，求它的周长。

思路： 等腰三角形有两条边相等，但题目没说 4 cm 和 9 cm 哪个是腰，要分两种情况。每种情况算出三条边后，还要检查它们能不能组成三角形。

解：

- 如果腰长 4 cm，三边是 4 cm、4 cm、9 cm。$4+4=8<9$，较短的两边之和小于最长边，不能组成三角形，舍去。
- 如果腰长 9 cm，三边是 9 cm、9 cm、4 cm。$4+9>9$，能组成三角形，周长是 $9+9+4=22$（cm）。

所以周长是 22 cm。

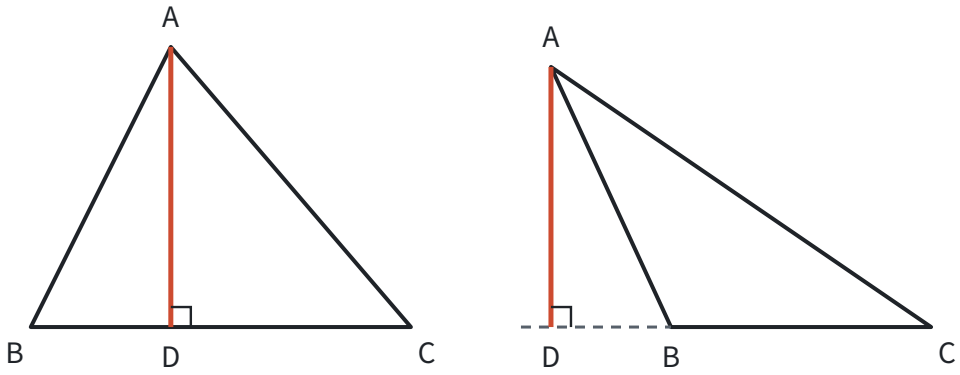
回顾： 算出答案后用三边关系检验，就像解分式方程要检验增根一样：代数上算得出来，不代表图形上存在。

三角形的高、中线和角平分线

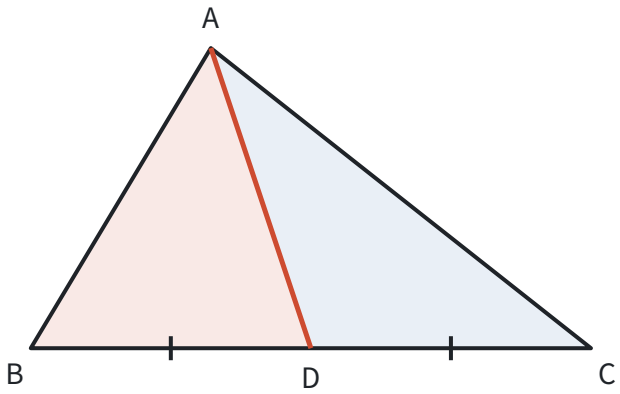
三角形里有三种重要的线段，它们都从一个顶点出发，落在对边（或对边所在的直线）上，区别在于“落在哪里”：

线段	定义	得到的相等关系
高	从顶点向对边所在直线作垂线，顶点和垂足之间的线段	$AD\perp BC$，$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$
中线	连接顶点和对边中点的线段	$BD=DC=(1/2)BC$
角平分线	内角的平分线与对边相交，顶点和交点之间的线段	$\angle BAD=\angle DAC=1/2\angle BAC$

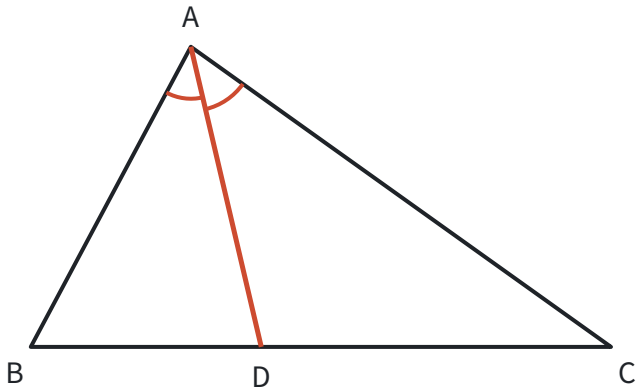
高。 锐角三角形的高都在三角形内部；直角三角形有两条高就是两条直角边；钝角三角形钝角所对的边上的高在内部，另外两条高在外部，要先延长对边，垂足落在延长线上。



中线。 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的底 $BD=DC$，高都是从 A 到 BC 的距离，所以**三角形的中线把三角形分成面积相等的两部分。**



角平分线。 三角形的角平分线是一条**线段**，而角的平分线是一条**射线**，这是两者的区别。

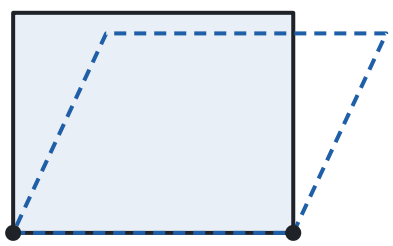


每个三角形都有三条高、三条中线、三条角平分线，而且三条中线交于一点，三条角平分线交于一点，三条高所在的直线也交于一点。三条中线的交点叫**重心**，后面的综合与实践会用到；三条角平分线的交点是三角形内切圆的圆心（见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页））。这几个“交于一点”现在先承认，后面可以

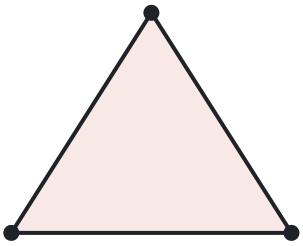
证明：三条角平分线交于一点，用角平分线的性质和它的逆命题（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））；三条中线交于一点，要用到相似（见第八部分“相似”（第 230 页））。

三角形的稳定性

用三根木条钉成一个三角形框架，怎么扳也扳不动；用四根木条钉成的四边形框架，一扳就变形：



四边形：形状会变



三角形：形状不变

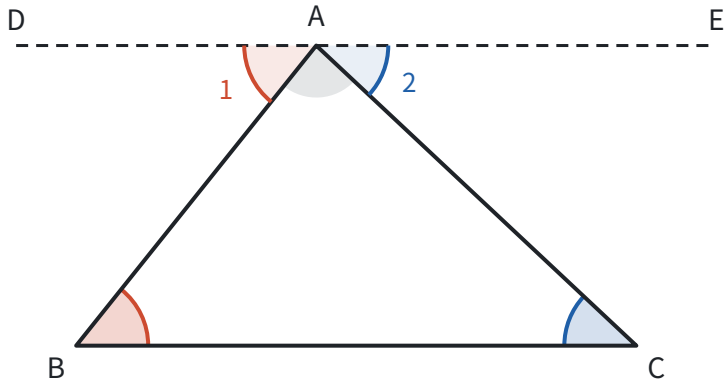
这就是**三角形的稳定性**：三条边的长度确定了，三角形的形状和大小就完全确定了。它的数学依据正是全等三角形的判定“边边边”（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。四边形四条边的长度确定了，四个角仍然可以变，所以没有稳定性。

自行车的车架、屋顶的桁架、斜拉桥的拉索都做成三角形，是利用稳定性；四边形框架上加一根斜木条，分成两个三角形，也就稳定了。反过来，伸缩门、升降架利用的正是四边形的不稳定性。

三角形的内角和

三角形的内角和等于 180°。 把三角形的三个角撕下来拼在一起，正好拼成一个平角，但这只是对一个三角形的实验；要说明所有三角形都这样，需要证明。

拼的时候，是把 $\angle B$ 和 $\angle C$ 搬到顶点 A 旁边。证明就是用平行线把这个“搬”的动作变成推理：



证明： 过点 A 作直线 $DE \parallel BC$。

因为 $DE \parallel BC$，所以 $\angle 1 = \angle B$，$\angle 2 = \angle C$（两直线平行，内错角相等）。

因为 $\angle 1$、$\angle BAC$、$\angle 2$ 合起来是平角 $\angle DAE$，所以 $\angle 1 + \angle BAC + \angle 2 = 180°$。

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180°$。

DE 是为了证明而添的线，叫**辅助线**，画成虚线。它的作用是造出平行线，让分散在三个顶点的角能通过内错角集中到一处（见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））。

由内角和立刻得到：

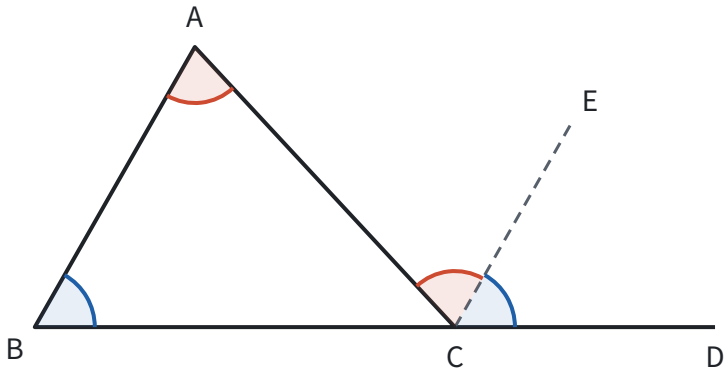
- 一个三角形最多有一个直角或钝角，否则两个角的和就达到或超过 $180°$ 了；
- **直角三角形的两个锐角互余；** 反过来，**有两个角互余的三角形是直角三角形。** 直角三角形 ABC 可以写成 Rt$\triangle ABC$。

三角形的外角

三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫三角形的**外角**。延长 BC 到 D，$\angle ACD$ 就是 $\triangle ABC$ 的一个外角。

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和。 推导：$\angle ACD$ 与 $\angle ACB$ 是邻补角，所以 $\angle ACD = 180° - \angle ACB$；由内角和，$\angle A + \angle B = 180° - \angle ACB$。所以

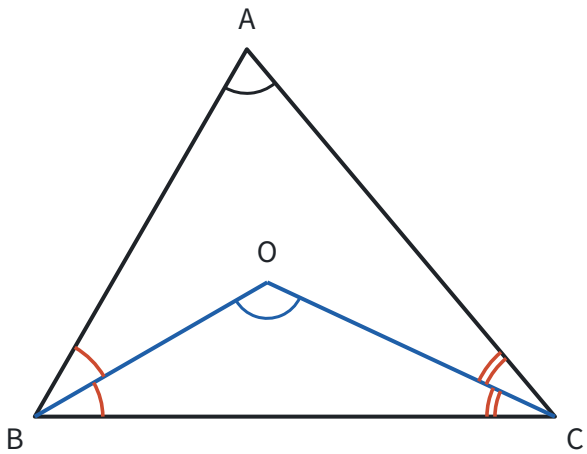
$$\angle ACD = \angle A + \angle B.$$



也可以直接用平行线看出来：过 C 作 $CE \parallel AB$，则 $\angle ACE = \angle A$（内错角），$\angle ECD = \angle B$（同位角），两部分合起来就是 $\angle ACD$。这和内角和的证明是同一个想法：那里过点 A 作 $DE \parallel BC$，用内错角把 $\angle B$、$\angle C$ 搬到顶点 A 处。

由此还知道，三角形的外角大于任何一个和它不相邻的内角。求角度时，外角常常比内角和更省事：它一步就把两个内角“加”在一起。

例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 70°$，$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O。求 $\angle BOC$ 的度数。



思路： $\angle BOC$ 在 $\triangle OBC$ 里，要求它，就要知道 $\angle OBC+\angle OCB$。这两个角分别是 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的一半，单独都求不出来，但它们的**和**可以由 $\triangle ABC$ 的内角和求出来。

解： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=110^\circ$。

因为 BO、CO 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，所以

$$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55^\circ.$$

在 $\triangle OBC$ 中，$\angle BOC=180^\circ-55^\circ=125^\circ$。

想一想： 把 70° 换成一般的 $\angle A$，同样的步骤给出

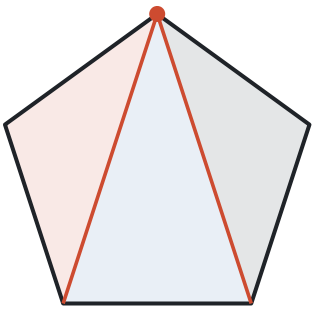
$$\angle BOC=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A.$$

$\angle A=70^\circ$ 时正好是 125°。这里整体求 $\angle OBC+\angle OCB$，而不是分别求两个角，是解这类题的关键：条件不够求出每一个量时，看看要用的是不是它们的和。

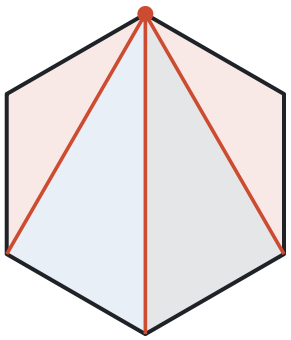
多边形的内角和与外角和

在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫**多边形**。连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫**对角线**。各边相等、各角也相等的多边形叫**正多边形**。这里只研究凸多边形（整个图形在任何一条边所在直线的同一侧）。

内角和。 从 n 边形的一个顶点出发，能向除了它自己和相邻两个顶点以外的 $n-3$ 个顶点画对角线，把多边形分成 $n-2$ 个三角形：



五边形：3 个三角形



六边形：4 个三角形

这些三角形的内角合起来正好是多边形的内角，所以

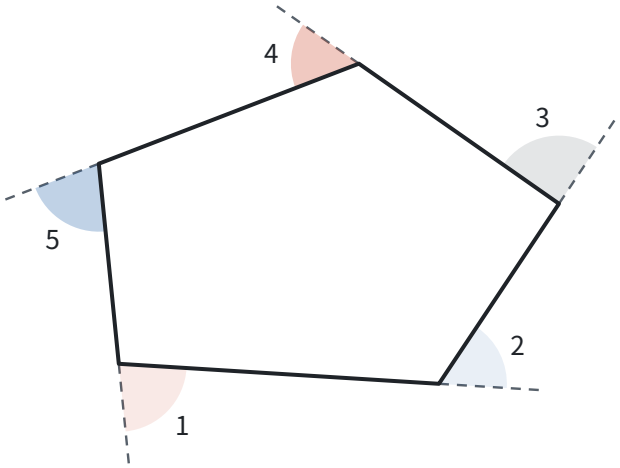
$$n\text{ 边形的内角和 }=(n-2)\cdot 180^\circ.$$

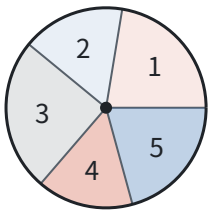
五边形是 540°，六边形是 720°。每个顶点都能引出 $n-3$ 条对角线，每条对角线被两个端点各算了一次，所以 n 边形共有 $(n(n-3))/2$ 条对角线。

外角和。 多边形每个顶点处，一边与相邻边的延长线组成的角是**外角**。每个顶点处的内角与外角是邻补角，和为 180°，n 个顶点合计 $n\cdot 180^\circ$。减去内角和，外角和就是

$$n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ.$$

多边形的外角和等于 360°，与边数无关。 换一个角度看更直观：沿多边形的边走一圈，每到一个顶点就转过一个外角，走回起点时正好转了一整圈。把各个外角拼在一起，正好是一个周角：





所以正 n 边形的每个外角是 $360°/n$，每个内角是 $180° - 360°/n$。求正多边形的内角，先求外角往往更快。

例 3 一个多边形的内角和是外角和的 3 倍，它是几边形？

思路： 外角和是固定的 $360°$，所以内角和是 $1080°$；内角和又能用边数 n 表示，于是得到关于 n 的方程。

解： 设它是 n 边形，则

$$(n-2)\cdot 180 = 3\times 360.$$

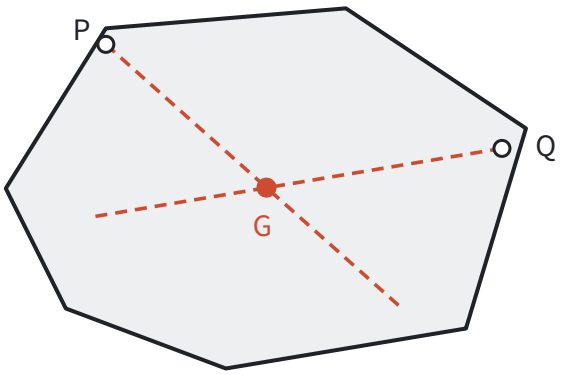
解得 $n-2=6$，$n=8$。它是八边形。

检验： 八边形的内角和是 $6\times 180° = 1080° = 3\times 360°$。

综合与实践：确定匀质薄板的重心

一块厚薄均匀、材料均匀的薄板，用一根手指在某一点就能把它顶平，这一点叫薄板的**重心**。怎样找到它？

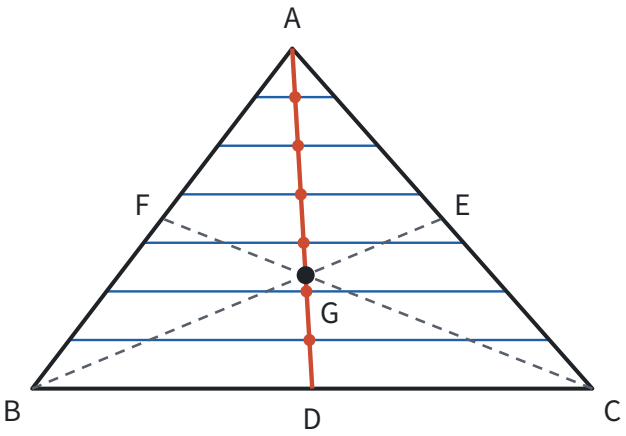
悬挂法。 在薄板边上任选一点 P 钻一个小孔，用细线把它吊起来。薄板静止时，重心一定在点 P 的正下方，所以沿着细线的方向在板上画一条直线，重心就在这条直线上。再换一点 Q 吊起来，又画出一条直线。两条直线的交点 G 就是重心。



两点确定一条直线，两条直线确定一个点，所以吊两次就够了；吊第三次，画出的直线也经过 G，可以用来检验。

三角形薄板的重心在哪里？ 把三角形薄板切成许多平行于 BC 的细条。每一根细条都是均匀的，它的重心在它的中点。而这些细条的中点都落在中线 AD 上（用相似可以证明，见第八部分“相似”（第 230 页））。所以整

块薄板在中线 AD 上是平衡的，重心在 AD 上。同样的道理，重心也在另两条中线 BE、CF 上：



所以**三角形薄板的重心是三条中线的交点**，这就是这个点叫“重心”的原因。用悬挂法吊一块三角形薄板，画出的直线正好都经过中线的交点，可以动手验证。

易错点

- **判断三边能否组成三角形时只验证一个不等式，而且选错了。** 应该检验“较短的两边之和大于最长边”；只检验“最长边加一条短边大于另一条短边”永远成立，说明不了问题。
- **等腰三角形的边不分腰和底就直接算。** 已知两边长，要分别以每一条为腰讨论，再用三边关系检验（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。
- **钝角三角形的高画在内部。** 钝角三角形里，从锐角顶点出发的高在三角形外，要延长对边再作垂线。
- **把三角形的角平分线当成射线。** 三角形的角平分线、中线、高都是线段。
- **外角找错。** 外角是一边与**另一边的延长线**组成的角，不是随便一个在三角形外面的角；“与它不相邻的两个内角”也不能包括和它组成邻补角的那个内角。
- **多边形的边数算出小数。** 边数 n 必须是不小于 3 的正整数。比如“内角和是 $1000°$”解出的 n 不是整数，就说明这样的多边形不存在。
- **以为多边形的外角和随边数增加。** 内角和随边数增加，外角和始终是 $360°$。

联系

- **不等式：** 三边关系就是不等式，第三边的取值范围是一个不等式组的解集。见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **代数式：** 内角和 $(n-2)\cdot 180°$、对角线条数 $(n(n-3))/2$ 都是用字母 n 表示的一般规律，代入不同的 n 就得到不同多边形的结果。见第三部分“代数式”（第 54 页）。
- **相交线与平行线：** 内角和、外角的证明都靠平行线的性质“搬角”。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **全等三角形：** 三角形的稳定性就是“边边边”；判定全等时反复要用内角和（如由 ASA 推出 AAS）。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **轴对称与等腰三角形：** 等腰三角形底边上的高、中线、顶角平分线重合在一起。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **勾股定理：** 直角三角形的两个锐角互余，三边之间还有 $a^2+b^2=c^2$ 的关系。见第五部分“勾股定理”（第 149

页）。

- **四边形：** 四边形的内角和是 360°，由对角线把它分成两个三角形得到；三角形的中位线也在那里。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **与圆有关的位置关系：** 三条角平分线的交点是内切圆的圆心，三边垂直平分线的交点是外接圆的圆心。见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。

真题： 2026 年第 6 题（第 356 页）、2025 年第 4 题（第 369 页）、2024 年第 20 题（第 391 页）。

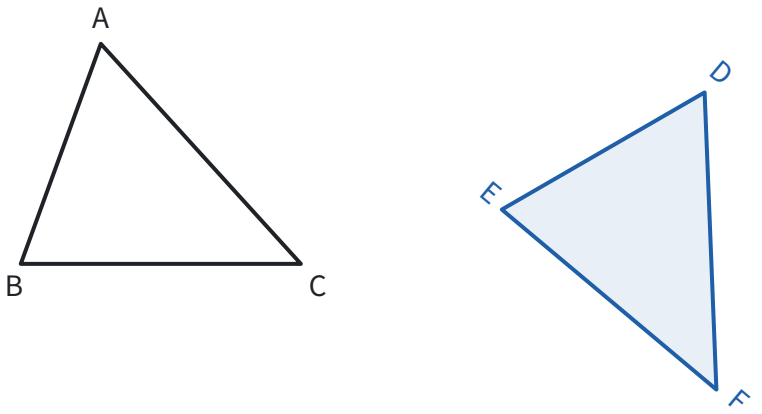
全等三角形 ★

> 对应人教版八年级上册第十四章。

能够完全重合的两个三角形叫全等三角形。 全等就是形状和大小都相同，只是位置不同：把一个三角形经过平移、翻折、旋转，就能和另一个完全重合。

从哪里来

用同一块模板描出来的两个三角形、一块玻璃摔碎前后的形状、复印出来的图形，都是“一模一样”的。数学里用“能不能完全重合”来说清“一模一样”：



重合时，互相重合的顶点叫**对应顶点**，互相重合的边叫**对应边**，互相重合的角叫**对应角**。上图中 D 和 A、E 和 B、F 和 C 重合，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，读作“$\triangle ABC$ 全等于 $\triangle DEF$”。

记号里的字母顺序就是对应关系： 写在相同位置上的字母是对应顶点。写成 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，就说明 A 对 D、B 对 E、C 对 F，所以 AB 对 DE、$\angle B$ 对 $\angle E$。反过来，对应关系没弄清，就不要急着写全等式。

全等三角形的性质

既然能完全重合，重合的部分当然相等：

- **全等三角形的对应边相等；**
- **全等三角形的对应角相等。**

这是全等最常用的地方：要证两条线段相等或两个角相等，先找到分别包含它们的两个三角形，证明这两个三

角形全等，再用这条性质。

怎样找对应边、对应角：

- 按全等式里字母的顺序找；
- 两个三角形共用的边（公共边）、共用的角（公共角）、对顶角，一定是对应的；
- 最长边对最长边，最大角对最大角。

判定：几个条件就够了

三角形有三条边、三个角，共 6 个量。证明全等时，不必把 6 个量都比一遍。问题变成：**最少知道几个量，三角形的形状和大小就被“定死”了？**

只知道 1 个或 2 个量，定不死。 比如只知道两条边分别是 3 和 4，它们的夹角可大可小，第三条边就可长可短，能画出很多个不同的三角形。

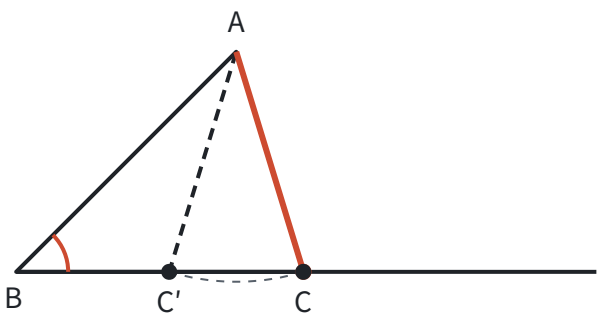
知道 3 个量，大多数情况能定死：

已知	名称	为什么能定死
三边分别相等	边边边（SSS）	先画一条边，另两条边的长度确定了第三个顶点到两端的距离，用圆规画两段弧，交点只有一个（在同一侧）。这就是三角形的**稳定性**
两边和它们的夹角分别相等	边角边（SAS）	夹角确定了两条边的方向，两边的长度确定了两个端点，第三条边也就确定了
两角和它们的夹边分别相等	角边角（ASA）	夹边确定了两个顶点，两个角确定了从两端出发的两条射线的方向，两条射线只交于一点
两角和其中一角的对边分别相等	角角边（AAS）	三角形内角和是 $180°$，两个角相等，第三个角也相等，于是转化成 ASA

SSS、SAS、ASA 在教材里作为**基本事实**，直接使用，不再证明（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。AAS 是由 ASA 和三角形内角和推出来的定理。

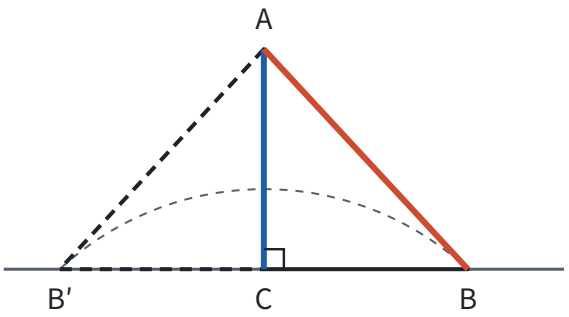
两个反例：3 个量也可能定不死。

两边和其中一边的对角（SSA）不能判定全等。 下图中，AB 的长度、$\angle B$ 的大小都固定，AC 的长度也固定。以 A 为圆心、AC 为半径画弧，和 $\angle B$ 的另一边可能交于两个点 C 和 C'，得到的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 满足同样的三个条件，却明显不全等：



三个角分别相等（AAA）也不能判定全等。 把一个三角形按比例放大，三个角都不变，边却变长了。这样的两个三角形形状相同、大小不同，叫相似三角形（见第八部分“相似”（第 230 页））。

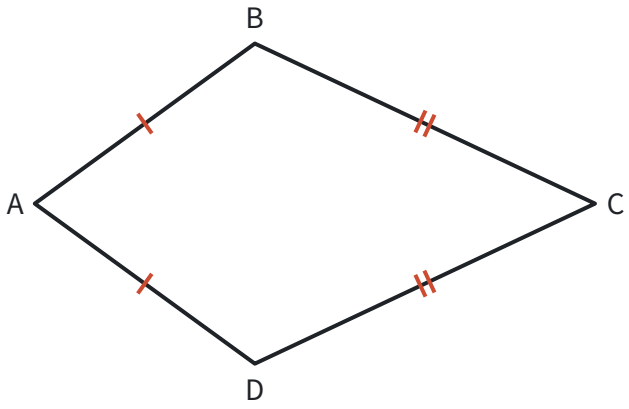
直角三角形的特例：斜边、直角边（HL）。 SSA 一般不行，但如果那个已知角是直角，就可以。下图中，$\angle C$ 是直角，直角边 AC 和斜边 AB 的长度固定。以 A 为圆心、AB 为半径画弧，和直线 CB 交于 B 和 B' 两点，这两点关于直线 AC 对称，所以 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ACB'$ 沿 AC 翻折能重合，仍然是全等的：



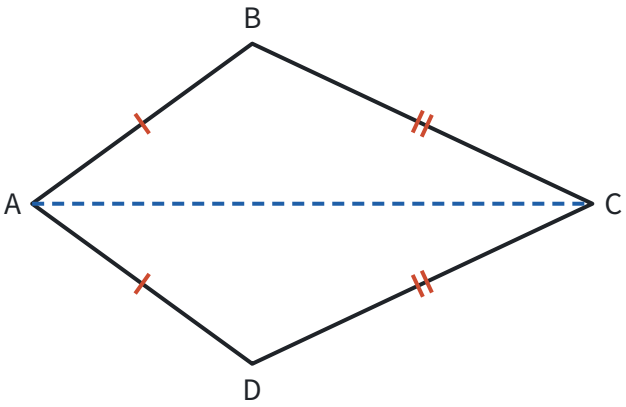
所以**斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等**，简称“斜边、直角边”或 HL。学了勾股定理后还能换个角度看：直角三角形的斜边和一条直角边确定了，另一条直角边也就确定了，于是变成 SSS（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。

怎样找全等：从结论往回想

例 1 如图，$AB = AD$，$CB = CD$。求证：$\angle B = \angle D$。



思路： 要证两个角相等，先找分别含有 $\angle B$ 和 $\angle D$ 的两个三角形。连接 AC，$\angle B$ 在 $\triangle ABC$ 里，$\angle D$ 在 $\triangle ADC$ 里。再看这两个三角形已经有哪些条件：$AB = AD$，$CB = CD$，还差一个。AC 是两个三角形共用的边，于是三边都相等，用 SSS。



证明： 连接 AC。在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

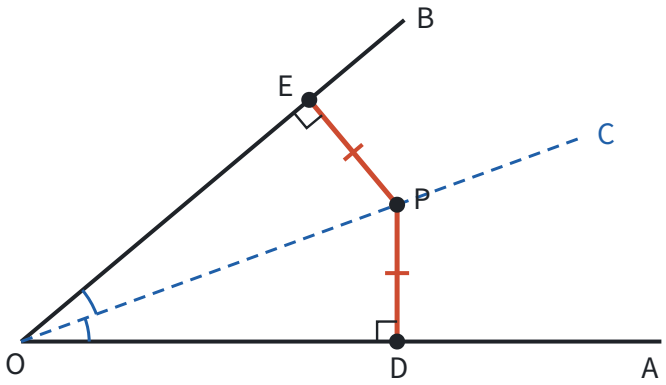
- $AB = AD$（已知），
- $CB = CD$（已知），
- $AC = AC$（公共边），

所以 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$（SSS），所以 $\angle B = \angle D$（全等三角形的对应角相等）。

回顾： 这道题的想法是“要证什么相等 → 找包含它们的两个三角形 → 数一数已有几个条件 → 缺的条件去图里找”。公共边、公共角、对顶角是图里最常见的“隐藏条件”。

角的平分线

角平分线上的点到角两边的距离相等。 这里的“距离”是点到直线的垂线段的长度。



例 2　如图，OC 平分 $\angle AOB$，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA$ 于点 D，$PE \perp OB$ 于点 E。求证：$PD = PE$。

思路： 要证 $PD = PE$，找含有这两条线段的三角形：$\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$。已有 $\angle POD = \angle POE$（角平分线）、$\angle PDO = \angle PEO = 90°$（垂直），再加上公共边 OP，是“两角和其中一角的对边”，用 AAS。

证明： 因为 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，所以 $\angle PDO = \angle PEO = 90°$。

在 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ 中，

- $\angle PDO = \angle PEO$（已证），
- $\angle POD = \angle POE$（OC 平分 $\angle AOB$），
- $OP = OP$（公共边），

所以 $\triangle PDO \cong \triangle PEO$（AAS），所以 $PD = PE$。

反过来也成立：角的内部到角两边距离相等的点，在这个角的平分线上。 已知 $PD=PE$、$PD\perp OA$、$PE\perp OB$，$\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ 是有公共斜边 OP 的两个直角三角形，用 HL 证出全等，就得到 $\angle POD=\angle POE$。这两个命题的条件和结论正好互换，互为逆命题，而且都是真命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。

易错点

- **对应顶点的顺序写错。** $\triangle ABC\backsimeq\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC\backsimeq\triangle EDF$ 意思不同。写全等式前先确认对应关系，字母要一一对齐。
- **用 SSA 判定全等。** “两边和其中一边的对角”不能判定。检查一下：已知的角是不是夹在两条已知边**中间**？是夹角才是 SAS。
- **用 AAA 判定全等。** 三个角相等只能说明形状相同，大小可能不同。
- **漏写公共边、公共角。** 它们在图上“看得见”，但在证明里也要作为一个条件写出来，并注明理由。
- **HL 用在非直角三角形上。** HL 只适用于直角三角形，证明时要先说明两个三角形都是直角三角形。
- **把角平分线上的点到边上任意一点的线段当作距离。** 距离必须是垂线段，所以题目里要有“垂直”，或者自己作垂线。

联系

- **图形的变化：** 全等就是一个图形经过平移、轴对称（翻折）、旋转后与另一个重合。这三种变换都不改变形状和大小。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **等腰三角形：** “等边对等角”“三线合一”都要借助全等来证明。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **尺规作图：** “作一个角等于已知角”“作角的平分线”的依据是 SSS。见第五部分“尺规作图”（第 169 页）。
- **相似：** 全等是相似比为 1 的相似。相似的判定和全等的判定一一对应，只是把“边相等”换成“边成比例”。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **勾股定理：** HL 可以看成“勾股定理 + SSS”。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **一次函数：** 一次函数的图象是直线，理由正是一级一级台阶三角形全等（SAS）。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。

真题： 2026 年第 19 题（第 362 页）、2026 年第 23 题（第 366 页）、2025 年第 23 题（第 379 页）、2024 年第 23 题（第 394 页）、2023 年第 14 题（第 400 页）。

轴对称与等腰三角形 ★

> 对应人教版八年级上册第十五章。

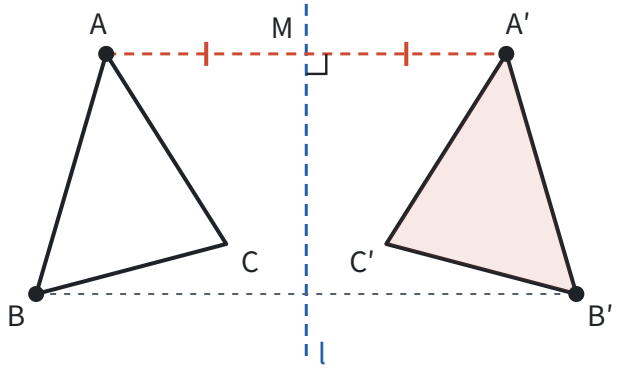
沿一条直线对折后能够完全重合，就是轴对称；等腰三角形是有对称轴的三角形，它的性质都可以从这条对称轴读出来。 线段的垂直平分线是轴对称的“骨架”：对称轴就是对应点连线的垂直平分线。

从哪里来：对折能重合

蝴蝶的两翼、剪纸的“囍”字、脸的左右两半，都有同一个特点：沿某条直线对折，两边完全重合。数学里把这件事说成两种情况：

- 一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，这个图形叫**轴对称图形**，这条直线叫它的**对称轴**。
- 两个图形沿一条直线折叠后能够完全重合，叫这两个图形**关于这条直线对称**。重合的点叫**对称点**（对应点）。

前者说的是一个图形自己和自己，后者说的是两个图形之间；把两个成轴对称的图形合起来看，就是一个轴对称图形。



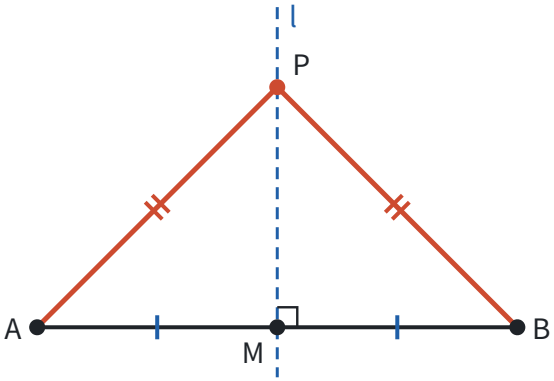
对折的时候，点 A 落到 A'。折痕 l 和线段 AA' 有什么关系？设它们交于点 M。对折时 M 在折痕上不动，MA 正好盖住 MA'，所以 $MA = MA'$；MA 和 l 所成的角，折过去正好盖住 MA' 和 l 所成的角，这两个角相等，合起来是平角，所以都是 $90°$。于是：

对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。 另外，成轴对称的两个图形全等（能重合），对应线段相等，对应角相等（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。

要研究轴对称，先要把“垂直平分线”弄清楚。

线段的垂直平分线

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫这条线段的**垂直平分线**（也叫中垂线）。



性质：线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等。

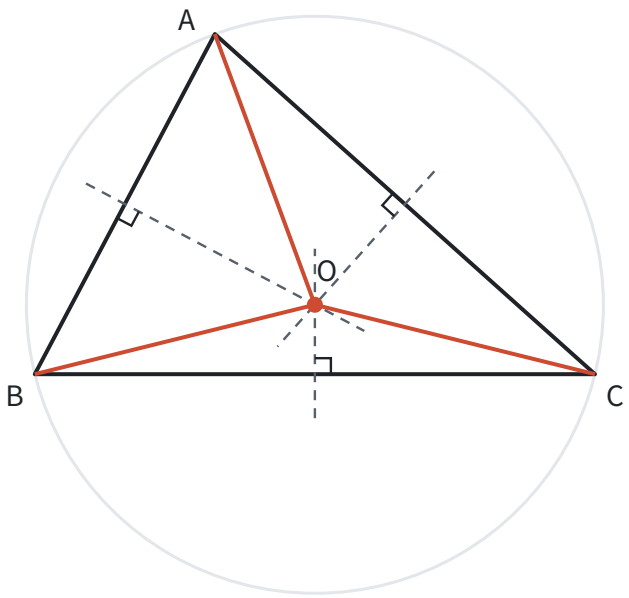
如图，直线 l 垂直平分 AB，垂足为 M，点 P 在 l 上。在 $\triangle PMA$ 和 $\triangle PMB$ 中，$AM = BM$，$\angle PMA = \angle PMB = 90°$，$PM = PM$，所以 $\triangle PMA \cong \triangle PMB$（SAS），$PA = PB$。从轴对称看更直接：沿 l 对折，A 落到 B，P 不动，PA 就盖住了 PB。

反过来：到线段两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

已知 $PA = PB$。取 AB 的中点 M，连接 PM。在 $\triangle PMA$ 和 $\triangle PMB$ 中，$PA = PB$，$AM = BM$，$PM = PM$，所以 $\triangle PMA \cong \triangle PMB$（SSS），$\angle PMA = \angle PMB$。这两个角合起来是平角，所以都是 $90°$，PM 就是 AB 的垂直平分线，P 在它上面。（P 在 AB 上时，P 就是中点 M。）

两句话合起来说明：**线段的垂直平分线，就是到线段两端距离相等的所有点组成的直线。** 以后要证“两条线段相等”，可以想到垂直平分线；要证“一个点在垂直平分线上”，只要证它到两端距离相等。尺规作图里“作线段的垂直平分线”，找的正是两个到两端距离相等的点（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。

例 1 求证：三角形三条边的垂直平分线交于一点，并且这个点到三个顶点的距离相等。



思路： 三条线交于一点，可以先让两条线相交，再证第三条线也经过这个交点。“点在垂直平分线上”和“到两端距离相等”可以互相转化，所以把问题都换成距离来说。

证明： 设 AB、BC 的垂直平分线交于点 O，连接 OA、OB、OC。

- 点 O 在 AB 的垂直平分线上，所以 $OA = OB$；
- 点 O 在 BC 的垂直平分线上，所以 $OB = OC$；
- 所以 $OA = OC$，点 O 在 AC 的垂直平分线上（到线段两端距离相等的点在垂直平分线上）。

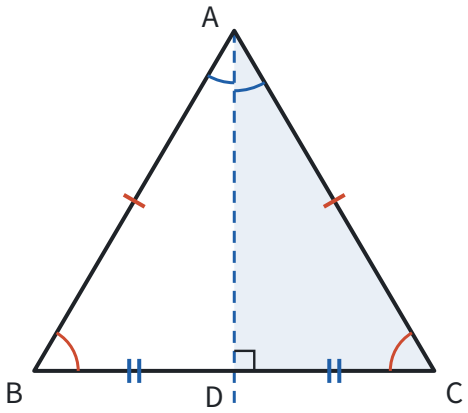
所以三条垂直平分线都经过点 O，并且 $OA = OB = OC$。

回顾： 以 O 为圆心、OA 为半径画圆，这个圆经过三个顶点，叫三角形的外接圆，O 叫外心（见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页））。第五部分“全等三角形”（第 136 页）里，角平分线的性质（角平分线上的点到角两边的距离相等）和它的逆命题（角的内部到角两边距离相等的点，在这个角的平分线上）配合使用，也能证出三条角平分线交于一点，思路完全一样。

等腰三角形：对称轴带来的性质

有两条边相等的三角形叫**等腰三角形**。相等的两边叫**腰**，另一边叫**底边**，两腰的夹角叫**顶角**，腰和底边的夹角叫**底角**。

先用垂直平分线看一看：$AB=AC$，说明点 A 到 B、C 的距离相等，所以 A 在底边 BC 的垂直平分线上。沿这条垂直平分线对折，B 和 C 互相重合，A 不动，整个三角形和自己重合。所以**等腰三角形是轴对称图形，对称轴是底边的垂直平分线**，它经过顶点 A。



对折时重合的东西都相等，于是得到两条性质：

- **等腰三角形的两个底角相等**（简称“等边对等角”）：$\angle B$ 和 $\angle C$ 重合。
- **等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合**（简称“三线合一”）：对称轴平分顶角，平分底边，又垂直于底边，一条线身兼三职。

写成证明，要借助全等。作 $\angle BAC$ 的平分线 AD，交 BC 于点 D。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

- $AB=AC$（已知），
- $\angle BAD=\angle CAD$（AD 平分 $\angle BAC$），
- $AD=AD$（公共边），

所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$（SAS）。于是 $\angle B=\angle C$；$BD=CD$，AD 是底边上的中线；$\angle ADB=\angle ADC$，两角合起来是平角，都是 $90°$，AD 是底边上的高。

三线合一怎么用： 在等腰三角形里，只要知道这三条线中的一条，就可以说它也是另外两条。比如已知 $AB=AC$、D 是 BC 的中点，就能直接得到 $AD\perp BC$ 和 $\angle BAD=\angle CAD$，不必再证一次全等。

例 2　等腰三角形的一个内角是 $70°$，求另外两个角。

思路： 题目没说 $70°$ 是顶角还是底角，两种都可能，要分别算，再检查每种情况能不能构成三角形。

解：

- 如果 $70°$ 是顶角，两个底角相等，各是 $(180°-70°)\div 2=55°$；
- 如果 $70°$ 是底角，另一个底角也是 $70°$，顶角是 $180°-70°\times 2=40°$。

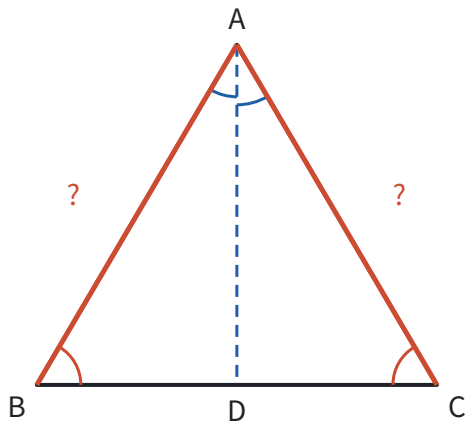
所以另外两个角是 $55°$、$55°$，或者 $70°$、$40°$。

想一想： 如果那个内角是 $110°$ 呢？它要是底角，两个底角加起来就是 $220°$，超过了 $180°$，不可能。所以 $110°$

只能是顶角，底角各 35°，只有一种答案。钝角或直角只能当顶角。

判定：等角对等边

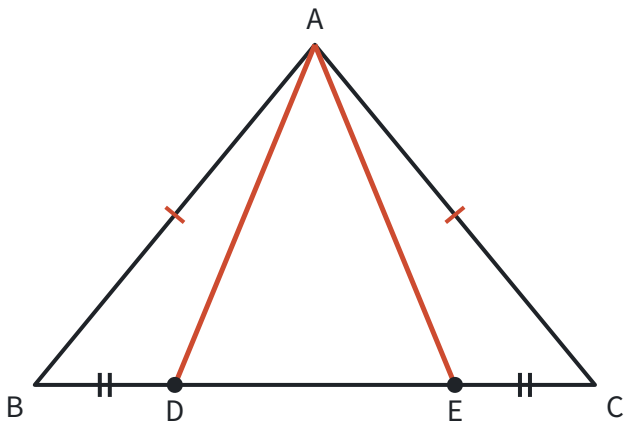
如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简称“等角对等边”）。它和“等边对等角”的条件、结论互换，是逆命题，而且也是真命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。



证明： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$。作 $\angle BAC$ 的平分线 AD，交 BC 于点 D。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\angle B = \angle C$，$\angle BAD = \angle CAD$，$AD = AD$，所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（AAS），$AB = AC$。

这样，判断一个三角形是不是等腰三角形就有了两条路：边相等（定义），或者角相等（这条判定）。题目里出现角平分线和平行线时，常常会“生出”相等的角，再用等角对等边得到相等的边，例 4 就是这样。

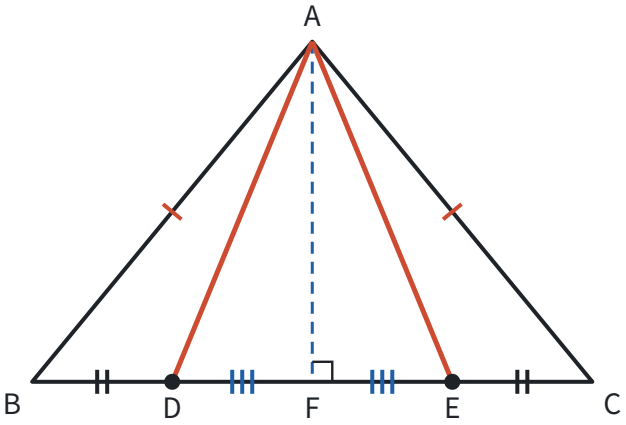
例 3 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 D、E 在 BC 上，$BD = CE$。求证：$AD = AE$。



思路一：找全等。 AD 在 $\triangle ABD$ 里，AE 在 $\triangle ACE$ 里。已知 $AB = AC$、$BD = CE$，还缺一个条件；$AB = AC$ 说明两个底角相等，$\angle B = \angle C$ 正好是这两边的夹角，用 SAS。

证明一： 因为 $AB = AC$，所以 $\angle B = \angle C$（等边对等角）。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$AB = AC$，$\angle B = \angle C$，$BD = CE$，所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$（SAS），$AD = AE$。

思路二：用对称轴。 整个图形看起来左右对称，对称轴是底边上的高。如果能说明 A 在 DE 的垂直平分线上，$AD = AE$ 就直接出来了。

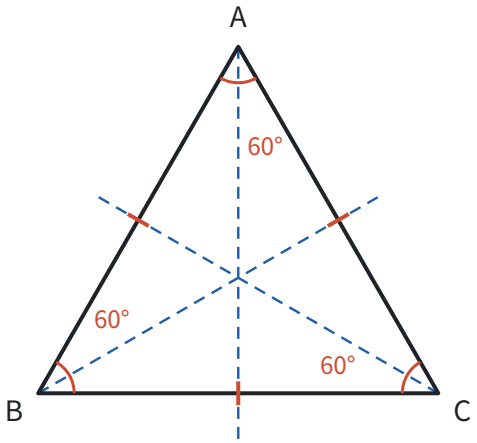


证明二： 作 $AF \perp BC$，垂足为 F。因为 $AB = AC$，所以 $BF = CF$（三线合一）。又 $BD = CE$，所以 $BF - BD = CF - CE$，即 $DF = EF$。于是 AF 垂直平分 DE，所以 $AD = AE$（垂直平分线上的点到线段两端的距离相等）。

想一想： 两种证法用的都是“对称”：证法一把对称藏在全等里，证法二直接用对称轴。证法二还说明了更多的东西：只要 D、E 关于 AF 对称，不管它们在 BC 上还是在 BC 的延长线上，结论都成立。遇到明显左右对称的图形，先找对称轴，常常比找全等更快。

等边三角形

三条边都相等的三角形叫**等边三角形**（正三角形）。它是特殊的等腰三角形：把任何一条边看成底边，另两条边都是腰。



性质：等边三角形的三个内角都相等，都等于 60°。 由 $AB = AC$ 得 $\angle B = \angle C$，由 $BA = BC$ 得 $\angle A = \angle C$，所以三个角相等；内角和是 $180°$，每个角是 $60°$。等边三角形有三条对称轴，每条都是一个角的平分线所在的直线，也是对边上的中线、高所在的直线。

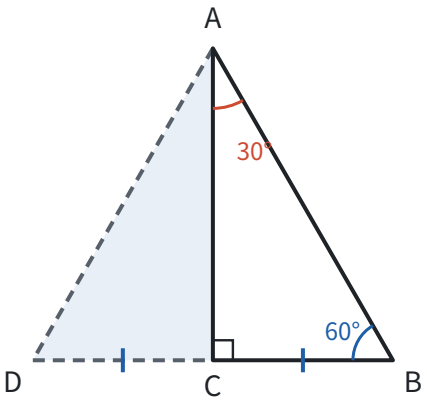
判定：

- 三个角都相等的三角形是等边三角形（由等角对等边，三边两两相等）；
- **有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。**

第二条为什么成立？分两种情况：$60°$ 是顶角时，两个底角各是 $(180° - 60°) \div 2 = 60°$；$60°$ 是底角时，另一个底角也是 $60°$，顶角是 $180° - 120° = 60°$。两种情况三个角都是 $60°$，所以是等边三角形。

含 30° 角的直角三角形

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半。



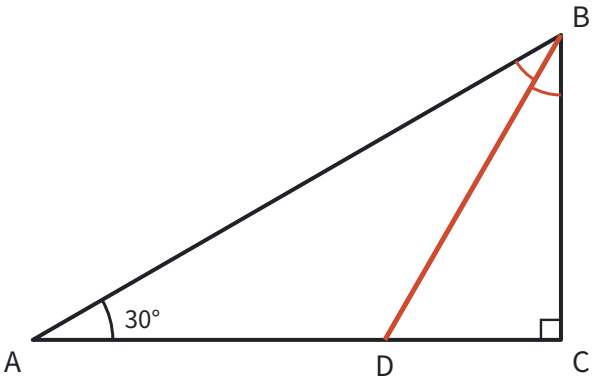
从哪里想到： 30° 是 60° 的一半，而 60° 是等边三角形的角。把这个直角三角形沿较长的直角边翻折一下，看能不能拼出等边三角形。

证明： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，所以 $\angle B=60°$。延长 BC 到点 D，使 $CD=BC$，连接 AD。

- $AC\perp BD$ 且 $CD=BC$，所以 AC 垂直平分 BD，$AD=AB$；
- $\triangle ABD$ 是有一个角（$\angle B$）为 60° 的等腰三角形，所以是等边三角形，$AB=BD$；
- $BD=2BC$，所以 $AB=2BC$，即 BC 等于斜边 AB 的一半。

$\triangle ADC$ 正是 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折得到的，所以这个直角三角形就是等边三角形的一半。学了勾股定理后还能算出另一条直角边：三边之比是 $1:\sqrt{3}:2$（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。

例 4 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，BD 平分 $\angle ABC$，交 AC 于点 D，$CD=2$。求 AC 的长。



思路： AC 被 D 分成 AD 和 CD 两段，CD 已知，只要求 AD。先算角：$\angle ABC=60°$，被平分成两个 30°。于是图里有两件事可用：$\triangle BCD$ 是含 30° 角的直角三角形；$\angle ABD=\angle A$，$\triangle ABD$ 是等腰三角形。

解： 因为 $\angle C=90°$，$\angle A=30°$，所以 $\angle ABC=60°$。BD 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle CBD=\angle ABD=30°$。

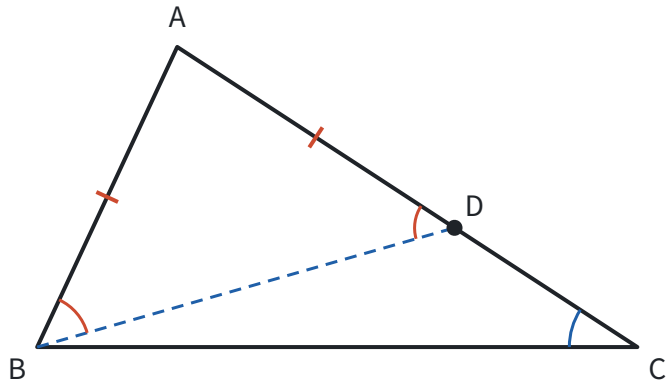
- 在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=30°$，CD 是斜边 BD 的一半，所以 $BD=2CD=4$；
- 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=\angle A=30°$，所以 $AD=BD=4$（等角对等边）；
- $AC=AD+CD=4+2=6$。

回顾： 结果 $AD=2CD$，D 是 AC 的一个三等分点。这道题里，角平分线“生出”了相等的角，相等的角又“生出”了相等的边，这是等角对等边最常见的用法。

大边对大角（拓展）

等腰三角形说的是“边相等 ⇔ 角相等”，自然会问：边不相等时，角怎样？

在一个三角形中，较大的边所对的角也较大。



证明： 在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，要证 $\angle ABC>\angle C$。想法是把“不等”转化成“相等”：在 AC 上截取 $AD=AB$，连接 BD。

- $AD=AB$，所以 $\angle ABD=\angle ADB$（等边对等角）；
- $\angle ADB$ 是 $\triangle BDC$ 的外角，所以 $\angle ADB>\angle C$；
- D 在 $\angle ABC$ 的内部，所以 $\angle ABC>\angle ABD$。

于是 $\angle ABC>\angle ABD=\angle ADB>\angle C$。

反过来，**较大的角所对的边也较大**。可以用反证法：如果 $\angle B>\angle C$，而 AC 不大于 AB，那么要么 $AC=AB$，得到 $\angle B=\angle C$；要么 $AC<AB$，由上面的结论得到 $\angle B<\angle C$。两种情况都和 $\angle B>\angle C$ 矛盾（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

由此马上知道：直角三角形中直角最大，所以**斜边最长**；从直线外一点到直线的所有线段中，垂线段最短。

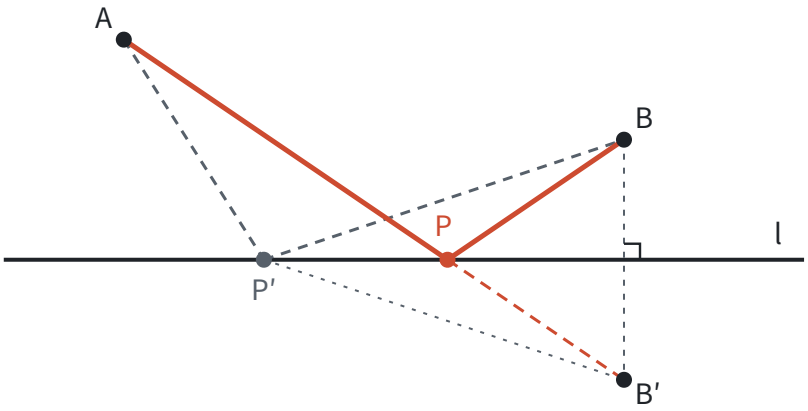
最短路径问题

问题　如图，A、B 两个村庄在一条河 l 的同侧，要在河边修一个水泵站 P，分别向两村供水。P 修在哪里，所用水管 $PA+PB$ 最短？



思路： 能直接用的基本事实是“两点之间，线段最短”（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。可是 PA、PB 在 P 处拐了个弯，不是一条线段。如果能把 PB 换成一条等长的线段，放到 l 的另一侧，折线 $A \to P \to B$ 就可能被拉直。轴对称正好能做到：对称不改变长度。

作法： 作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB'，交 l 于点 P。点 P 就是所求的位置。

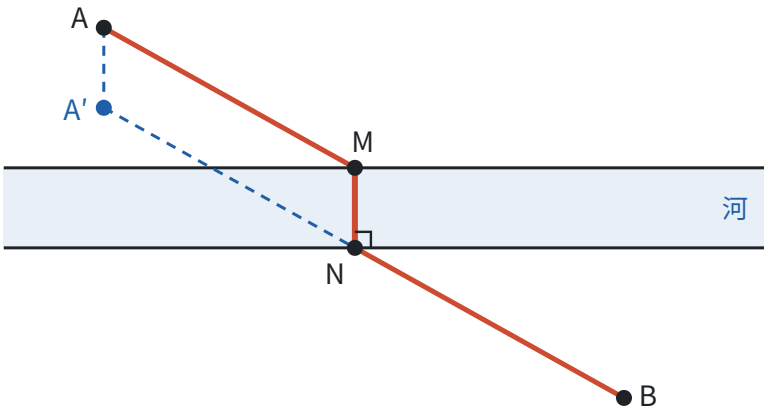


为什么最短： l 垂直平分 BB'，所以 l 上任意一点到 B 和 B' 的距离相等。

- 对点 P：$PA + PB = PA + PB' = AB'$；
- 对 l 上另外任意一点 P'：$P'A + P'B = P'A + P'B'$。A、P'、B' 不在一条直线上时，它们组成三角形，两边之和大于第三边，所以 $P'A + P'B' > AB'$。

所以 $PA + PB$ 最短。不管 P' 在 l 上的什么位置，折线 $A \to P' \to B'$ 都比线段 AB' 长，只有 P' 落在 P 时，折线才被拉成直线。

同类问题：造桥选址。 A、B 两地在一条河的两岸，河的两岸平行，要在河上垂直于河岸造一座桥 MN，使路径 $A \to M \to N \to B$ 最短。桥长 MN 等于河宽，是固定的，只要 $AM + NB$ 最短。



这次两段路被桥隔开，接不起来。办法是把 A 沿垂直于河岸的方向平移一个河宽，得到 A'。AA' 和 MN 平行且相等，四边形 $AA'NM$ 是平行四边形，$AM = A'N$（见第五部分“四边形”（第 157 页））。于是 $AM + NB = A'N + NB$，连接 $A'B$ 交对岸于 N 时最短。

两道题是同一个想法： 用一种不改变长度的变换（轴对称、平移），把拐弯的路径或断开的路径接成一条线段，再用“两点之间线段最短”。

易错点

- **等腰三角形不分情况。** 只说“一个角是 70°”，要分它是顶角还是底角；只说“两边长 3 和 7”，要分哪条是腰，并检查三边关系：腰为 3 时 $3+3<7$，不能构成三角形，只能是 7、7、3，周长 17。
- **三线合一用错了线。** 重合的是**顶角**的平分线、**底边**上的中线、**底边**上的高。腰上的中线和腰上的高一般不重合。
- **把对称轴说成线段或射线。** 对称轴是直线。等腰三角形的对称轴是“顶角平分线所在的直线”，不能说“对称轴是顶角平分线”，因为角的平分线是射线，三角形的角平分线是线段。
- **30° 角的结论用错边。** 等于斜边一半的是 30° 角**所对**的直角边，也就是较短的那条直角边；而且只在直角三角形里成立。
- **垂直平分线的性质和判定弄反。** 已知点在垂直平分线上，推距离相等，是性质；已知距离相等，推点在垂直平分线上，是判定。写理由时要分清。
- **最短路径不看两点在直线的哪一侧。** 两点在直线两侧时，直接连接两点，和直线的交点就是所求；在同侧时，才需要作对称点。

联系

- **全等三角形：** 本页的性质都借助全等来证；轴对称的两个图形本来就全等。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 画轴对称图形，坐标系中关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **有理数：** 互为相反数的两个数在数轴上关于原点对称，是对称最早的样子。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **二次函数：** 抛物线是轴对称图形，顶点在对称轴上，和等腰三角形的顶点在对称轴上是同一种样子；对称点的纵坐标相等，常用来求对称轴。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **尺规作图：** 作线段的垂直平分线、作角平分线、过一点作垂线，依据都是轴对称。见第五部分“尺规作图”（第 169 页）。
- **勾股定理：** 含 30° 角的直角三角形三边之比 $1:\sqrt{3}:2$，要用勾股定理算出。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **四边形：** 菱形的对角线互相垂直，靠的就是等腰三角形的三线合一。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **圆：** 外心是三边垂直平分线的交点；圆是轴对称图形，垂径定理就是圆的对称性。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）和第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **分类讨论：** 等腰三角形的边、角不确定时要分情况，是分类讨论最常见的场合。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2026 年第 15 题（第 359 页）、2025 年第 15 题（第 373 页）、2023 年第 10 题（第 399 页）、2022 年第 18 题（第 415 页）。

勾股定理 ★

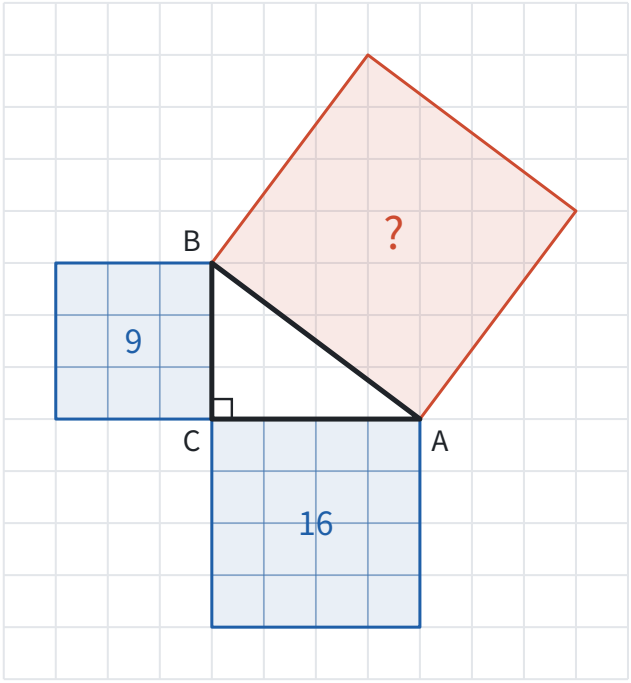
> 对应人教版八年级下册第二十章。

直角三角形两条直角边的平方和，等于斜边的平方：如果直角边是 a、b，斜边是 c，那么 $a^2+b^2=c^2$。 它把直角三角形的“形”（有一个直角）变成了三条边之间的“数”的关系：知道任意两条边，就能算出第三条。

从哪里来

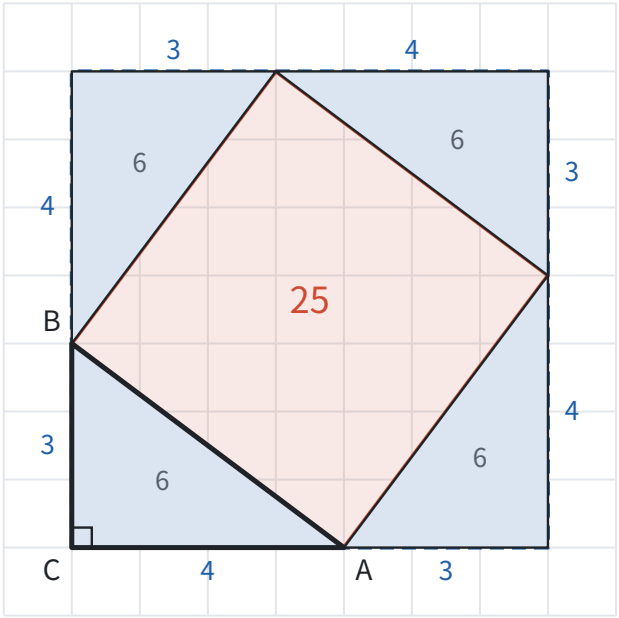
两条直角边确定了，直角三角形就确定了（两边和它们的夹角，SAS），斜边的长度也就跟着确定了。所以斜边和两条直角边之间一定有一个确定的关系。这个关系是什么？

在方格纸上画一个直角三角形 ABC，$\angle C=90°$，两条直角边沿着格线：$CA=4$，$CB=3$。在三条边上各向外画一个正方形，看看它们的面积：



两条直角边上的正方形沿着格线，直接数格子：面积是 9 和 16。

斜边上的正方形斜放着，格线把它切得零零碎碎，没法直接数。换个办法：顺着格线，在它外面套一个大正方形，让它的四个顶点正好落在大正方形的四条边上：



- 大正方形的每条边都被分成 3 和 4 两段，边长是 $3+4=7$，面积是 $7\times 7=49$。
- 大正方形比斜放的正方形多出四个角上的直角三角形。每一个的两条直角边都是 3 和 4（左下角那个就是 $\triangle ABC$ 本身），面积都是 $1/2\times 3\times 4=6$。
- 所以斜边上的正方形面积是 $49-4\times 6=25$。用尺子量一量，斜边 AB 正好长 5，$5\times 5=25$，对得上。

把三个面积放在一起：$9+16=25$。再换一个直角三角形试试，比如两条直角边都是 1 的等腰直角三角形：两个小正方形面积都是 1，斜边上的正方形用同样的办法算，面积是 2，也有 $1+1=2$。

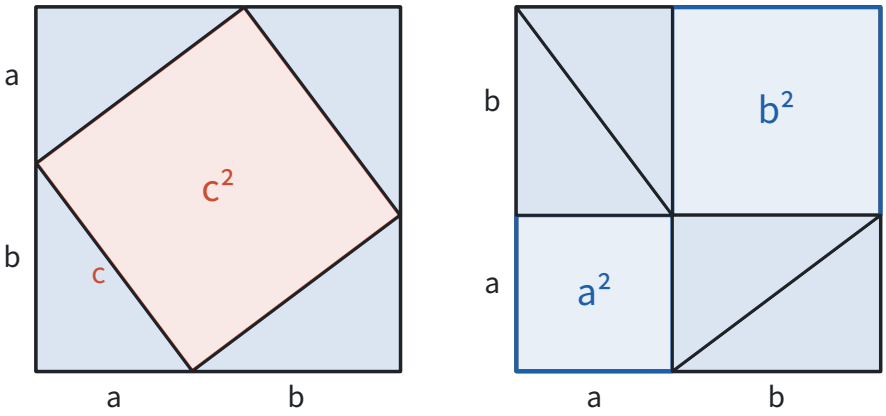
于是猜想：**两条直角边上的正方形面积之和，等于斜边上的正方形面积。** 边长的平方就是正方形的面积，所以这个猜想写成式子就是 $a^2+b^2=c^2$。

几个例子只能让人相信，不能说明所有直角三角形都这样，要证明。“平方”就是“面积”，所以证明也从面积入手。

我国古代把直角三角形较短的直角边叫“勾”，较长的直角边叫“股”，斜边叫“弦”，所以这个结论叫**勾股定理**。西方叫它毕达哥拉斯定理。

拼图证明：同一块面积算两遍

取四个全等的直角三角形，直角边为 a、b，斜边为 c。把它们放进一个边长为 $a+b$ 的大正方形里，有两种摆法：



左边的摆法： 四个三角形放在四个角上，中间空出一个四边形。它的四条边都是 c；它的每个角和两个三角形的锐角拼成一个平角，而直角三角形两个锐角的和是 90°，所以每个角是 $180°-90°=90°$。所以中间是边长为 c 的正方形，空出的面积是 c^2。

右边的摆法： 把其中三个三角形平移，两两拼成两个长方形，大正方形里空出边长为 a 和 b 的两个正方形，空出的面积是 a^2+b^2。

大正方形一样大，四个三角形也一样，那么空出的面积一定相等：

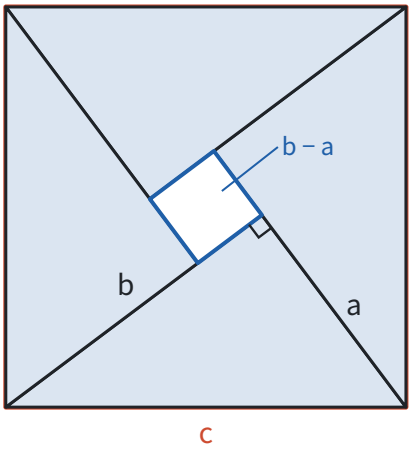
$$c^2=a^2+b^2.$$

也可以用代数把左边的摆法算一遍：大正方形的面积等于四个三角形加中间的正方形，

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2.$$

左边展开是 $a^2+2ab+b^2$，右边是 $2ab+c^2$，两边都减去 $2ab$，得 $a^2+b^2=c^2$。

另一种拼法：赵爽弦图。 三国时期的赵爽把四个三角形放进边长为 c 的正方形里，斜边朝外，中间空出一个小正方形，边长是 $b-a$：



大正方形的面积 = 四个三角形 + 小正方形：

$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2.$$

想一想： 两种拼法都在做同一件事，把一块面积用两种方法表示，再令它们相等。这和用拼图验证 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 是同一种想法（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。几何上的“面积相等”，写出来就是代数上的“式子相等”。

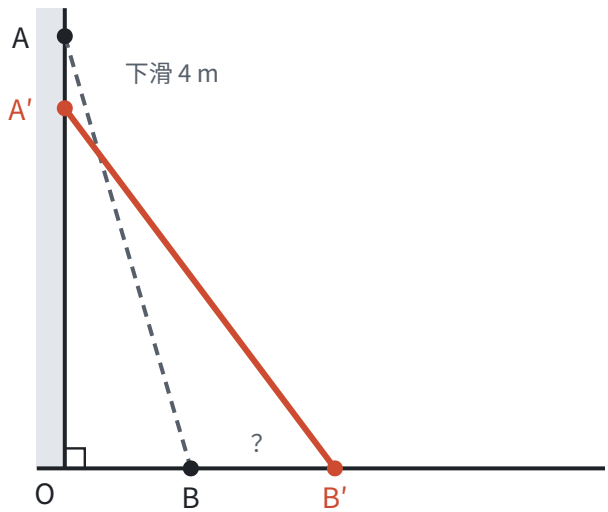
用勾股定理计算：先找直角三角形

用勾股定理之前，先问两件事：直角在哪里？哪条边是斜边？斜边是直角所对的边，也是最长的边。

- 已知两条直角边：$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$；
- 已知斜边和一条直角边：$b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$。

边长是正数，所以开平方只取算术平方根。算出的结果常常是无理数，要用二次根式表示或化简（见第三部分“二次根式”（第 79 页））。

例 1 一架长 25 m 的消防云梯 AB 斜靠在竖直的墙上，云梯底端 B 到墙角 O 的距离是 7 m。如果云梯顶端 A 沿墙下滑 4 m，那么底端也向外滑动 4 m 吗？



思路： 墙和地面垂直，云梯、墙、地面围成直角三角形，云梯是斜边。滑动前后云梯长度不变，前后各有一个直角三角形。先算出顶端原来的高度，再算滑动后底端的位置。

解： 在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=25$，$OB=7$，所以

$$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{625-49}=\sqrt{576}=24.$$

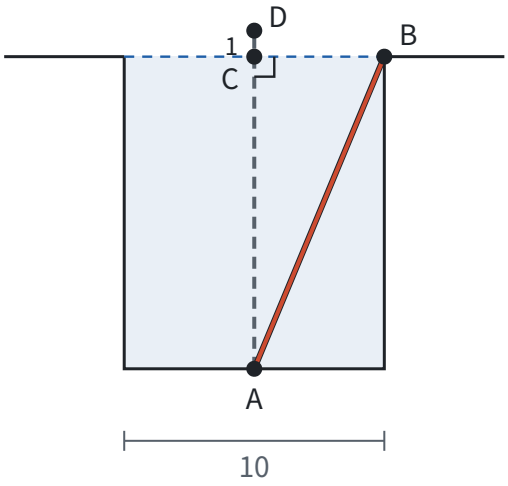
顶端下滑 4 m 后，$OA'=24-4=20$。在 Rt$\triangle A'OB'$ 中，$A'B'=25$，所以

$$OB'=\sqrt{A'B'^2-OA'^2}=\sqrt{625-400}=\sqrt{225}=15.$$

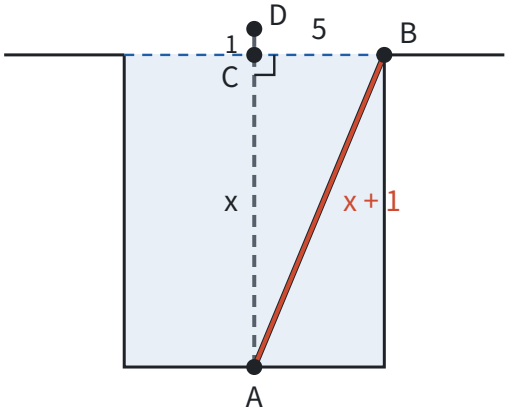
$BB'=OB'-OB=15-7=8$。答：底端向外滑动 8 m，不是 4 m。

回顾： 云梯长度不变，但顶端和底端滑动的距离一般不相等，因为 OA、OB 之间是“平方和不变”，不是“和不变”。

例 2　（改编自《九章算术》）一个水池的截面宽 10 尺，一根芦苇 AD 长在池子中央，露出水面 1 尺。把芦苇顶端拉向岸边，它的顶端正好碰到岸边的水面 B。问水深和芦苇长各多少？



思路： 两个未知量都不知道，但它们有关系：芦苇比水深长 1 尺。设水深为 x 尺，芦苇长就是 $(x+1)$ 尺。拉过去以后，水深 AC、半个池宽 CB、芦苇 AB 组成直角三角形，勾股定理就给出了一个方程。



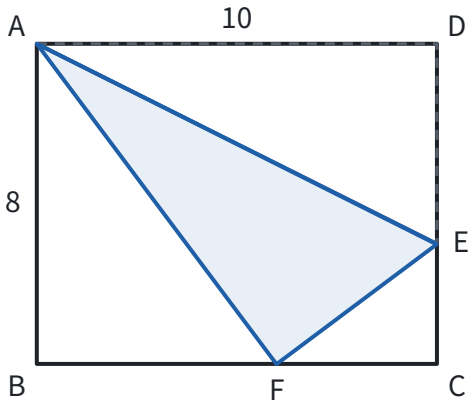
解： 设水深 $AC=x$ 尺，则 $AB=AD=(x+1)$ 尺，$CB=10\div 2=5$ 尺。在 Rt$\triangle ACB$ 中，

$$x^2+5^2=(x+1)^2.$$

展开得 $x^2+25=x^2+2x+1$，所以 $2x=24$，$x=12$。答：水深 12 尺，芦苇长 13 尺。

回顾： 这里勾股定理不是用来“代入算数”，而是用来**列方程**：设出未知的边，用已知的关系把其他边表示出来，再让三边满足 $a^2+b^2=c^2$。方程里的 x^2 两边消掉，最后是一元一次方程。

例 3 如图，长方形纸片 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=10$。沿 AE 折叠，使点 D 落在 BC 边上的点 F 处。求 DE 的长。



思路： 折叠就是轴对称，折过去的部分和原来全等：$AF=AD=10$，$EF=DE$。先在 Rt△ABF 里算出 BF，得到 FC；再设 $DE=x$，△EFC 的三边都能用已知数和 x 表示，列方程。

解： 由折叠，$AF=AD=10$，$EF=DE$。在 Rt△ABF 中，$BF=\sqrt{(10^2-8^2)}=6$，所以 $FC=BC-BF=10-6=4$。

设 $DE=EF=x$，则 $EC=CD-DE=8-x$。在 Rt△EFC 中，

$$x^2=(8-x)^2+4^2.$$

展开得 $x^2=64-16x+x^2+16$，所以 $16x=80$，$x=5$。答：$DE=5$。

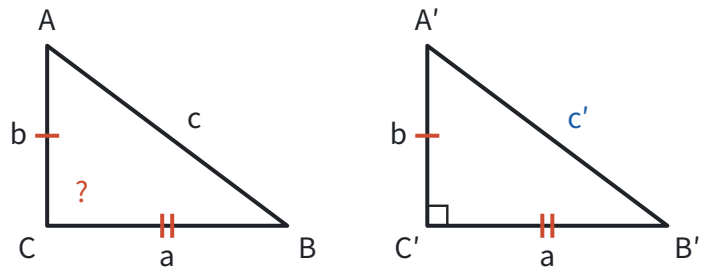
回顾： 折叠问题的两步：先用轴对称找出相等的线段和角（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）），再在一个直角三角形里用勾股定理列方程。

逆定理：由三边判定直角

勾股定理说：直角三角形 ⇒ $a^2+b^2=c^2$。反过来问：如果三角形的三边满足 $a^2+b^2=c^2$，它一定是直角三角形吗？

古埃及人用打了结的绳子，围成三边为 3、4、5 的三角形，来得到直角。这个做法是对的，但要证明。

勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a、b、c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形，边 c 所对的角是直角。



思路： 手里只有三边的数量关系，没有角。想办法造一个真正有直角的三角形来比较：如果它和 $\triangle ABC$ 全等，直角就“搬”过来了。

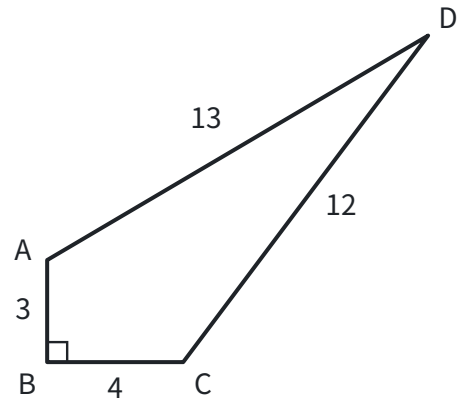
证明： 设 $\triangle ABC$ 中 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。作 Rt$\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$，设斜边 $A'B'=c'$。由勾股定理，$c'^2=a^2+b^2=c^2$，c' 和 c 都是正数，所以 $c'=c$。于是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三边分别相等，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SSS），$\angle C=\angle C'=90°$。

想一想： 证明逆定理时用到了勾股定理本身，这算不算循环论证？不算。循环论证是用要证的结论去证它自己；这里要证的是“$\triangle ABC$ 是直角三角形”，证明中始终没有假设 $\triangle ABC$ 有直角。勾股定理已经用拼图证明过了，它说的是“直角三角形的三边满足 $a^2+b^2=c^2$”，证明里只把它用在自己作出来的 Rt$\triangle A'B'C'$ 上，而 $\triangle A'B'C'$ 的直角是作图时保证的。$\triangle ABC$ 的直角，是最后靠全等从 $\triangle A'B'C'$ 那里得到的。一般地，证明“若 B 则 A”时，可以使用已经证明的“若 A 则 B”，只要把它用在确实满足 A 的对象上。

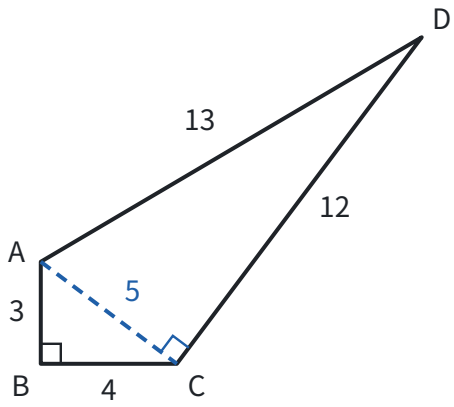
勾股定理和它的逆定理，条件和结论正好互换，互为逆命题，而且都是真命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。用途也不同：**勾股定理由直角得到边的关系，用来算边；逆定理由边的关系得到直角，用来判定直角。**

能够成为直角三角形三边长的三个正整数叫**勾股数**，比如 3、4、5，5、12、13，8、15、17，7、24、25。一组勾股数同时乘以同一个正整数，还是勾股数，比如 6、8、10。

例 4　如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，$AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$。求四边形 $ABCD$ 的面积。



思路： 四边形的面积没有公式，连接对角线 AC 分成两个三角形。$\triangle ABC$ 有直角，面积好求，顺便算出 AC。$\triangle ACD$ 的三边都知道了，看看它是不是直角三角形。



解： 连接 AC。在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$。

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2+CD^2=25+144=169=AD^2$，所以 $\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ACD=90°$（勾股定理的逆定理）。

$$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 5\times 12=6+30=36.$$

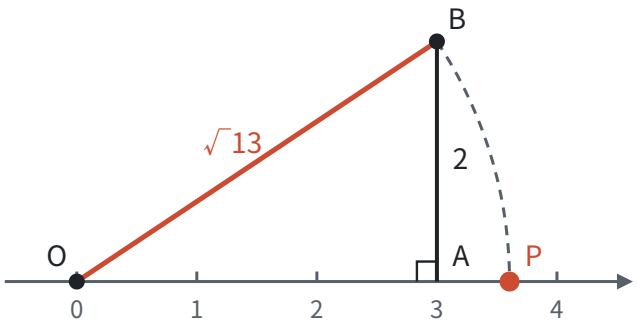
回顾： 一道题里定理和逆定理各用了一次：先由直角算边（定理），再由边判定直角（逆定理）。

在数轴上画出无理数

边长为 1 的正方形，对角线长 $\sqrt{(1^2+1^2)}=\sqrt{2}$。这说明 $\sqrt{2}$ 这样的无理数不是只能写成符号，它是一条实实在在能画出来的线段。用勾股定理，可以在数轴上准确地找到很多无理数的位置。

例 5 在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点。

思路： 要找一个斜边为 $\sqrt{13}$ 的直角三角形，也就是把 13 写成两个整数的平方和：$13=9+4=3^2+2^2$。



作法： 在数轴上找到表示 3 的点 A，过 A 作数轴的垂线，在垂线上截取 $AB=2$，连接 OB。以 O 为圆心、OB 为半径画弧，交数轴正半轴于点 P。因为 $OP=OB=\sqrt{(3^2+2^2)}=\sqrt{13}$，所以点 P 表示 $\sqrt{13}$。

这正说明了实数和数轴上的点一一对应：无理数也在数轴上占着确定的位置（见第二部分“实数”（第 47 页））。

易错点

- **没分清斜边就套公式。** “直角三角形两边长为 3 和 4，求第三边”，要分两种情况：4 是直角边时，第三边是 $\sqrt{(3^2+4^2)}=5$；4 是斜边时，第三边是 $\sqrt{(4^2-3^2)}=\sqrt{7}$。

- **在不是直角三角形的图形里用勾股定理。** 勾股定理只对直角三角形成立。图里没有直角，就先作高，造出直角三角形。
- **用逆定理时没找最长边。** 判断三边 5、13、12 能否构成直角三角形，要看两条较短边的平方和是否等于最长边的平方：$5^2+12^2=169=13^2$，是直角三角形，直角是 13 所对的角。直接算 5^2+13^2 和 12^2 比，就会得出错误的结论。
- **定理和逆定理用混。** 已知是直角三角形、求边，用勾股定理；已知三边、判断是不是直角三角形，用逆定理。证明时理由要写对。
- **忘了开平方，或者开方后写成负数。** $a^2+b^2=c^2$ 求出的是 c^2，还要开方；边长取正的算术平方根。

联系

- **整式的乘法：** 拼图证明和用面积验证乘法公式是同一种方法，$(a+b)^2$ 的展开正是证明中的一步。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）。
- **实数与二次根式：** 勾股定理算出的边长常常是无理数，要化简二次根式；用它可以在数轴上画出无理数。见第二部分“实数”（第 47 页）和第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **全等三角形：** HL 判定可以看成“勾股定理 + SSS”：斜边和一条直角边确定了，另一条直角边也就确定了；逆定理的证明也是靠 SSS。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **轴对称与等腰三角形：** 含 $30°$ 角的直角三角形三边之比是 $1:\sqrt{3}:2$，等腰直角三角形三边之比是 $1:1:\sqrt{2}$，都由勾股定理算出；折叠问题要先用轴对称找等量。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **平面直角坐标系：** 两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 之间的距离，就是以横坐标之差、纵坐标之差为直角边的直角三角形的斜边，所以 $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）和第十一部分“以数解形”（第 318 页）。
- **锐角三角函数：** 在直角三角形中，$\sin A=a/c$，$\cos A=b/c$，由勾股定理得 $\sin^2A+\cos^2A=1$。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。
- **圆：** 垂径定理把半径、弦的一半、弦心距放进一个直角三角形，三个量知二求一，靠的就是勾股定理。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。

真题： 2026 年第 5 题（第 356 页）、2026 年第 15 题（第 359 页）、2025 年第 9 题（第 371 页）、2024 年第 14 题（第 386 页）、2024 年第 15 题（第 386 页）。

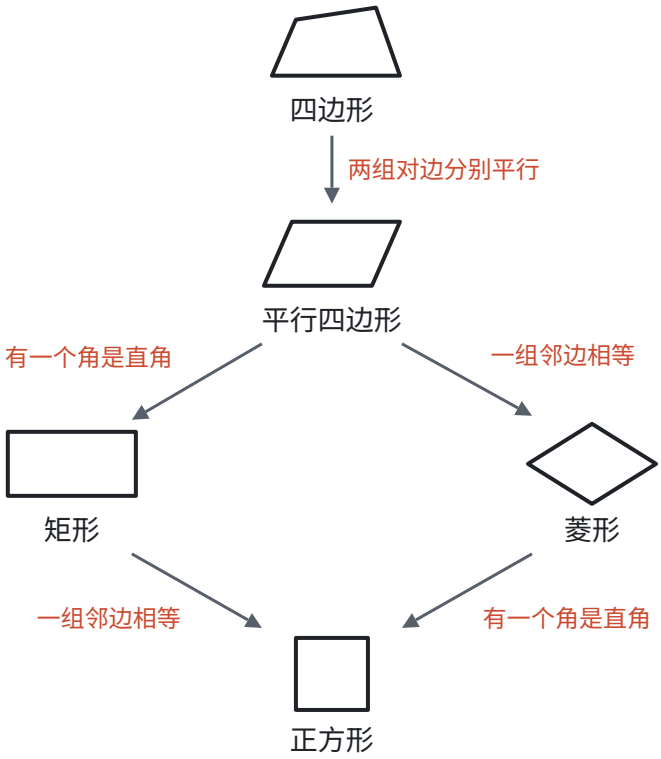
四边形 ★

> 对应人教版八年级下册第二十一章。

平行四边形是两组对边分别平行的四边形；矩形、菱形、正方形是在它的基础上再加一个角或边的条件得到的。 研究它们的办法都一样：用对角线把四边形分成三角形，借助全等把四边形的问题变回三角形的问题。

从哪里来：一个家族

一般的四边形“不稳定”，四条边定了，形状还能随意变，能说的性质很少。要研究，先挑最规整的一类：**两组对边分别平行的四边形叫平行四边形。** 再在平行四边形上加条件，就得到更特殊的图形：

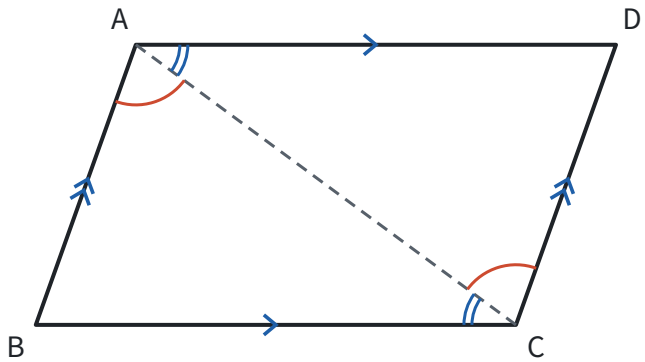


- **矩形：** 有一个角是直角的平行四边形；
- **菱形：** 有一组邻边相等的平行四边形；
- **正方形：** 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形，它既是矩形，又是菱形。

这张图决定了学习的方法：**下一层自动拥有上一层的全部性质。** 矩形、菱形、正方形都是平行四边形，平行四边形的性质它们都有，只需要再研究“多出来的那个条件”带来了什么。判定则反过来：要说明一个图形在某一层，只要说明它在上一层，再加上这一层的条件。

平行四边形的性质

平行四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$。要找边和角之间的关系，连接对角线 AC，把它分成两个三角形：

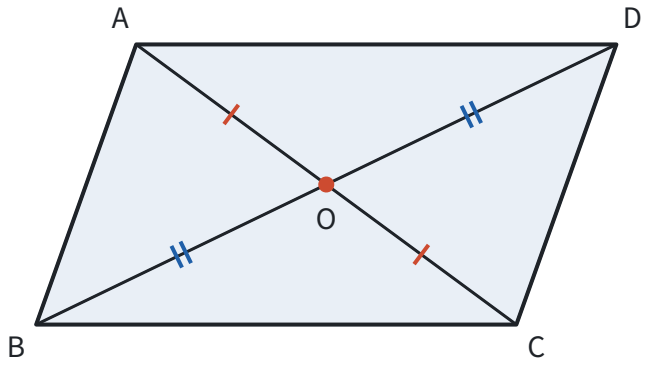


推导： 因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle BAC = \angle DCA$；因为 $AD \parallel BC$，所以 $\angle BCA = \angle DAC$（两直线平行，内错角相等）。又 $AC = CA$，所以 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$（ASA）。于是 $AB = CD$，$BC = DA$，$\angle B = \angle D$。再把 A、C 处的两个角分别加起来，$\angle BAD = \angle BCD$。

平行四边形的性质：

- **边：** 两组对边分别平行且相等；
- **角：** 两组对角分别相等，邻角互补（两直线平行，同旁内角互补）；
- **对角线：** 互相平分。

对角线为什么互相平分？设 AC、BD 交于点 O。在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，$\angle OAB = \angle OCD$，$\angle OBA = \angle ODC$（内错角），$AB = CD$（刚证过），所以 $\triangle AOB \cong \triangle COD$（ASA），$OA = OC$，$OB = OD$。



从变换看： 把平行四边形绕 O 旋转 $180°$，因为 $OA = OC$、$OB = OD$，A 转到 C，B 转到 D，整个图形和自己重合。平行四边形是**中心对称图形**，对称中心是对角线的交点。对边相等、对角相等，都是“转过去能重合”的结果（见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页））。

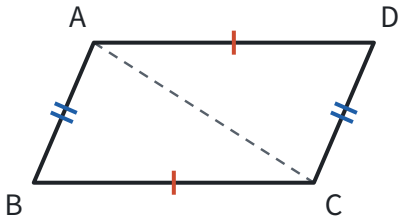
平行线间的距离处处相等。 设直线 $a \parallel b$，在 a 上任取两点 P、Q，分别向 b 作垂线段 PM、QN。



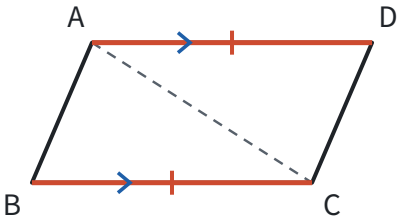
PM、QN 都垂直于 b，所以 $PM \parallel QN$；又 $PQ \parallel MN$，所以四边形 $PMNQ$ 是平行四边形，$PM = QN$（对边相等）。P、Q 是任取的，所以两条平行线之间的距离是一个确定的值；同底的三角形，第三个顶点在与底平行的直线上移动，面积不变。

平行四边形的判定

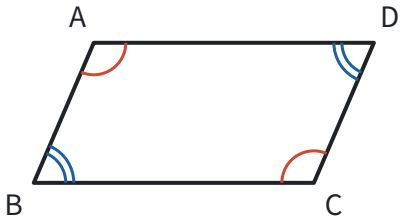
判定是性质反过来问：满足什么条件的四边形，一定是平行四边形？性质里的每一条，反过来基本都成立：



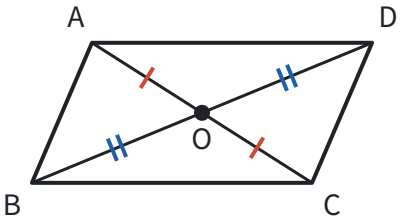
两组对边分别相等



一组对边平行且相等



两组对角分别相等

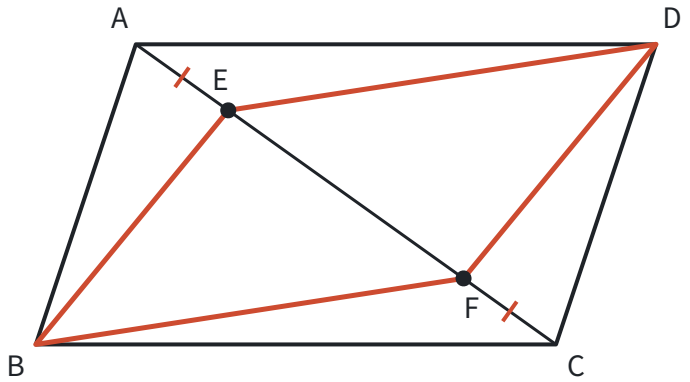


对角线互相平分

判定	为什么成立
两组对边分别平行	定义
两组对边分别相等	连接 AC，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$（SSS），得到两对内错角相等，所以两组对边分别平行
一组对边平行且相等	设 $AD \parallel BC$，$AD = BC$。连接 AC，$\angle DAC = \angle BCA$，$\triangle ACD \cong \triangle CAB$（SAS），$\angle ACD = \angle CAB$，所以 $AB \parallel CD$
两组对角分别相等	四边形内角和是 $360°$，$\angle A + \angle B = 180°$，同旁内角互补，所以 $AD \parallel BC$；同理 $AB \parallel CD$
对角线互相平分	$OA = OC$，$OB = OD$，加上对顶角，$\triangle AOB \cong \triangle COD$（SAS），得 $\angle OAB = \angle OCD$，$AB \parallel CD$；同理 $AD \parallel BC$

每一条判定最后都回到了定义“两组对边分别平行”，用的工具都是全等和平行线的判定（见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））。

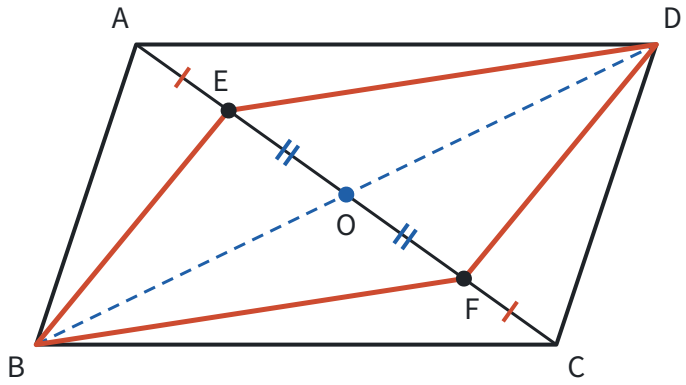
例 1 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 在对角线 AC 上，$AE = CF$。求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形。



思路一：证两组对边分别相等。 BE 在 $\triangle ABE$ 里，DF 在 $\triangle CDF$ 里，这两个三角形有 $AB = CD$、$AE = CF$，夹角 $\angle BAE = \angle DCF$（$AB \parallel CD$，内错角），用 SAS 得 $BE = DF$。同样由 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ 得 $DE = BF$。两组对边分别相等，所以是平行四边形。

思路二：看对角线。 四边形 $BEDF$ 的对角线是 BD 和 EF。EF 在 AC 上，而平行四边形 $ABCD$ 的对角线互相平

分，交点 O 同时是 AC、BD 的中点。只要说明 O 也是 EF 的中点就行了。



证明（用思路二）： 连接 BD，交 AC 于点 O。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $OA = OC$，$OB = OD$。又 $AE = CF$，所以 $OA - AE = OC - CF$，即 $OE = OF$。四边形 $BEDF$ 的对角线 BD、EF 互相平分，所以它是平行四边形。

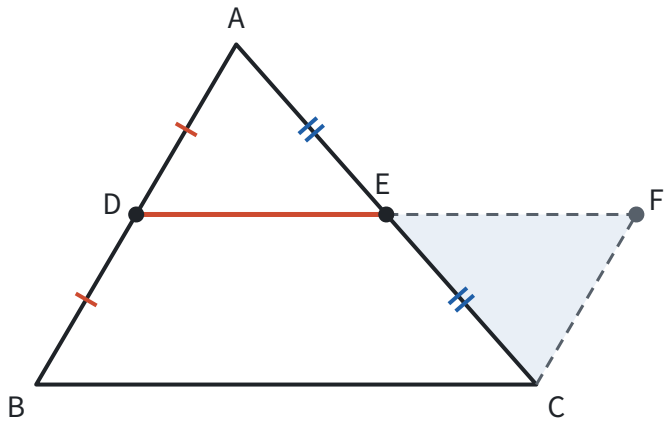
想一想： 思路一要证两次全等，思路二一次全等都不用。区别在于思路二注意到了这个图形的中心对称：E 和 F 关于 O 对称，B 和 D 也关于 O 对称。图中如果有平行四边形的对角线，先想“对角线互相平分”这个判定。

三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫**三角形的中位线**。

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半。 如图，D、E 分别是 AB、AC 的中点，则

$$DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC.$$

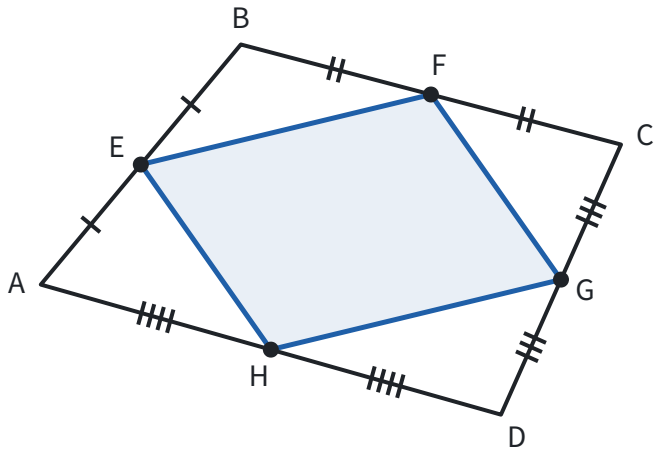


从哪里想到： 要证 DE 是 BC 的一半，可以把 DE 加倍，再证加倍后的线段等于 BC。怎样加倍？E 是 AC 的中点，把 $\triangle ADE$ 绕 E 旋转 $180°$，A 落到 C，D 落到 DE 延长线上的点 F，DF 正好是 DE 的两倍。

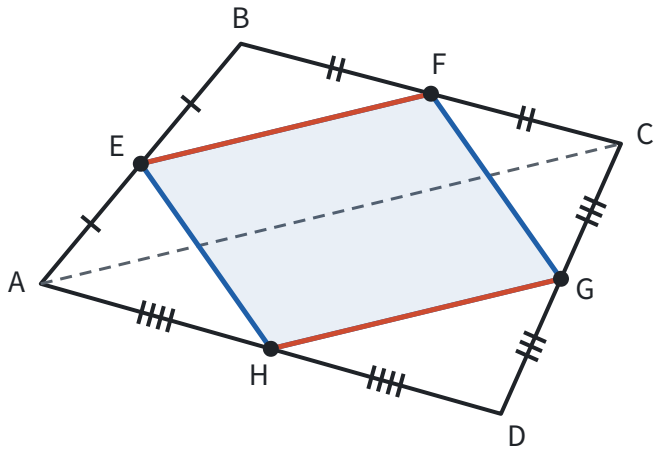
证明： 延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 CF。

- 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，$AE = CE$，$\angle AED = \angle CEF$（对顶角），$DE = FE$，所以 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$（SAS）。
- 于是 $CF = AD = BD$，$\angle A = \angle ECF$，所以 $CF \parallel AB$，即 $CF \parallel BD$。
- 四边形 $DBCF$ 中，BD 和 CF 平行且相等，所以它是平行四边形，$DF \parallel BC$，$DF = BC$。
- DE 是 DF 的一半，所以 $DE \parallel BC$，DE 等于 BC 的一半。

例 2 求证：顺次连接任意四边形各边中点，得到的四边形是平行四边形。



思路： 四边形各边的中点，两两在同一个三角形的两边上吗？连接对角线 AC，E、F 是 $\triangle ABC$ 两边的中点，H、G 是 $\triangle ADC$ 两边的中点，EF、HG 都是中位线，都和 AC 有关系。

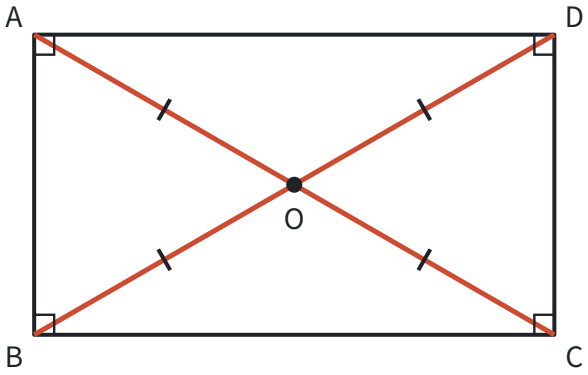


证明： 连接 AC。在 $\triangle ABC$ 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点，所以 $EF \parallel AC$，EF 等于 AC 的一半。同理，在 $\triangle ADC$ 中，$HG \parallel AC$，HG 等于 AC 的一半。所以 $EF \parallel HG$，$EF = HG$，四边形 $EFGH$ 是平行四边形（一组对边平行且相等）。

回顾： 中位线把“中点”这个条件转化成了“平行”和“一半”。题目里有两个以上的中点时，常常可以连线构造中位线（见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页））。中点四边形的形状只和原四边形的**对角线**有关，这一点在本页最后还会用到。

矩形：加一个直角

有一个角是直角的平行四边形叫矩形。 平行四边形邻角互补，一个角是直角，四个角就都是直角。



矩形多出来的性质：

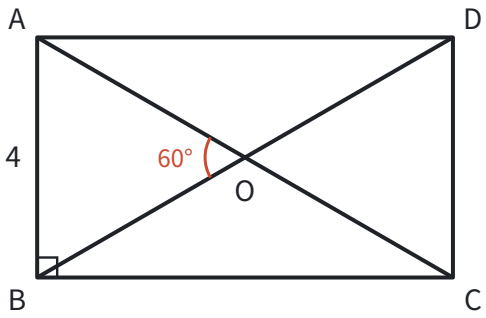
- **四个角都是直角；**
- **对角线相等。** 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，$AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB = 90°$，$BC = CB$，所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$（SAS），$AC = DB$。

对角线相等又互相平分，所以 $OA = OB = OC = OD$，四个顶点到 O 的距离相等。矩形还是轴对称图形，有两条对称轴，是两组对边中点的连线所在的直线。

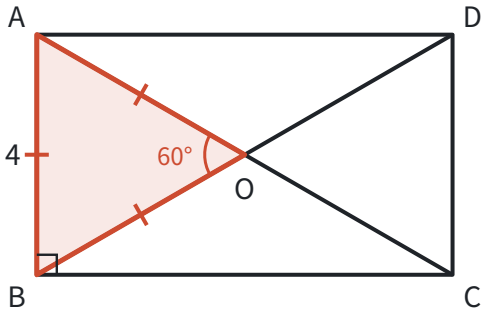
矩形的判定：

- 有一个角是直角的平行四边形（定义）；
- 有三个角是直角的四边形（第四个角是 $360° - 270° = 90°$，两组对角分别相等，先是平行四边形）；
- **对角线相等的平行四边形。** 已知平行四边形 $ABCD$ 中 $AC = DB$，由 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$（SSS）得 $\angle ABC = \angle DCB$，这两个角又互补，所以都是 $90°$。

例 3　如图，矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，$\angle AOB = 60°$，$AB = 4$。求 AC 和 BC 的长。



思路： 矩形的对角线相等且互相平分，所以 $OA = OB$，$\triangle AOB$ 是等腰三角形；又有一个角是 $60°$，它是等边三角形。



解： 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AC=BD$，并且 AC、BD 互相平分，从而 $OA=OB$。又 $\angle AOB=60°$，所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形，$OA=AB=4$，$AC=2OA=8$。

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

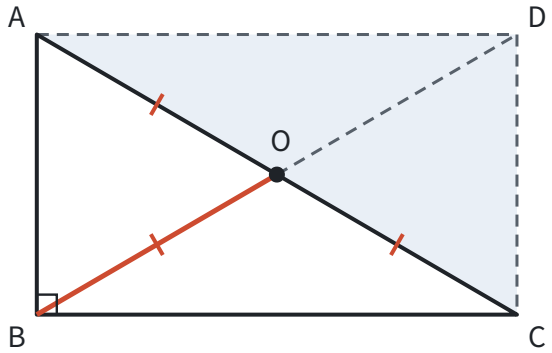
$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

回顾： 矩形的对角线把矩形分成四个等腰三角形。对角线的夹角是 $60°$ 时出现等边三角形，这时 $\angle ACB=30°$，AB 是 AC 的一半，正是含 $30°$ 角的直角三角形（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））。

直角三角形斜边上的中线

把矩形沿一条对角线切开，得到两个直角三角形。矩形的“对角线相等且互相平分”，放到直角三角形里就是：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。



证明： 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，O 是斜边 AC 的中点。延长 BO 到点 D，使 $OD=OB$，连接 AD、CD。四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，是平行四边形；又 $\angle ABC=90°$，所以它是矩形，$BD=AC$。于是 BO 是 BD 的一半，也就是 AC 的一半。

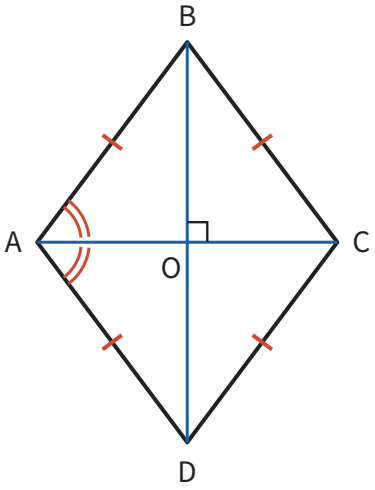
所以 $OA=OB=OC$：**斜边的中点到三个顶点的距离相等。**

反过来也成立： 如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。设 O 是 AC 的中点，$OB=OA=OC$。由等边对等角，$\angle A=\angle ABO$，$\angle C=\angle CBO$，所以 $\angle ABC=\angle A+\angle C$。三个角的和是 $180°$，所以 $2\angle ABC=180°$，$\angle ABC=90°$。

学了圆以后会看到，这两句话就是“直径所对的圆周角是直角”和它的逆命题：A、B、C 都在以 O 为圆心的圆上（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。

菱形：加一组相等的邻边

有一组邻边相等的平行四边形叫菱形。 平行四边形对边相等，一组邻边相等，四条边就都相等。



菱形多出来的性质：

- **四条边都相等；**
- **对角线互相垂直，并且每条对角线平分一组对角。** 在 $\triangle ABD$ 中，$AB=AD$，是等腰三角形；O 是 BD 的中点（平行四边形的对角线互相平分），所以 AO 是底边上的中线。由三线合一，$AO\perp BD$，AO 平分 $\angle BAD$。

菱形是轴对称图形，两条对角线所在的直线都是它的对称轴。

菱形的面积： 对角线把菱形分成 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$，它们以 BD 为底，高分别是 AO 和 CO，所以

$$S_{\text{菱形}}=\frac{1}{2}BD\cdot AO+\frac{1}{2}BD\cdot CO=\frac{1}{2}BD\cdot AC.$$

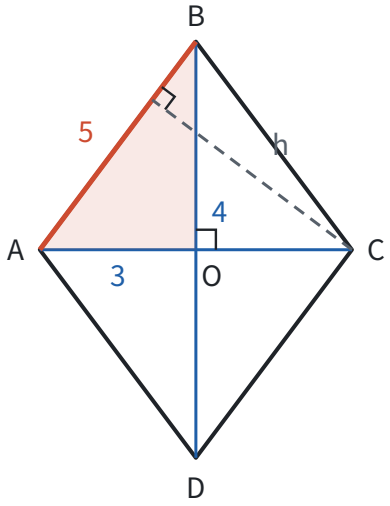
菱形的面积等于两条对角线乘积的一半。 推导只用到“对角线互相垂直”，所以任何对角线互相垂直的四边形，面积都可以这样算。菱形也是平行四边形，面积还可以用“底 × 高”算。

菱形的判定：

- 有一组邻边相等的平行四边形（定义）；
- 四条边都相等的四边形（两组对边分别相等，先是平行四边形）；
- **对角线互相垂直的平行四边形。** 对角线 $AC\perp BD$，又 $OB=OD$，所以 AC 垂直平分 BD，$AB=AD$（垂直平分线上的点到线段两端的距离相等）。

例 4 菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC=6$，$BD=8$。求菱形的边长、面积，以及边 AB 上的高。

思路： 菱形的对角线互相垂直平分，把菱形分成四个全等的直角三角形，直角边是两条对角线的一半。面积有两种算法：对角线乘积的一半，或者底乘高，两种算出来一定相等，由此求高。

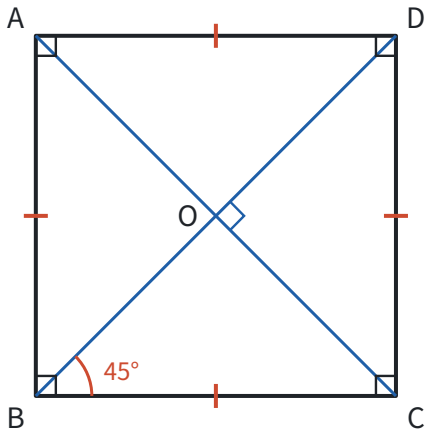


解： 设对角线交于点 O，则 $OA=3$，$OB=4$，$AC\perp BD$。在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$，边长是 5。面积 $S=1/2\times 6\times 8=24$。设 AB 边上的高为 h，则 $AB\cdot h=24$，即 $5h=24$，$h=4.8$。

回顾： 求高时没有去找高的垂足，而是把同一块面积算两遍，列出方程。这和勾股定理的拼图证明是同一种想法：那里把边长为 $a+b$ 的大正方形的面积用两种方法表示，再令它们相等，得到 $a^2+b^2=c^2$（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。

正方形：两个条件都加上

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫正方形。 它既是矩形又是菱形，两者的性质它全有。



- **边：** 四条边都相等；
- **角：** 四个角都是直角；
- **对角线：** 相等，互相垂直平分，每条对角线平分一组对角（所以对角线和边的夹角是 45°，对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形）。

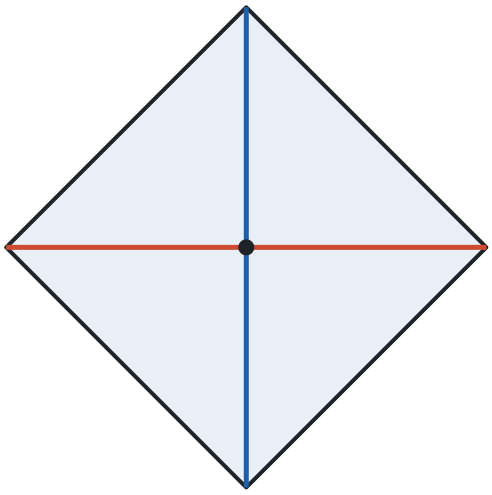
正方形有四条对称轴。判定时，先证它是矩形，再加一组邻边相等；或者先证它是菱形，再加一个直角。

对照：从对角线看四种图形

把前面的性质放在一起：

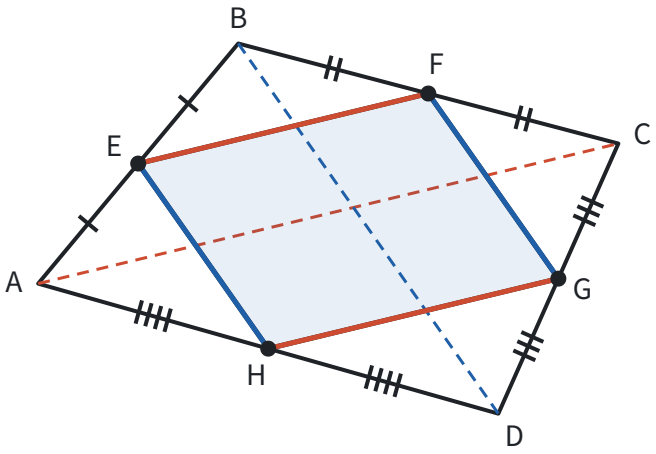
图形	边	角	对角线	对称性
平行四边形	对边平行且相等	对角相等，邻角互补	互相平分	中心对称
矩形	对边平行且相等	四个角都是直角	互相平分且相等	中心对称，两条对称轴
菱形	对边平行，四边相等	对角相等，邻角互补	互相垂直平分，平分对角	中心对称，两条对称轴
正方形	对边平行，四边相等	四个角都是直角	互相垂直平分且相等，平分对角	中心对称，四条对称轴

看“对角线”一列：**两条互相平分的线段，作为对角线总能围成平行四边形；再让它们相等，就是矩形；让它们垂直，就是菱形；既相等又垂直，就是正方形。**



正方形：对角线相等且垂直

想一想： 回到例 2 的中点四边形。例 2 证明了：顺次连接任意四边形 $ABCD$ 各边中点 E、F、G、H，得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



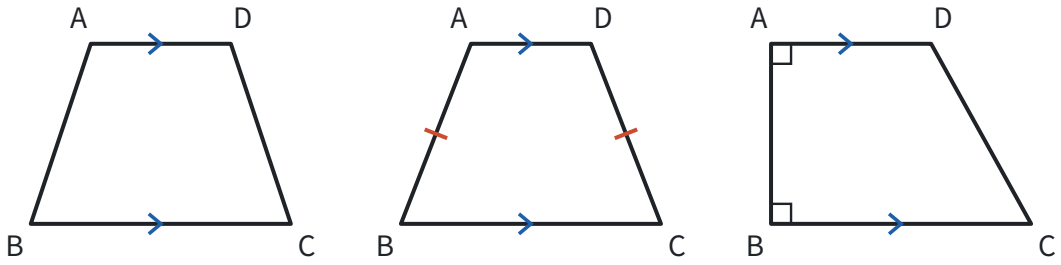
EF、HG 平行于 AC 且等于 AC 的一半，EH、FG 平行于 BD 且等于 BD 的一半。所以中点四边形的边由原四边形的对角线决定：

- 原四边形的对角线相等（$AC = BD$）时，中点四边形的邻边相等，是菱形；
- 原四边形的对角线互相垂直时，中点四边形的邻边互相垂直，是矩形；
- 两者都满足时，是正方形。

比如矩形的中点四边形是菱形，菱形的中点四边形是矩形。

梯形

一组对边平行、另一组对边不平行的四边形叫梯形。 平行的两边叫梯形的底，不平行的两边叫梯形的腰。两腰相等的梯形叫**等腰梯形**；一腰和底垂直的梯形叫**直角梯形**。



梯形　　等腰梯形　　直角梯形

梯形只有一组对边平行，所以它不是平行四边形。等腰梯形的两腰相等，于是“一组对边平行，另一组对边相等”的四边形不一定是平行四边形，见下面的易错点。

易错点

- **“一组对边平行，另一组对边相等”当作判定。** 等腰梯形就满足这个条件，却不是平行四边形。可用的是“一组对边**平行且相等**”，说的必须是同一组对边。
- **跳过平行四边形直接判定矩形、菱形。** “对角线相等的四边形”不一定是矩形，“对角线互相垂直的四边形”不一定是菱形，前面都要加上“平行四边形”。不写“平行四边形”这一步、直接从四边形出发的常用判定，是“有三个角是直角”（矩形）和“四条边都相等”（菱形），它们的证明里已经先得到了平行四边形。
- **把中位线和中线混淆。** 三角形的中线连接顶点和对边中点；中位线连接两边中点。
- **斜边上的中线用在非直角三角形里。** “中线等于这边的一半”只对直角三角形的斜边成立，用之前先确认直角和斜边。
- **菱形面积用错。** “对角线乘积的一半”要求对角线互相垂直；一般平行四边形不能这样算。
- **正方形的包含关系弄反。** 正方形是特殊的矩形，也是特殊的菱形；但矩形、菱形不一定是正方形。

联系

- **全等三角形、相交线与平行线：** 本页的每条性质和判定，都是连一条对角线后，用平行线的性质得到相等的角，再用全等推出来的。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）和第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **三角形：** 四边形的内角和 360° 来自把它分成两个三角形。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **轴对称与等腰三角形：** 菱形的对角线互相垂直来自等腰三角形的三线合一；矩形的对角线把它分成等腰三角形。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 平行四边形是中心对称图形；中位线的证明就是把三角形绕中点旋转 180°。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。

- **平面直角坐标系：** 平行四边形的对角线互相平分，两条对角线的中点重合，所以在坐标系里，平行四边形 $ABCD$ 的顶点满足 $x_A+x_C=x_B+x_D$，$y_A+y_C=y_B+y_D$，已知三个顶点就能求第四个。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）和第十一部分“以数解形”（第 318 页）。
- **相似：** 中位线平行于第三边且等于它的一半，是“平行线分线段成比例”在比为 1:2 时的特例。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **圆：** 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，说的就是直角顶点在以斜边为直径的圆上。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。
- **辅助线：** 倍长中线、连接对角线、构造中位线，都是本页证明里用过的辅助线。见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）。

真题： 2026 年第 9 题（第 357 页）、2025 年第 6 题（第 369 页）、2025 年第 9 题（第 371 页）、2024 年第 23 题（第 394 页）、2022 年第 5 题（第 409 页）。

尺规作图 ★

> 对应人教版七年级上册第六章，八年级上册第十四章、第十五章等，散见各册。

尺规作图是只用没有刻度的直尺和圆规作图；每一种作法为什么是对的，都由全等三角形的判定或线段垂直平分线的有关定理来保证。

从哪里来

用刻度尺和量角器，想画多长就画多长，想画多大的角就画多大的角，但量出来的数总有误差。尺规作图把工具限制到最少，只允许做两件事：

工具	能做的事	背后的几何事实
直尺（没有刻度）	过两个已知点画直线、射线、线段	两点确定一条直线
圆规	以已知点为圆心、已知长度为半径画圆或圆弧	圆上每一点到圆心的距离都等于半径

圆规的作用可以说成两句话：**截取相等的线段**（把一条线段的长度“搬”到别处），**找到到两个已知点的距离分别等于给定长度的点**（两段弧的交点）。新的点只能从交点得来：直线和直线的交点、直线和弧的交点、弧和弧的交点。

工具这样少，作图就不能靠“量”，只能靠“推理”：每一步作出的东西为什么符合要求，都要能说出理由。所以每一种作法后面，都有一条定理撑腰：

基本作图	关键的一步	依据
作一条线段等于已知线段	用圆规量出已知线段，在射线上截取	圆上的点到圆心距离相等
作一个角等于已知角	用圆规复制一个含这个角的三角形	全等三角形的判定 SSS
作角的平分线	两段半径相等的弧交出一点	全等三角形的判定 SSS

基本作图	关键的一步	依据
作线段的垂直平分线	找两个到线段两端距离相等的点	到线段两端距离相等的点在垂直平分线上；两点确定一条直线
过一点作已知直线的垂线	转化成作一条线段的垂直平分线	同上

作图题的写法一般包括：**已知、求作、作法**，需要时再写证明。作图语言要规范，比如“以点 A 为圆心、a 的长为半径画弧，交射线 AM 于点 B”。作图时要保留作图痕迹（画过的弧），最后写出结论，如“AB 就是所求作的线段”。

下面每种基本作图的图都是作图过程的动画，一步一步画出来；图中灰色的弧是作图痕迹，红色是作出的结果，蓝色虚线是说明依据时要连的线。

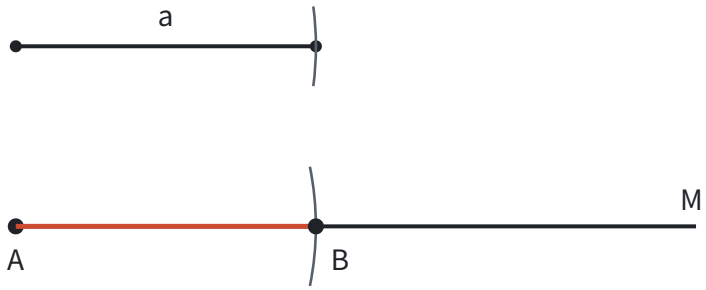
作一条线段等于已知线段

已知： 线段 a。**求作：** 线段 AB，使 $AB = a$。

作法：

1. 作射线 AM；
2. 用圆规量出线段 a 的长，以点 A 为圆心、a 的长为半径画弧，交射线 AM 于点 B。

线段 AB 就是所求作的线段。



依据： 点 B 在以 A 为圆心、a 为半径的圆上，所以 $AB = a$。

这一步虽然简单，却是后面所有作图的基本动作：圆规就是用来“搬运长度”的。

作一个角等于已知角

已知： $\angle AOB$。**求作：** $\angle A'O'B'$，使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$。

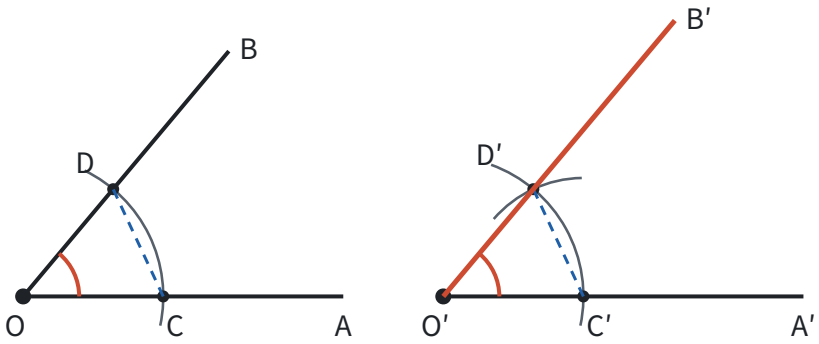
圆规不能直接量角，只能量长度。办法是：**把角放进一个三角形里，复制三角形的三条边，角也就跟着复制过去了。**

作法：

1. 以点 O 为圆心、任意长为半径画弧，分别交 OA、OB 于点 C、D；
2. 画射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心、OC 的长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；
3. 以点 C' 为圆心、CD 的长为半径画弧，与第 2 步画的弧交于点 D'；

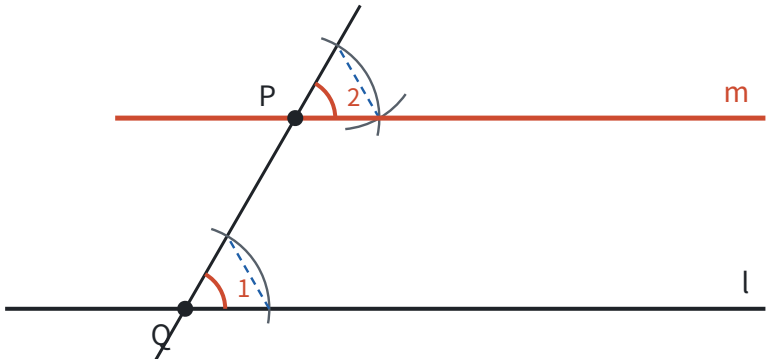
4. 过点 D' 画射线 $O'B'$。

$\angle A'O'B'$ 就是所求作的角。



依据： 连接 CD、$C'D'$。由作法，$O'C' = OC$，$O'D' = OD$，$C'D' = CD$，所以 $\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$（SSS），所以 $\angle A'O'B' = \angle AOB$（全等三角形的对应角相等）。

会作等角，就会作平行线。已知直线 l 和直线外一点 P：过点 P 任画一条直线，交 l 于点 Q，它和 l 所成的一个角记作 $\angle 1$；再以 P 为顶点，用上面的方法作 $\angle 2 = \angle 1$，并让 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 成为同位角，$\angle 2$ 的另一边所在的直线记作 m。由“同位角相等，两直线平行”，$m \parallel l$，m 就是过点 P 的平行线（见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））。



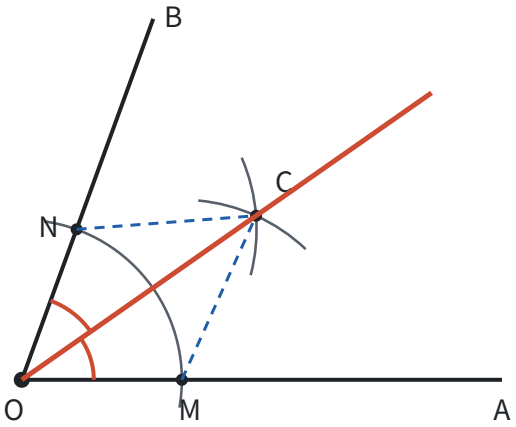
作角的平分线

已知： $\angle AOB$。**求作：** $\angle AOB$ 的平分线。

作法：

1. 以点 O 为圆心、适当长为半径画弧，分别交 OA、OB 于点 M、N；
2. 分别以点 M、N 为圆心、大于 $(1/2)MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C；
3. 画射线 OC。

射线 OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线。



依据： 连接 MC、NC。由作法，$OM=ON$，$MC=NC$，又 $OC=OC$（公共边），所以 $\triangle OMC\cong\triangle ONC$（SSS），所以 $\angle MOC=\angle NOC$，即 OC 平分 $\angle AOB$。

作法里有两个细节，都能从依据里找到原因：

- **第 2 步的两个半径必须相等。** 证明中用到了 $MC=NC$；半径不相等，交点就不在平分线上。
- **半径要大于 $(1/2)MN$。** 两弧的交点 C 和 M、N 组成三角形，由三边关系，$MC+NC>MN$，即 $2MC>MN$。半径小于 MN 的一半，两段弧碰不到一起；正好等于一半，两段弧只在 MN 的中点碰一下，交点落在线段 MN 上，组不成三角形，作图也不准（见第五部分“三角形”（第 128 页））。

作线段的垂直平分线

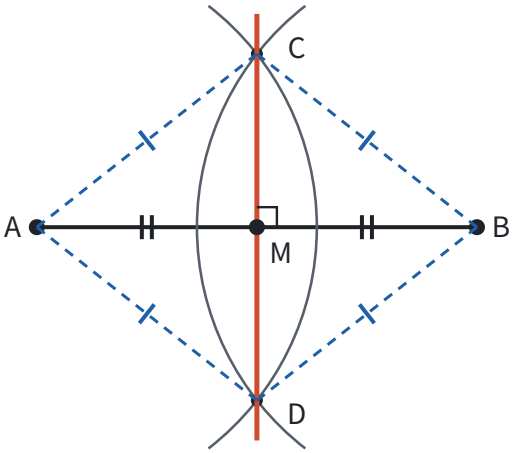
经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫这条线段的**垂直平分线**。它有一条重要的性质和它的逆命题（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））：线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等；反过来，**到线段两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。**

已知： 线段 AB。**求作：** 线段 AB 的垂直平分线。

作法：

1. 分别以点 A、B 为圆心、大于 $(1/2)AB$ 的长为半径画弧，两弧交于点 C、D；
2. 作直线 CD。

直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线，它与 AB 的交点 M 就是 AB 的中点。所以这个作法也用来**作线段的中点**。



依据： 由作法，$CA=CB$，所以点 C 在 AB 的垂直平分线上；同理点 D 也在。两点确定一条直线，所以直线 CD 就是 AB 的垂直平分线。

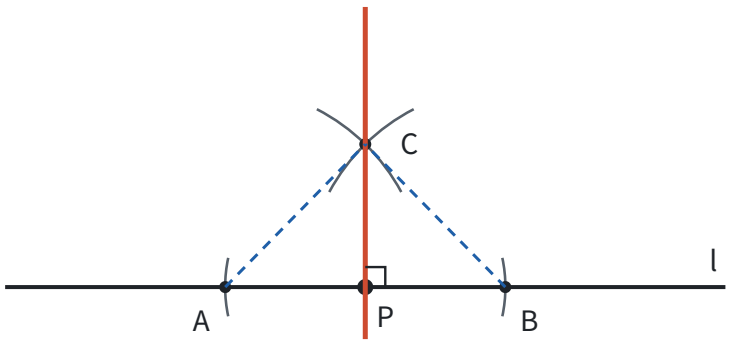
只用全等也能说明： 连接 CA、CB、DA、DB。由 $CA=CB$，$DA=DB$，$CD=CD$，得 $\triangle ACD\cong\triangle BCD$（SSS），所以 $\angle ACM=\angle BCM$。再由 $CA=CB$，$\angle ACM=\angle BCM$，$CM=CM$，得 $\triangle ACM\cong\triangle BCM$（SAS），所以 $AM=BM$，$\angle AMC=\angle BMC$。这两个角是邻补角又相等，所以都是 $90°$。两次全等，就同时得到了“平分”和“垂直”。

过一点作已知直线的垂线

过一点作垂线，分点在直线上和点在直线外两种情况。两种情况的想法相同：**先在直线上截出一条线段，使这一点恰好在这条线段的垂直平分线上，再作这条垂直平分线。**

点 P 在直线 l 上。

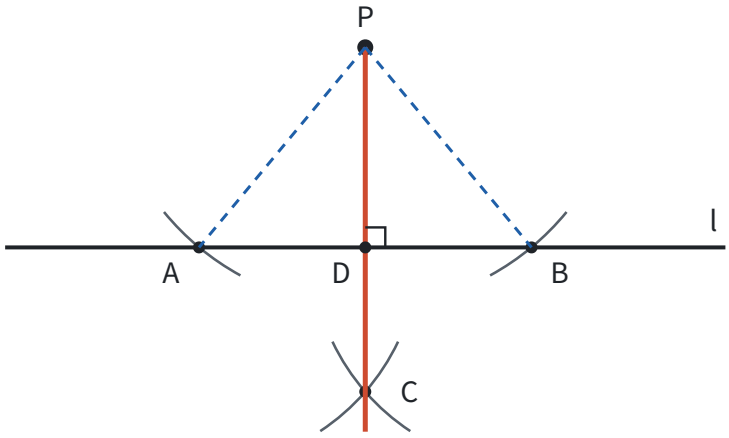
1. 以点 P 为圆心、任意长为半径画弧，交直线 l 于点 A、B；
2. 分别以点 A、B 为圆心、大于 PA 的长为半径画弧，两弧交于点 C；
3. 作直线 PC。



依据： 由作法，$PA=PB$，$CA=CB$，所以 P、C 都在线段 AB 的垂直平分线上，直线 PC 就是 AB 的垂直平分线，所以 $PC\perp l$。换个角度看，这也是在作平角 $\angle APB$ 的平分线。

点 P 在直线 l 外。

1. 以点 P 为圆心、适当长为半径画弧，交直线 l 于点 A、B；
2. 分别以点 A、B 为圆心、大于 $(1/2)AB$ 的长为半径画弧，两弧在 l 的另一侧交于点 C；
3. 作直线 PC，交 l 于点 D。



依据： 由作法，$PA=PB$，$CA=CB$，所以直线 PC 是 AB 的垂直平分线，$PC\perp l$。

第 1 步的“适当长”要大于点 P 到 l 的距离，否则弧碰不到直线，因为垂线段最短（见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））。第 2 步让两弧交在另一侧，是因为交点 C 离 P 远一些，画出的直线 PC 更准。

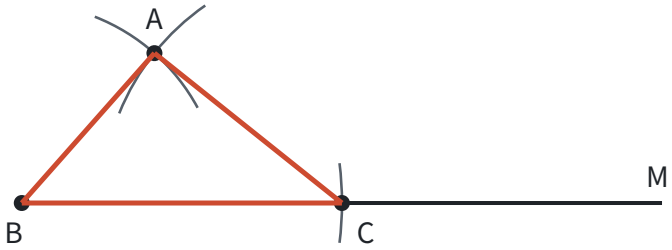
作三角形

全等三角形的判定说的是“哪些条件能把三角形定死”，作三角形就是把“定死”真的画出来。

已知三边作三角形（SSS）。 已知线段 a、b、c，求作 $\triangle ABC$，使 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$。

1. 作射线 BM，在 BM 上截取 $BC=a$；
2. 以点 B 为圆心、c 的长为半径画弧，以点 C 为圆心、b 的长为半径画弧，两弧交于点 A；
3. 连接 AB、AC。



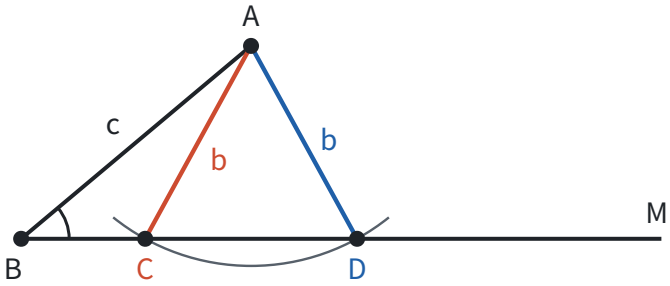


其他条件的作法，用的都是上面的基本作图：

已知条件	作法	为什么作出的三角形唯一
三边	截取一边，另两边的长作两段弧，交点是第三个顶点	SSS
两边及其夹角	作一个角等于已知角，在角的两边上分别截取两条已知边，连接两个端点	SAS
两角及其夹边	截取已知边，在它的两端分别作两个已知角，两条射线的交点是第三个顶点	ASA

两弧（或两射线）的交点在同一侧只有一个，所以作出的三角形是唯一的，这正是判定定理的意思。反过来也能看出另外两种情况：

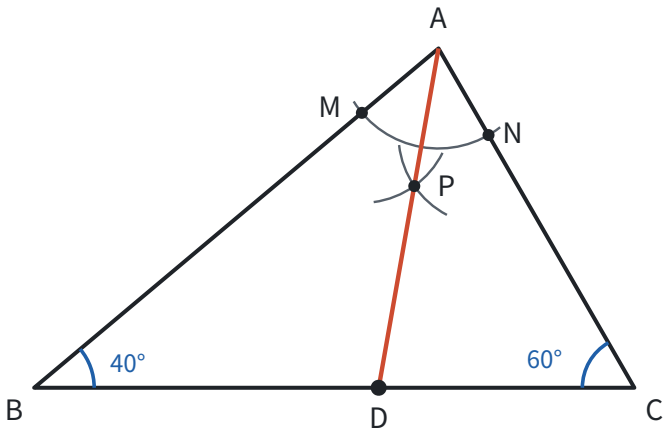
- **三边不满足三边关系，作不出三角形。** 比如 $b+c<a$，两段弧根本碰不到。
- **已知两边和其中一边的对角，可能作出两个三角形。** 比如已知 $\angle B$ 和两边 c、b，要求 $AB=c$、$AC=b$：先在 $\angle B$ 的一边上截取 $BA=c$，再以 A 为圆心、b 的长为半径画弧，这段弧和 $\angle B$ 的另一边 BM 可能有两个交点 C、D。$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 都满足条件，却不全等，这就是 SSA 不能判定全等的原因（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。



读作图痕迹

作图题常常不让你作图，而是给出作图步骤或作图痕迹，问作出的东西有什么性质。第一步永远是**认出作的是哪种基本作图**，再用它的依据。

例 1　如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=40°$，$\angle C=60°$。按以下步骤作图：① 以点 A 为圆心、适当长为半径画弧，分别交 AB、AC 于点 M、N；② 分别以点 M、N 为圆心、大于 $(1/2)MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P；③ 作射线 AP，交 BC 于点 D。求 $\angle ADC$ 的度数。



思路： 从一个角的顶点出发画弧、再用两段等弧交出一点、最后画射线，这是作角的平分线，所以 AD 平分 $\angle BAC$。$\angle BAC$ 由内角和可以求出；$\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角。

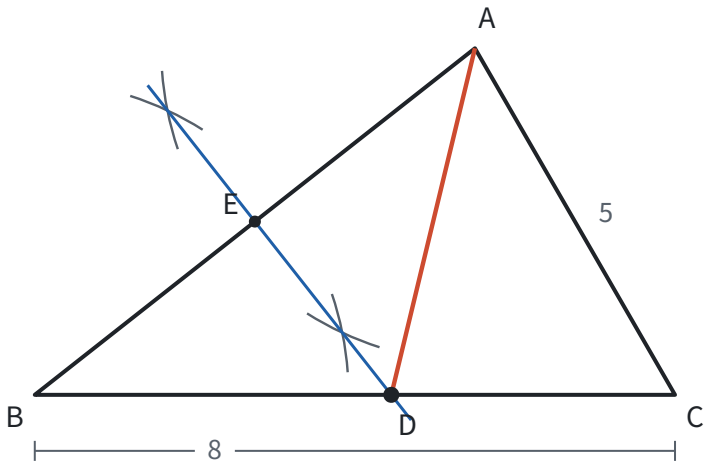
解： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=180°-40°-60°=80°$。

由作图可知，AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAD=1/2\angle BAC=40°$。

$\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角，所以 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=40°+40°=80°$。

检验： 在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=40°$，$\angle C=60°$，$\angle ADC=180°-40°-60°=80°$，一致。

例 2　如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=5$，$BC=8$。分别以点 A、B 为圆心、大于 $(1/2)AB$ 的长为半径画弧，两弧交于两点，过这两点作直线，交 AB 于点 E，交 BC 于点 D，连接 AD。求 $\triangle ADC$ 的周长。



思路： 以 A、B 为圆心、相同半径画弧，过两个交点作直线，这是作 AB 的垂直平分线。点 D 在这条直线上，所以 $DA = DB$。周长 $AD + DC + AC$ 里，AD 和 DC 单独都不知道，但把 AD 换成 DB，$DB + DC$ 正好是 BC。

解： 由作图可知，DE 是线段 AB 的垂直平分线，点 D 在 DE 上，所以 $DA = DB$。

所以 $\triangle ADC$ 的周长为

$$AD + DC + AC = DB + DC + AC = BC + AC = 8 + 5 = 13.$$

回顾： 垂直平分线的作用是把一条线段“换”成另一条相等的线段，让分散的线段首尾相接、合成一条已知的线段。例 1 中的角平分线也是一样，把一个角“分”成两个已知的角：AD 平分 $\angle BAC$，把 $80°$ 的 $\angle BAC$ 分成两个 $40°$ 的角。

易错点

- **用刻度尺量长度、用量角器量角度。** 这不是尺规作图。直尺只用来连线，圆规只用来画弧和截取长度。
- **半径小于或等于一半。** 作角平分线、垂直平分线时，半径必须大于 $(1/2)MN$ 或 $(1/2)AB$。小于一半，两弧不相交；等于一半，两弧只在中点碰一下，作垂直平分线时只得到一个点，定不出直线。
- **作角平分线时，第二步的两个半径不相等。** 依据是 SSS，用到了两个半径相等；半径不同，交点就不在平分线上。
- **擦掉作图痕迹，或不写结论。** 作图痕迹就是“作法”的证据，要保留；最后要写“射线 OC 就是所求作的角平分线”之类的结论。
- **作图语言不规范。** 应说“以点 A 为圆心、AB 的长为半径画弧”，不说“以 AB 为半径”；应说“延长线段 AB”，不说“延长直线 AB”。
- **看到作图痕迹认不出作的是什么。** 从角的顶点出发画弧、再交出一点连射线，是角平分线；以线段两端为圆心交出两点连直线，是垂直平分线。先认图，再用性质。

联系

- **全等三角形：** 作一个角等于已知角、作角的平分线的依据都是 SSS；已知三边、两边夹角、两角夹边作三角形，分别对应 SSS、SAS、ASA。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **轴对称与等腰三角形：** 作垂直平分线、过一点作垂线的依据是“到线段两端距离相等的点在垂直平分线

上”；作最短路径时要先作对称点，用的也是作垂线。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。

- **三角形：** 两弧能不能相交，由三边关系决定。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **几何图形初步：** 作一条线段等于已知线段、作角的平分线、作线段的中点，是把那里的概念用圆规和直尺实现出来。见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。
- **与圆有关的位置关系：** 作三角形两边的垂直平分线，交点是外接圆的圆心；作两个角的平分线，交点是内切圆的圆心。见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。

真题： 2026 年第 19 题（第 362 页）、2025 年第 19 题（第 375 页）、2024 年第 19 题（第 389 页）、2023 年第 18 题（第 402 页）、2022 年第 18 题（第 415 页）。

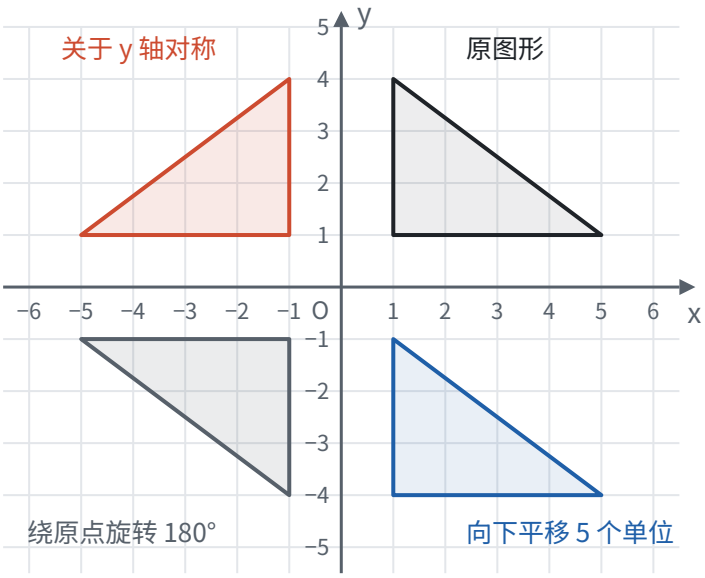
总览：给图形装上坐标

给平面装上坐标，点就变成了一对数；图形的平移、翻折、旋转，就变成了对坐标的简单运算。

从数轴到坐标系

数轴让每个数都有了一个位置（见第二部分“有理数”（第 36 页））。把两条数轴垂直地放在一起，平面上的每个点也都有了一对数，这就是平面直角坐标系。从此，“形”的问题可以用“数”来算：点的位置用坐标说，两点的距离用坐标差和勾股定理算，图形的面积用割补法算。

图形放进坐标系以后，还可以让它动起来。一个图形在平面上保持形状和大小不变地移动，只有三种基本方式：平移、轴对称（翻折）、旋转。



三种变换对比

变换	由什么确定	什么不变	什么改变	对应点的关系	坐标怎样变（举例）
平移	方向、距离	形状、大小；对应线段平行（或共线）	位置	连线平行（或共线）且相等	向右 a、向上 b：$(x+a, y+b)$
轴对称	对称轴	形状、大小；对称轴上的点	位置；顶点的绕向变反	对称轴垂直平分对应点连线	关于 x 轴：$(x, -y)$；关于 y 轴：$(-x, y)$
旋转	旋转中心、方向、旋转角	形状、大小；每点到中心的距离	位置；线段的方向	到中心距离相等，与中心连线的夹角等于旋转角	绕原点旋转 180°：$(-x, -y)$
位似（对照）	位似中心、相似比	形状；对应线段平行（或共线）	位置、大小	连线都经过位似中心，到中心的距离成比例	以原点为中心、相似比 k：(kx, ky) 或 $(-kx, -ky)$

读这张表，可以看出几件事：

- **前三种变换都不改变形状和大小，** 所以变换前后的图形全等。全等是“静止地看”，变换是“动起来看”（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。
- **旋转 180° 就是中心对称。** 两次沿互相垂直的直线翻折，结果正好是绕交点旋转 180°：开头那张图里，第一象限的原三角形关于 y 轴对称，落到第二象限；这个三角形再关于 x 轴对称，就落到了第三象限，正是原三角形绕原点旋转 180° 的位置。
- **只有轴对称会把图形翻个面。** 平移和旋转怎么组合，顶点的绕向都不会变。
- **位似改变大小、保持形状，** 是从全等走向相似的变换，放在这里作对照（见第八部分“相似”（第 230 页））。

两页之间的关系

页面	讲什么	核心的想法
平面直角坐标系	有序数对；点的坐标；象限；点到坐标轴的距离；用坐标描述图形和位置	两条数轴组成坐标系，点和有序实数对一一对应
平移、轴对称与旋转	三种变换的性质和画法；中心对称和中心对称图形；对称点的坐标；用坐标表示平移；图案设计；函数图象的平移	抓住对应点的关系，性质、画法、坐标规律都从它推出

建议的学习顺序：

1. 先学第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）（七年级下册）。重点是从坐标的意义出发想问题：横坐标管左右，纵坐标管上下，距离是坐标差的绝对值。
2. 接着学第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）里的“平移”和“用坐标表示平移”（七年级下册）。
3. 学完第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）后（八年级上册），回来看“轴对称”和对称点的坐标。
4. 九年级上册学旋转时，再看“旋转”“中心对称”和“图案设计”，并把三种变换放在一起对比。

这一部分是后面许多内容的舞台：函数的图象画在坐标系里（见第七部分“函数”（第 201 页）），抛物线的平移就是图象上每个点的平移（见第七部分“二次函数”（第 218 页）），圆的许多性质来自旋转对称（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）），坐标让几何问题可以计算（见第十一部分“以数解形”（第 318 页））。

平面直角坐标系

> 对应人教版七年级下册第九章。

平面直角坐标系是把两条数轴垂直地放在一起：平面上的每一个点都对应一对有序实数 (x, y)，每一对有序实数也对应平面上唯一的一个点。 有了它，点的位置可以用数来说，图形的问题可以用计算来做。

从哪里来：一个数不够用

在数轴上，一个数就能确定一个点的位置（见第二部分“有理数”（第 36 页））。可是到了平面上，一个数就不够了：

情境	怎样确定位置	用了几个数
电影票	5 排 8 号	2 个：排数、座号
教室座位	第 3 列第 4 行	2 个：列数、行数
国际象棋棋盘	e4	2 个：一个字母表示列，一个数字表示行
地球上的位置	东经 113.6°，北纬 34.7°	2 个：经度、纬度

这些例子有两个共同点。第一，平面上确定一个位置要**两个数**。第二，两个数的**顺序**不能随便换：“5 排 8 号”和“8 排 5 号”是两个不同的座位。像这样有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫**有序数对**，记作 (a, b)。

怎样让平面上的每一个点都有一个有序数对？最自然的办法是把数轴用两次：一条横着放，量左右；一条竖着放，量上下。

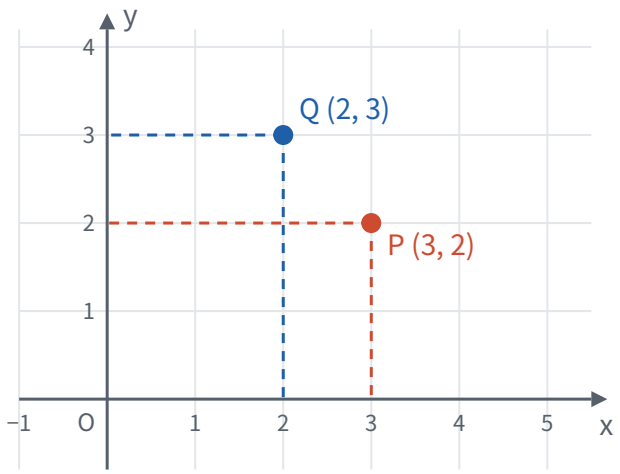
在平面内画两条**互相垂直、原点重合**的数轴，就组成**平面直角坐标系**：

- 水平的数轴叫 **x 轴**（横轴），取向右为正方向；
- 竖直的数轴叫 **y 轴**（纵轴），取向上为正方向；
- 两轴的交点 O 叫**坐标原点**。

两条轴取成互相垂直的，是为了让两个数各管各的：沿水平方向移动，竖直方向的读数不变；沿竖直方向移动，水平方向的读数不变。

点的坐标

有了坐标系，怎样读出一个点对应的数对？过点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足在 x 轴上对应的数 a 叫点 P 的**横坐标**，在 y 轴上对应的数 b 叫点 P 的**纵坐标**，有序数对 (a, b) 叫点 P 的**坐标**，记作 $P(a, b)$。**横坐标写在前面，纵坐标写在后面。**



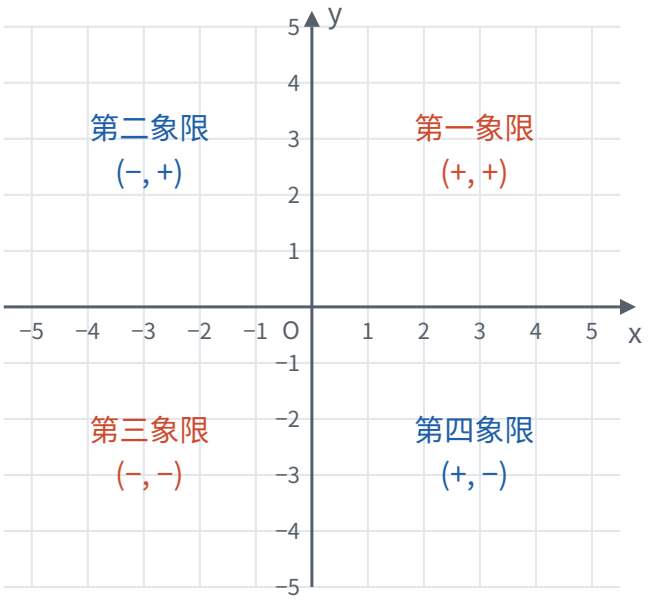
图中 P 的坐标是 $(3, 2)$：从原点出发向右 3、向上 2。Q 的坐标是 $(2, 3)$：向右 2、向上 3。两个坐标用的数相同，只是顺序不同，就是两个不同的点。原点 O 的坐标是 $(0, 0)$。

反过来，给出一个有序数对 (a, b)，在 x 轴上找到表示 a 的点，过它作 x 轴的垂线；在 y 轴上找到表示 b 的点，过它作 y 轴的垂线。两条垂线只交于一点，这个点就是 (a, b) 表示的点。

所以，**坐标平面内的点和有序实数对是一一对应的**。这和“实数与数轴上的点一一对应”是同一件事，只是从一条直线推广到了整个平面。

象限和坐标轴上的点

两条坐标轴把平面分成四个部分，叫四个**象限**：右上方是第一象限，按逆时针方向依次是第二、三、四象限。



每个象限里点的坐标的符号，不用背，直接从坐标的意义推出来：点在 y 轴右边，横坐标就是正数，在左边就是负数；点在 x 轴上方，纵坐标就是正数，在下方就是负数。

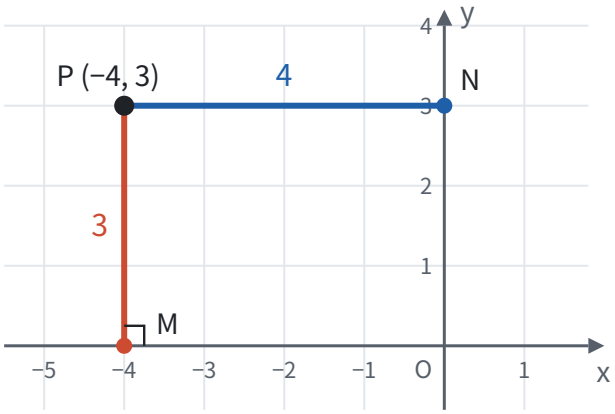
点的位置	横坐标	纵坐标	例子
第一象限	正	正	$(3, 2)$
第二象限	负	正	$(-3, 2)$
第三象限	负	负	$(-3, -2)$
第四象限	正	负	$(3, -2)$
x 轴上	任意	0	$(-5, 0)$
y 轴上	0	任意	$(0, 4)$

坐标轴上的点不属于任何象限。 象限是被两条轴隔开的四块区域，轴本身是分界线。

为什么 x 轴上的点纵坐标是 0？点在 x 轴上，向 x 轴作垂线，垂足就是它自己；向 y 轴作垂线，垂足是原点，对应的数是 0。同样，y 轴上的点横坐标是 0。

坐标和距离

点到坐标轴的距离。 点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离，是 P 到 x 轴的垂线段的长。垂足 M 的坐标是 $(a, 0)$，PM 是竖直的，它的长就是 b 到 0 的距离，也就是 $|b|$。同样，P 到 y 轴的垂线段是 PN，垂足 N 的坐标是 $(0, b)$，PN 是水平的，长为 $|a|$。

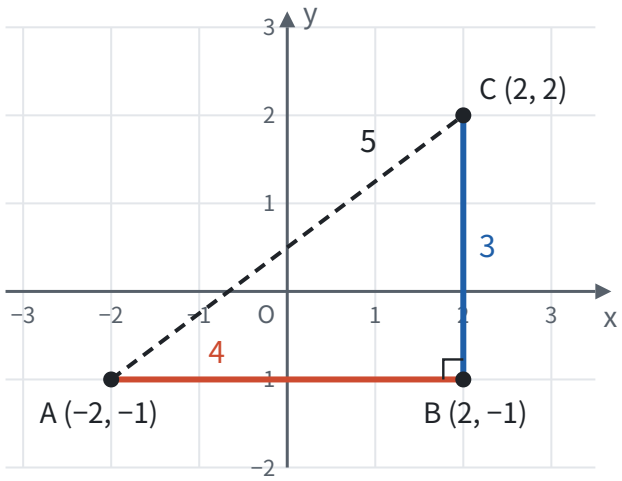


所以：**点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离是 $|b|$，到 y 轴的距离是 $|a|$。** 图中 $P(-4, 3)$ 到 x 轴的距离是 3，到 y 轴的距离是 $|-4| = 4$。注意交叉：到 x 轴的距离看**纵坐标**，到 y 轴的距离看**横坐标**。

平行于坐标轴的线段。 在平行于 x 轴的直线上，所有点到 x 轴的距离相等，又在 x 轴的同一侧，所以**纵坐标都相同**；同样，平行于 y 轴的直线上的点**横坐标都相同**。这样的两点之间的距离，就是数轴上两点间的距离：

- $A(x_1, y)$、$B(x_2, y)$ 在平行于 x 轴的直线上，$AB = |x_1 - x_2|$；
- $B(x, y_1)$、$C(x, y_2)$ 在平行于 y 轴的直线上，$BC = |y_1 - y_2|$。

任意两点的距离。 两点不在平行于坐标轴的直线上时，可以借一个直角三角形：



图中 $A(-2, -1)$，$C(2, 2)$。取 $B(2, -1)$，使 AB 平行于 x 轴、BC 平行于 y 轴，则 $\angle ABC = 90°$，

$$AB = |2 - (-2)| = 4, \quad BC = |2 - (-1)| = 3.$$

由勾股定理，$AC = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$（见第五部分“勾股定理”（第 149 页））。坐标系里的斜线段，都可以这样化成横、竖两段来算。

例 1　已知点 $P(2m - 4, m + 1)$。

(1) 点 P 在 y 轴上，求点 P 的坐标；

(2) 点 P 在第二象限，求 m 的取值范围。

思路： 点的位置和坐标的关系，要翻译成关于 m 的方程或不等式。“在 y 轴上”是一个等式条件；“在第二象限”是两个不等式条件，要同时成立。

解： (1) 点 P 在 y 轴上，所以横坐标为 0，即 $2m-4=0$，得 $m=2$。此时 $m+1=3$，所以点 P 的坐标是 $(0,3)$。

(2) 第二象限的点横坐标为负、纵坐标为正，所以

$$\begin{cases}2m-4<0,\\ m+1>0.\end{cases}$$

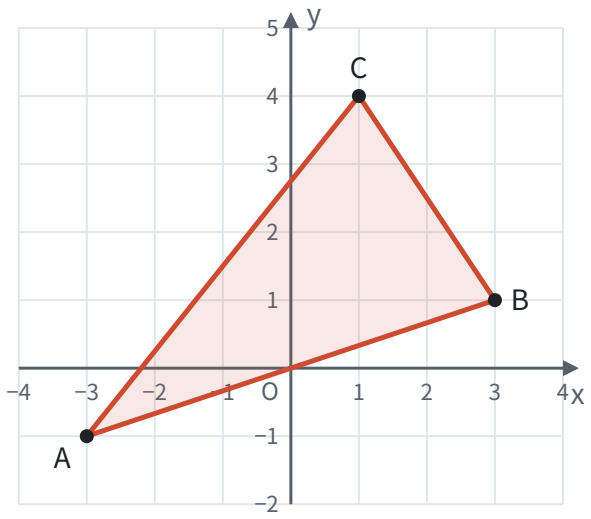
解第一个不等式得 $m<2$，解第二个得 $m>-1$，所以 $-1<m<2$。

检验： 取 $m=0$，$P(-4,1)$，确实在第二象限；取 $m=2$，$P(0,3)$ 在 y 轴上，不属于任何象限，所以 $m=2$ 不能取。这和第 1 问的结果互相印证。

用坐标描述图形

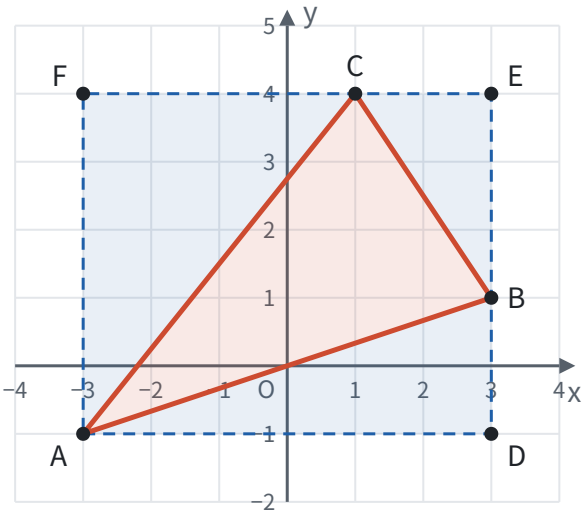
有了坐标，图形的长度、面积就能用计算得到。最常用的是**割补法**：坐标系里横、竖方向的线段长度最好算，所以把斜放的图形放进一个边平行于坐标轴的长方形里，用长方形的面积减去多出来的部分。

例 2　在平面直角坐标系中，$A(-3,-1)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积。



思路： $\triangle ABC$ 的三条边都是斜的，底和高都不好直接找。但是过三个顶点作平行于坐标轴的直线，围成的长方形边长可以直接从坐标读出；长方形比三角形多出来的是三个直角三角形，它们的直角边也都是横、竖方向的，同样可以直接读出。

解： 作长方形 $ADEF$，使 $D(3,-1)$，$E(3,4)$，$F(-3,4)$，则 B 在 DE 上，C 在 EF 上。长方形比 $\triangle ABC$ 多出的部分，是 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle ACF$ 三个直角三角形：

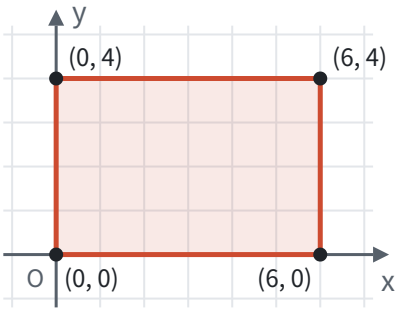


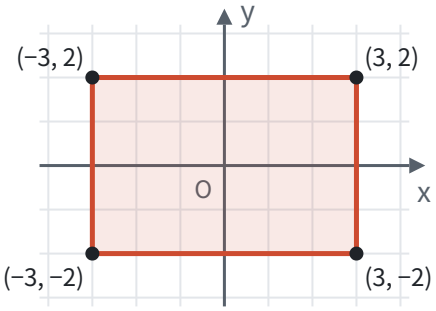
- 长方形 $ADEF$：$AD = 3 - (-3) = 6$，$DE = 4 - (-1) = 5$，面积为 $6 \times 5 = 30$；
- $\triangle ABD$：$AD = 6$，$BD = 1 - (-1) = 2$，面积为 $1/2 \times 6 \times 2 = 6$；
- $\triangle BCE$：$BE = 4 - 1 = 3$，$CE = 3 - 1 = 2$，面积为 $1/2 \times 3 \times 2 = 3$；
- $\triangle ACF$：$AF = 4 - (-1) = 5$，$CF = 1 - (-3) = 4$，面积为 $1/2 \times 5 \times 4 = 10$。

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $30 - 6 - 3 - 10 = 11$。

回顾： 割补法的关键是让所有要算的线段都变成横的或竖的，这样长度就是坐标之差。如果三角形有一条边本来就平行于坐标轴，就直接用这条边作底，高就是第三个顶点到这条边的横向或纵向距离，不必割补。

坐标系是人放上去的，同一个图形可以有不同的放法。比如一个长 6、宽 4 的长方形，把一个顶点放在原点、两边放在坐标轴上，四个顶点是 $(0, 0)$、$(6, 0)$、$(6, 4)$、$(0, 4)$；把中心放在原点、边平行于坐标轴，四个顶点是 $(\pm 3, \pm 2)$。

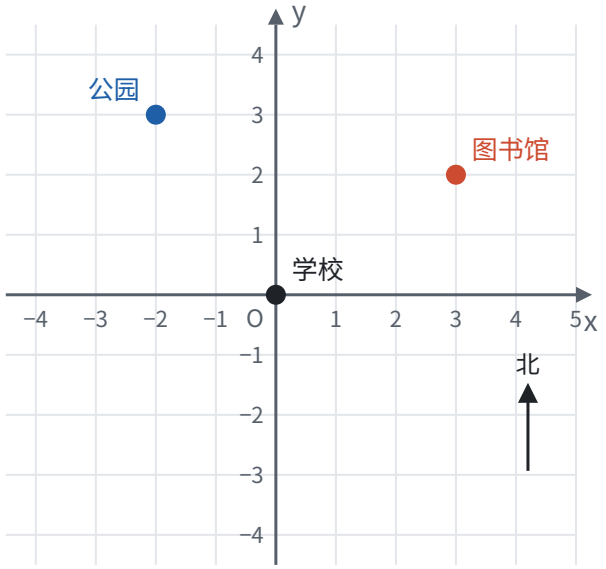




图形没有变，坐标变了。**建坐标系时，让尽量多的点落在坐标轴上、让图形的对称轴落在坐标轴上，坐标就最简单。**

用坐标描述位置

地图就是一个坐标平面。用坐标描述地点的位置，要先说清三件事：原点选在哪里，哪个方向是正方向，一个单位长度代表多少实际距离。通常取正东为 x 轴正方向，正北为 y 轴正方向。



每格 100 m

例 3 如图，以学校为原点，每个单位长度代表 100 m。公园的坐标是 $(-2, 3)$，图书馆的坐标是 $(3, 2)$。

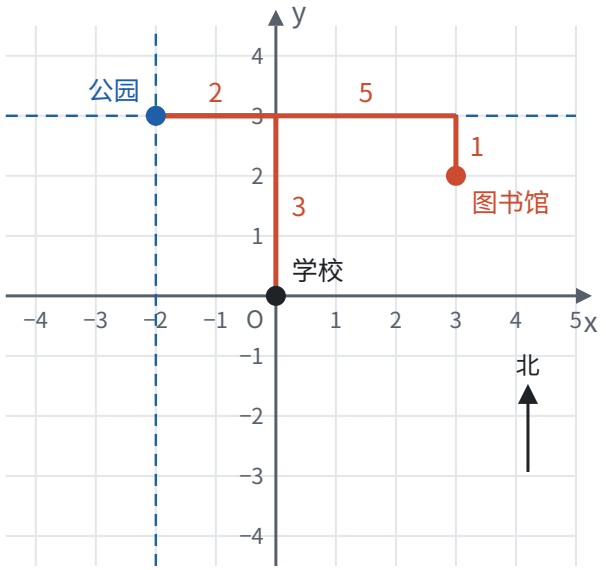
(1) 公园、图书馆分别在学校的什么位置？

(2) 如果改为以公园为原点，方向和单位长度不变，图书馆和学校的坐标分别是什么？

思路： 坐标的两个数，分别是从原点出发向东（负数就是向西）走了多远、向北（负数就是向南）走了多远。换了原点，就是换了出发点，要算的是从新的出发点走到目的地，东西方向、南北方向各要走多远。

解： (1) 公园在学校以西 200 m、以北 300 m 处；图书馆在学校以东 300 m、以北 200 m 处。

(2) 以公园为原点，就是过公园重新画两条坐标轴（下图的虚线）：



每格 100 m

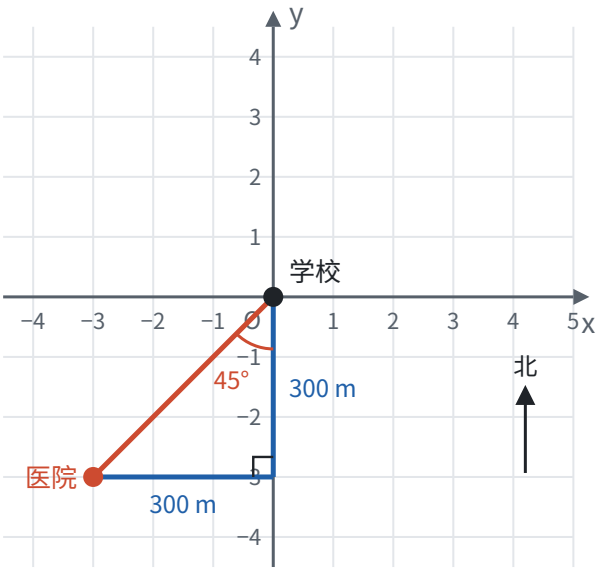
从公园 $(-2, 3)$ 到图书馆 $(3, 2)$：向东走 $3-(-2)=5$ 个单位，向北走 $2-3=-1$ 个单位（即向南 1 个单位），所以图书馆的新坐标是 $(5, -1)$。

从公园 $(-2, 3)$ 到学校 $(0, 0)$：向东走 $0-(-2)=2$ 个单位，向北走 $0-3=-3$ 个单位，所以学校的新坐标是

$(2, -3)$。

回顾： 换原点后，每个点的新坐标都等于旧坐标减去新原点的旧坐标：横坐标都减 -2，纵坐标都减 3。所有点的坐标同时加减同一个数，这正是平移的坐标规律（见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页））。

描述位置还有另一种办法：**方向和距离**。还用例 3 的地图（以学校为原点，每格 100 m，正东、正北为正方向），在上面标出医院：



每格 100 m

医院的坐标是 $(-3, -3)$，从学校出发，向西、向南各走 300 m，所以医院在学校的西南方向，也就是南偏西 45° 方向；距离是一个等腰直角三角形的斜边，由勾股定理，是 $\sqrt{(3^2 + 3^2)} \times 100 = 300\sqrt{2}$（m）。代入参考数据 $\sqrt{2} \approx 1.41$，$300\sqrt{2} \approx 300 \times 1.41 = 423$（m）。这两种说法都要用两个量：坐标用“东西多远、南北多远”，方向和距离用“朝哪个方向、走多远”。

易错点

- **横、纵坐标写反。** 坐标 (a, b) 永远是横坐标在前。$(3, 2)$ 和 $(2, 3)$ 是两个不同的点。
- **把坐标轴上的点归入某个象限。** $(0, 4)$ 在 y 轴上，$(-5, 0)$ 在 x 轴上，都不属于任何象限。说“点在第二象限”时，横坐标小于 0、纵坐标大于 0 都要严格成立。
- **到坐标轴的距离弄反。** 点 (a, b) 到 ***x* 轴**的距离是 $|b|$，是纵坐标的绝对值，因为垂线段是竖直的。
- **距离忘了加绝对值。** 距离不能是负数。已知“点到 x 轴的距离是 3”，纵坐标可能是 3，也可能是 -3，要分两种情况。
- **平行于坐标轴弄混。** 平行于 ***x* 轴**的直线上，是**纵坐标**相同；平行于 y 轴的直线上，是横坐标相同。想不清时，画一条水平线看看哪个坐标没变。
- **地图题忘了单位长度。** 坐标差出来的是单位个数，要乘上每个单位代表的实际距离。

联系

- **数轴：** 平面直角坐标系就是两条数轴。点到坐标轴的距离、平行于坐标轴的线段长，都回到数轴上的绝对值和两点间距离。见第二部分“有理数”（第 36 页）。

- **不等式组：** 点在哪个象限，翻译过来就是一组不等式。见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **二元一次方程组：** 二元一次方程的一个解是一个有序数对，在坐标系里就是一个点；方程组的解是两条直线的交点。见第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）。
- **勾股定理：** 坐标系里任意两点的距离，靠勾股定理化成横、竖两段来算。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **图形的变化：** 平移、轴对称、旋转后点的坐标怎样变，都从坐标的意义推出来。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **函数：** 函数的一对对应值 (x, y) 就是坐标系里的一个点，所有这样的点组成函数的图象。坐标系是研究函数的舞台。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **以数解形：** 有了坐标，几何问题可以化成计算：求长度、求面积、判断位置关系。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。

真题： 2026 年第 9 题（第 357 页）、2024 年第 14 题（第 386 页）、2022 年第 9 题（第 410 页）。

平移、轴对称与旋转 ★

> 对应人教版七年级下册 7.4 节和 9.2 节、八年级上册第十五章、九年级上册第二十八章。

平移、轴对称、旋转都只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小，变换前后的两个图形全等。 每种变换由几个要素完全确定，对应点之间有固定的关系；放进坐标系，这种关系就变成了坐标的简单运算。

从哪里来：纸片的三种动法

把一张三角形纸片放在桌上，不许撕、不许折、不许拉，只让它换个位置。仔细想想，基本的动法只有三种：

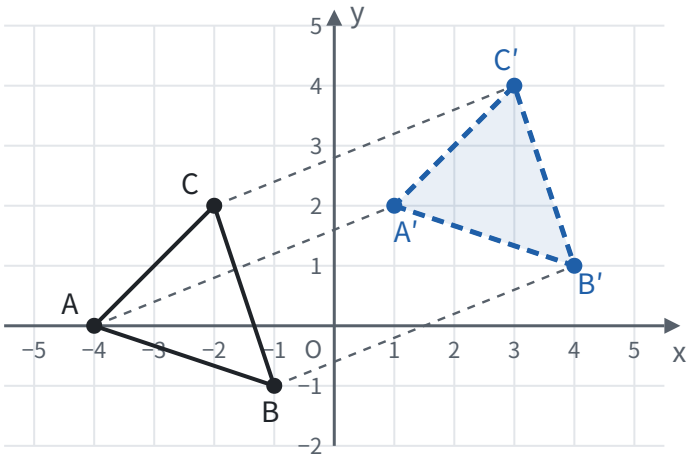
变换	怎样动	由什么确定	生活中的例子
平移	沿一个方向滑过去	方向、距离	推拉窗、电梯、传送带上的箱子
轴对称	沿一条直线翻过去	对称轴	对折剪纸、镜子里的像
旋转	绕一个点转过去	旋转中心、旋转方向、旋转角	钟表的指针、风车、拧螺丝

纸片本身没有变，所以**变换前后的图形全等**，对应线段相等，对应角相等。反过来，两个全等的图形，总能通过这几种变换的组合重合在一起（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。

研究每一种变换，就是研究一个问题：**对应点之间有什么关系？** 这个关系清楚了，性质就出来了，画图的方法也出来了：变换对图形上每一个点都按同一个规则作用，所以画图时只要找出几个关键点，把它们变过去，再连起来。

平移

在平面内，把一个图形整体沿某一方向移动一定的距离，叫**平移**。平移由**方向**和**距离**确定。



平移时，图形上**每一个点**都沿同一个方向移动了同样的距离。于是：

- **对应点所连的线段平行（或在同一条直线上）且相等：** $AA' \parallel BB' \parallel CC'$，$AA' = BB' = CC'$。
- **对应线段平行（或在同一条直线上）且相等：** AA' 和 BB' 平行且相等，所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形（一组对边平行且相等），它的另一组对边也平行且相等，即 $AB \parallel A'B'$，$AB = A'B'$（见第五部分“四边形”（第 157 页））。
- **对应角相等，** 平移前后的图形全等。

画平移后的图形： 找出图形的关键点（多边形的顶点），把每个关键点都按规定的方向和距离移过去，再按原来的顺序连起来。

用坐标表示平移

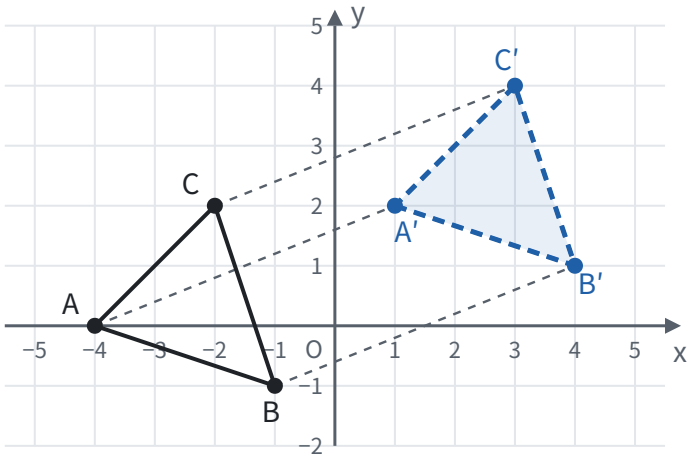
在坐标系里，平移的方向和距离可以拆成水平、竖直两部分。一个点向右平移 a 个单位，它沿水平方向移动，到 x 轴的距离不变，纵坐标不变；它在水平方向上的读数增加 a，横坐标加 a。其他方向同理：

平移	点 (x, y) 变成
向右平移 a 个单位（$a > 0$）	$(x + a, y)$
向左平移 a 个单位	$(x - a, y)$
向上平移 b 个单位（$b > 0$）	$(x, y + b)$
向下平移 b 个单位	$(x, y - b)$

左右移动只改横坐标，上下移动只改纵坐标。 斜着平移，就是两个方向各移一段，横、纵坐标各加一个数。反过来，一个图形上所有点的横坐标都加同一个数、纵坐标都加同一个数，这个图形就是平移了。

例 1　如图，$\triangle ABC$ 的顶点 $A(-4, 0)$，$B(-1, -1)$，$C(-2, 2)$。把 $\triangle ABC$ 平移，使点 A 移到点 $A'(1, 2)$，求 B'、C' 的坐标。

这是前面讲平移时用过的那张图：



思路： 平移时每个点的移动都一样。题目没有直接说怎样平移，但给了一对对应点，从 A 到 A' 的变化就是所有点的变化。

解： 从 $A(-4,0)$ 到 $A'(1,2)$，横坐标增加 $1-(-4)=5$，纵坐标增加 $2-0=2$，也就是向右平移 5 个单位、再向上平移 2 个单位。所以

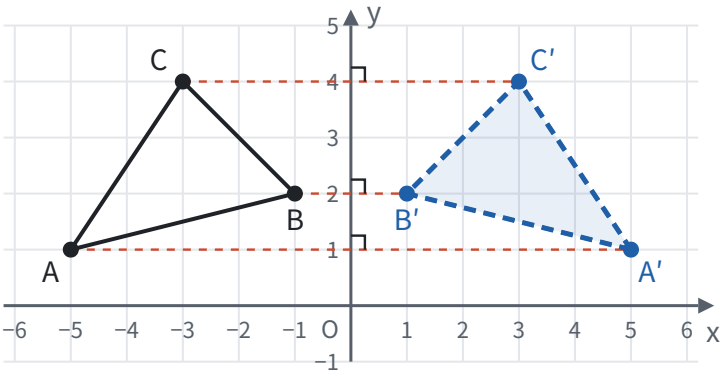
$$B'(-1+5,-1+2)=B'(4,1),\quad C'(-2+5,2+2)=C'(3,4).$$

检验： BB' 的横向变化是 $4-(-1)=5$，纵向变化是 $1-(-1)=2$，和 AA' 一样，符合“对应点的连线平行且相等”。

想一想： 例 1 里坐标系不动、图形动：$\triangle ABC$ 向右平移 5 个单位、向上平移 2 个单位，每个顶点的横坐标都加 5、纵坐标都加 2。反过来，图形不动、坐标系动，坐标也会这样变。第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）的例 3 中，地图上的地点没有动，只是把原点从学校换到了公园：以学校为原点时公园是 $(-2,3)$、图书馆是 $(3,2)$，换成以公园为原点后，图书馆变成 $(5,-1)$、学校变成 $(2,-3)$，每个点的横坐标都加 2、纵坐标都加 -3，也是加上了同一对数。图形向右平移 2 个单位，和坐标系向左平移 2 个单位，坐标的变化完全一样：运动是相对的。

轴对称

把一个图形沿一条直线翻折，得到的图形和原图形**关于这条直线对称**，这条直线叫**对称轴**。轴对称由**对称轴**确定。一个图形沿一条直线对折，两旁的部分能够完全重合，这个图形叫**轴对称图形**。这些概念和垂直平分线的来历，见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页），这里只看它和其他变换的对比。



轴对称的核心性质：**对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。** 图中 AA'、BB'、CC' 都垂直于 y 轴，并

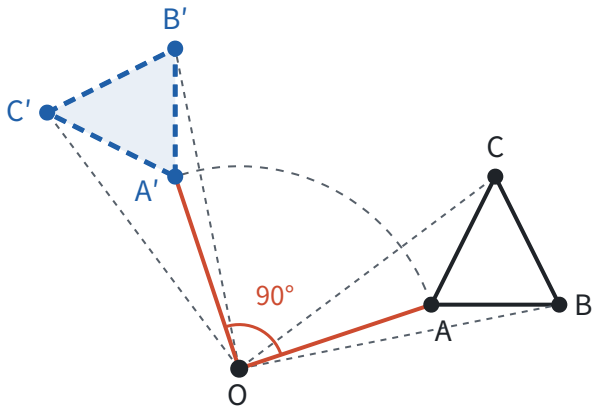
且被 y 轴平分。

画轴对称图形： 对每个关键点，过它作对称轴的垂线，在垂线上对称轴的另一侧截取等长的线段，得到对称点，再按原来的顺序连起来。

翻折和另外两种变换有一点不同：**翻折会把图形翻个面。** 图中 $A \to B \to C$ 是逆时针方向，翻折后 $A' \to B' \to C'$ 变成了顺时针方向。只靠平移和旋转，永远改不了这个绕向；所以两个全等图形绕向相反时，要重合必须经过一次翻折。

旋转

在平面内，把一个图形绕着一个定点 O 沿某个方向转动一个角度，叫**旋转**。点 O 叫**旋转中心**，转动的角叫**旋转角**。旋转由**旋转中心、旋转方向（顺时针或逆时针）、旋转角**三个要素确定，少一个都说不清。

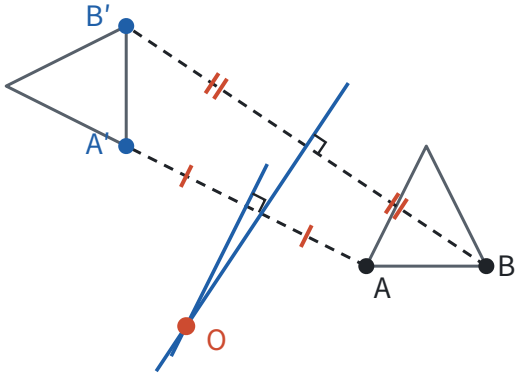


旋转时，图形像钉在 O 点上的纸片一样转动，上面每一个点都绕 O 画一段圆弧，转过同样的角度。于是：

- **对应点到旋转中心的距离相等：** $OA = OA'$，$OB = OB'$，$OC = OC'$；
- **对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角：** $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = 90°$；
- **旋转前后的图形全等。**

画旋转后的图形： 对每个关键点 A，连接 OA，按旋转方向作 $\angle AOA'$ 等于旋转角，在射线上截取 $OA' = OA$，得到 A'，再按原来的顺序连起来。

找旋转中心： 已知两对对应点 A、A' 和 B、B'，因为 $OA = OA'$，O 在 AA' 的垂直平分线上；同样 O 在 BB' 的垂直平分线上。两条垂直平分线的交点就是旋转中心。

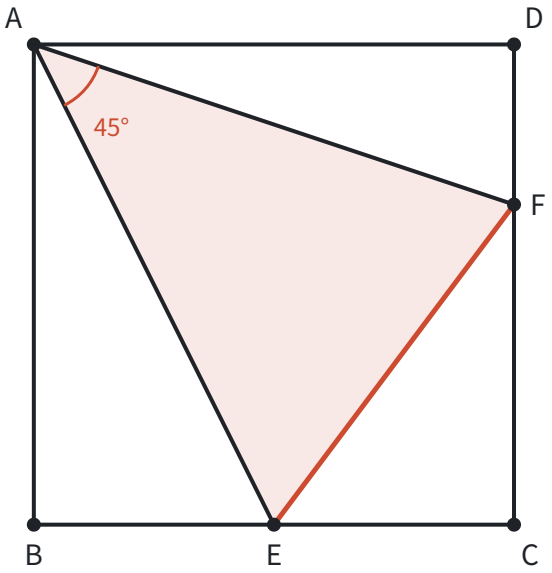


旋转有什么用？ 旋转不改变长度和角度，却能把一个三角形整个搬到别处去。题目里分散在不同位置的线段和角，可以用旋转把它们拼到一起。

例 2 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E 在 BC 上，点 F 在 CD 上，$\angle EAF = 45°$。

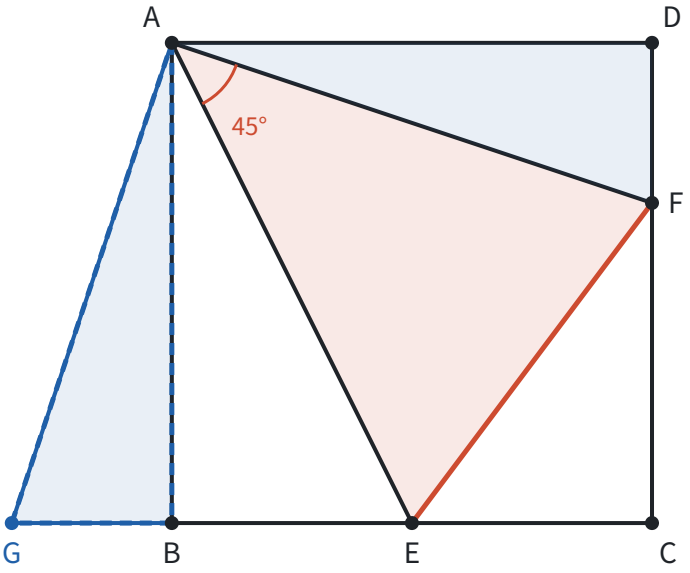
(1) 求证：$EF = BE + DF$；

(2) 若 $BE = 3$，求 DF 和 EF 的长。



思路： 要证一条线段等于另两条线段的和，通常把两条线段接成一条。BE 在 BC 上，DF 在 CD 上，离得很远。注意正方形的两条邻边 $AD = AB$，夹角是 90°：把 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，AD 正好转到 AB 上，DF 就被搬到了 B 点旁边，和 BE 接在同一条直线上。

证明： (1) 把 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，因为 $AD = AB$，$\angle DAB = 90°$，点 D 落在点 B 上。设点 F 落在点 G，得到 $\triangle ABG$：



旋转不改变形状和大小，$\triangle ABG \cong \triangle ADF$，所以

$$AG = AF, \quad BG = DF, \quad \angle ABG = \angle D = 90°, \quad \angle GAB = \angle FAD.$$

因为 $\angle ABG+\angle ABC=90°+90°=180°$，所以 G、B、C 三点在一条直线上，$GE=BG+BE=DF+BE$。

又因为 $\angle BAE+\angle FAD=90°-\angle EAF=45°$，所以

$$\angle GAE=\angle GAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE=45^\circ=\angle EAF.$$

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中，$AG=AF$，$\angle GAE=\angle FAE$，$AE=AE$，所以 $\triangle GAE\cong\triangle FAE$（SAS），$GE=EF$。

所以 $EF=GE=BE+DF$。

解： (2) 设 $DF=x$，则 $EF=BE+DF=3+x$，$CE=6-3=3$，$CF=6-x$。在 Rt$\triangle ECF$ 中，由勾股定理，

$$(3+x)^2=3^2+(6-x)^2.$$

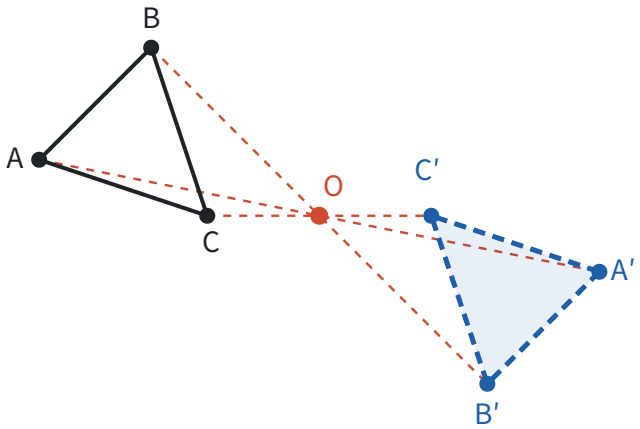
展开得 $9+6x+x^2=45-12x+x^2$，所以 $18x=36$，$x=2$。所以 $DF=2$，$EF=5$。

检验： $CE=3$，$CF=4$，$EF=5$，满足 $3^2+4^2=5^2$。

回顾： 旋转的目的是把 DF 搬到 BE 的延长线上。能转过去，靠的是正方形里两条**相等**的邻边 AD、AB 有公共端点 A：以 A 为中心，转过它们的夹角，一条边就和另一条重合。以后看到“共端点的两条等线段”（正方形、等边三角形、等腰直角三角形里都有），就可以想到绕这个公共端点旋转。

中心对称

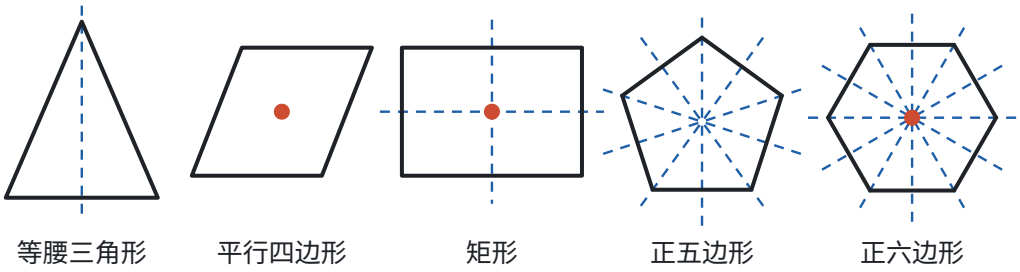
旋转角是 180° 的旋转最特殊。把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能和另一个图形重合，就说这两个图形**关于这个点对称**，或者说**中心对称**，这个点叫**对称中心**。



旋转 180° 时，$\angle AOA'=180°$，所以 A、O、A' 在一条直线上；又 $OA=OA'$，所以 O 是 AA' 的中点。于是：

中心对称的两个图形，对应点所连线段都经过对称中心，并且被对称中心平分。 要找对称中心，连接两对对应点，交点就是。

和轴对称一样，也要分清“两个图形”和“一个图形”：一个图形绕某一点旋转 180° 后能和**自己**重合，这个图形叫**中心对称图形**。



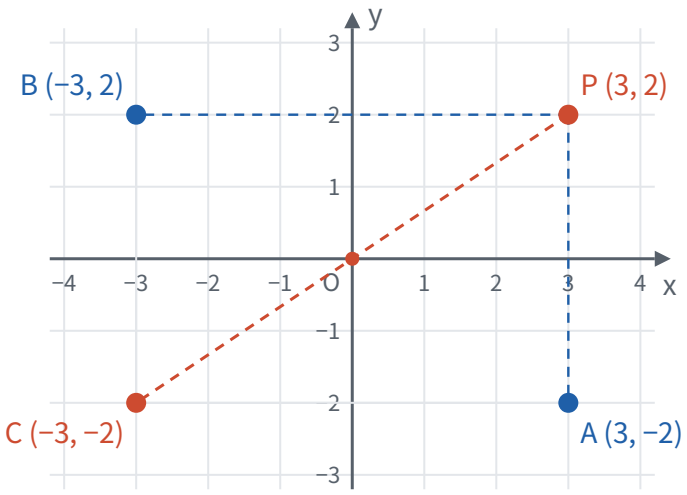
图形	轴对称图形	对称轴条数	中心对称图形
线段	是	2	是
等腰三角形（腰和底不相等）	是	1	不是
等边三角形	是	3	不是
平行四边形	一般不是	0	是
矩形、菱形（不是正方形）	是	2	是
正方形	是	4	是
正五边形	是	5	不是
正六边形	是	6	是
圆	是	无数条	是

平行四边形是中心对称图形，对称中心是两条对角线的交点。 “平行四边形的对角线互相平分”说的正是这件事：每个顶点和它的对顶点关于对角线交点对称。

正 n 边形都有 n 条对称轴，但只有 n 是偶数时才是中心对称图形。 绕中心旋转 $180°$ 后，每个顶点都要落到另一个顶点上，这就要求每个顶点正对面还有一个顶点。n 是奇数时，顶点的正对面是一条边的中点，所以正三角形、正五边形都不是中心对称图形。

对称点的坐标

在坐标系里，关于坐标轴或原点对称的点，坐标有简单的关系。这些关系都从对应点的性质推出来，不用单独记。



关于 x 轴对称： x 轴垂直平分 PA。“垂直”说明 PA 是竖直的，横坐标相同；“平分”说明 P、A 到 x 轴的距离相等、分在两侧，纵坐标互为相反数。所以 $P(3, 2)$ 关于 x 轴的对称点是 $A(3, -2)$。

关于 y 轴对称： 同理，纵坐标相同，横坐标互为相反数，$P(3, 2)$ 关于 y 轴的对称点是 $B(-3, 2)$。

关于原点对称： 原点是 PC 的中点，从 P 到 O 是向左 3、向下 2，从 O 到 C 也是向左 3、向下 2，所以横、纵坐标都互为相反数，$C(-3, -2)$。

图中还能看出：$P(3, 2)$ 先关于 y 轴对称到 $B(-3, 2)$，再关于 x 轴对称，就到了 $C(-3, -2)$。**两次沿互相垂直的直线翻折，合起来就是绕交点旋转 180°。** 翻两次面，绕向又翻了回来，所以结果是一个旋转。

把本页的坐标规律合在一起：

变换	点 (x, y) 变成	哪个坐标变了
向右平移 a、向上平移 b	$(x + a, y + b)$	横、纵坐标各加一个数
关于 x 轴对称	$(x, -y)$	纵坐标变为相反数
关于 y 轴对称	$(-x, y)$	横坐标变为相反数
关于原点对称	$(-x, -y)$	横、纵坐标都变为相反数

例 3　已知点 $P(a + 1, 3)$ 和点 $Q(-2, b - 1)$。P、Q 分别关于 x 轴、y 轴、原点对称时，求 a、b 的值。

思路： 每种对称都说清了哪个坐标相等、哪个坐标互为相反数，按它列出两个方程就行。拿不准时，想一想对称轴垂直平分对应点连线：关于 x 轴对称，连线是竖直的，所以横坐标相等。

解：

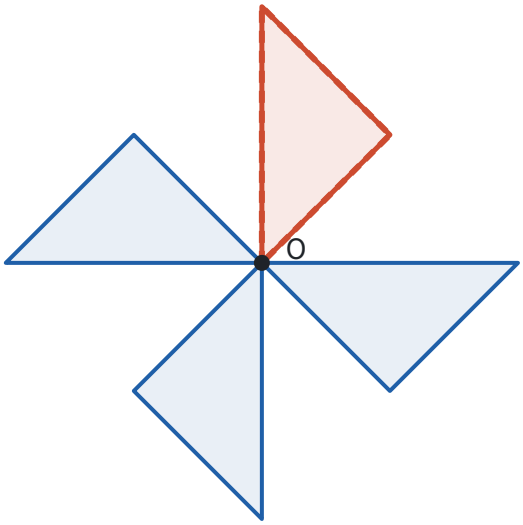
情况	横坐标的关系	纵坐标的关系	a	b
关于 x 轴对称	相等：$a + 1 = -2$	互为相反数：$b - 1 = -3$	-3	-2
关于 y 轴对称	互为相反数：$a + 1 = 2$	相等：$b - 1 = 3$	1	4
关于原点对称	互为相反数：$a + 1 = 2$	互为相反数：$b - 1 = -3$	1	-2

检验： 以关于 x 轴对称为例，$a = -3$、$b = -2$ 时，$P(-2, 3)$，$Q(-2, -3)$，横坐标相同，纵坐标互为相反数，确

实关于 x 轴对称。

图案设计

许多美丽的图案，都是从一个简单的基本图形出发，经过平移、轴对称、旋转得到的。分析一个图案，就是找出它的基本图形和用到的变换；设计一个图案，就是反过来做。



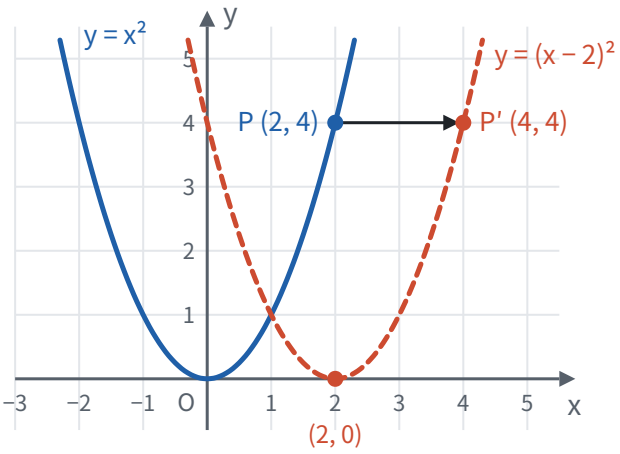
上图的风车，基本图形是强调色的那一片叶子。把它绕点 O 依次旋转 $90°$、$180°$、$270°$，得到另外三片。从这个“做法”可以直接读出图案的性质：

- 整个图案绕 O 旋转 $90°$ 后和自己重合，因为每片叶子都转到了下一片的位置；
- 所以旋转 $180°$ 也和自己重合，它是**中心对称图形**；
- 它**不是轴对称图形**：每片叶子都朝同一个绕向“甩”出去，翻折会把绕向变反，找不到一条能让它和自己重合的对称轴。

同一个基本图形换一种变换，得到的图案就不一样：一片叶子不断平移，得到一排花边；沿一条直线翻折，得到左右对称的剪纸。

用坐标看函数图象的平移

函数图象也是图形，也可以平移。把 $y = x^2$ 的图象向右平移 2 个单位，得到的新图象是什么函数的图象？



原图象上每个点 (x, y) 都变成 $(x+2, y)$。比如 $P(2, 4)$ 变成 $P'(4, 4)$，顶点 $O(0, 0)$ 变成 $(2, 0)$。

反过来想：新图象在横坐标为 x 的地方有多高？它是从原图象上横坐标为 $x-2$ 的点平移过来的，高度没变，所以新图象上 $y=(x-2)^2$。**向右平移 2 个单位，式子里的 x 换成 $x-2$，** 因为新图象要“晚 2 个单位”才达到原来的高度。

向上平移 3 个单位就简单了：每个点的纵坐标加 3，式子变成 $y=x^2+3$。

一次函数 $y=kx+b$ 中 b 的作用，就是把 $y=kx$ 的图象上下平移（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。对直线来说，左右平移和上下平移还可以互相转化：$y=2x$ 向右平移 1 个单位得 $y=2(x-1)=2x-2$，和向下平移 2 个单位的结果一样。二次函数的各种形式，也都是由 $y=ax^2$ 平移得到的（见第七部分“二次函数”（第 218 页））。

易错点

- **平移的坐标变化方向弄反。** 向左、向下是减，向右、向上是加；左右只改横坐标，上下只改纵坐标。拿不准时，画出一个点移动一下看看。
- **关于 x 轴对称，改错了坐标。** 关于 **x 轴**对称，横坐标不变、**纵坐标**变为相反数。原因是对应点连线垂直于 x 轴，是竖直的。
- **旋转只说角度。** “旋转 90°”说不清是哪个变换，必须同时说清旋转中心和旋转方向。
- **旋转角找错。** 旋转角是对应点与旋转中心所连线段的夹角，如 $\angle AOA'$，顶点一定在旋转中心。
- **中心对称和中心对称图形不分。** 前者说两个图形之间的关系，后者说一个图形自己的性质。轴对称和轴对称图形也一样。
- **平行四边形当成轴对称图形。** 一般的平行四边形沿任何直线对折都不能重合；它是中心对称图形。矩形、菱形、正方形才同时是轴对称图形。
- **正多边形都当成中心对称图形。** 只有边数是偶数的正多边形才是。
- **函数图象向右平移写成 $x+2$。** 向右平移 2 个单位，新图象在 x 处的高度等于原图象在 $x-2$ 处的高度，所以是 x 换成 $x-2$。

联系

- **全等三角形：** 三种变换都不改变形状和大小，变换前后的图形全等；两个全等图形总能用变换的组合重合。

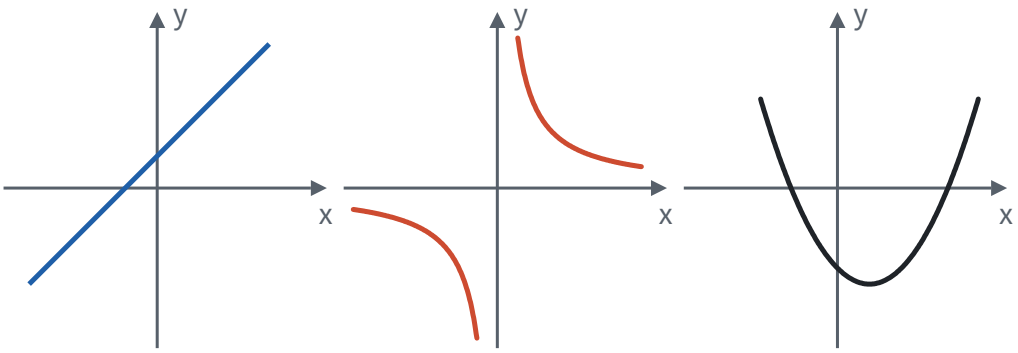
见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。

- **轴对称与等腰三角形：** 轴对称的定义、垂直平分线、利用轴对称求最短路径。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **四边形：** 平移的性质靠平行四边形来证；平行四边形是中心对称图形，对角线互相平分。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **平面直角坐标系：** 所有坐标规律都从坐标的意义推出；换原点和平移是同一件事的两种看法。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **一次函数和二次函数：** 函数图象的平移，就是图象上每个点的平移；抛物线是轴对称图形。见第七部分“一次函数”（第 206 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **反比例函数：** 反比例函数的图象是中心对称图形，对称中心是原点。见第七部分“反比例函数”（第 212 页）。
- **相似：** 位似是另一种变换，它保持形状、按比例改变大小，在坐标系中表现为坐标乘同一个数。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **圆：** 圆绕圆心旋转任意角度都和自己重合，弧、弦、圆心角之间的关系就是从这里来的。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。
- **辅助线：** 旋转、翻折、平移都能把分散的条件集中起来，例 2 就是一个例子：正方形 $ABCD$ 中 $\angle EAF = 45°$，把 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$，DF 就接到了 BE 的延长线上，证出 $EF = BE + DF$。见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）。

真题： 2026 年第 5 题（第 356 页）、2024 年第 14 题（第 386 页）、2023 年第 23 题（第 406 页）、2022 年第 9 题（第 410 页）、2022 年第 23 题（第 419 页）。

总览：三种函数对照

这一部分研究变化中的对应关系：先弄清什么是函数，再学一次函数、反比例函数、二次函数三种具体的函数。每一种函数都有解析式和图象两种面貌，性质既能从式子推出来，也能在图上看出来。



y = kx + b
一次函数：直线

y = k/x
反比例函数：双曲线

$y = ax^2 + bx + c$
二次函数：抛物线

对照表

	一次函数	反比例函数	二次函数
解析式	$y = kx + b$（$k \neq 0$）	$y = k/x$（$k \neq 0$）	$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）
描述什么样的变化	均匀变化：x 每增加 1，y 变化同一个数	乘积一定：$xy = k$	x 每增加 1，y 的变化量本身在均匀地变
自变量的取值范围	全体实数	$x \neq 0$	全体实数
图象	直线	双曲线，两支	抛物线
系数管什么	k 管方向和陡缓，b 管与 y 轴的交点	k 的正负管所在象限，$\lvert k\rvert$ 管离原点的远近	a 管开口方向和大小，顶点 (h, k) 管位置，c 管与 y 轴的交点
增减性	$k > 0$ 时增大，$k < 0$ 时减小	在每一个象限内：$k > 0$ 时减小，$k < 0$ 时增大	以对称轴为界，两侧相反
对称性	—	关于原点中心对称，关于直线 $y = x$、$y = -x$ 轴对称	关于对称轴 $x = h$ 轴对称
最大值、最小值	没有	没有	在顶点取到（顶点在取值范围内时）
确定解析式要几个条件	2 个	1 个	3 个
几何意义	k 是倾斜程度	$\lvert k\rvert$ 是图上矩形的面积	顶点是最高点或最低点
与方程、不等式	$y = 0$ 是一元一次方程；图象在 x 轴上方、下方是一元一次不等式	和直线联立，消元后是分式方程，常化成一元二次方程	$y = 0$ 是一元二次方程，判别式决定和 x 轴的交点个数

表里的“增减性”都是“y 随 x 的增大而……”；二次函数表里的 k 是顶点的纵坐标，和反比例函数的 k 不是一回事。

研究每一种函数，走的是同一条路

三种函数的页面，都按同一个顺序展开：

1. **从实际问题得到解析式：** 均匀变化、乘积一定、面积和利润，各自引出一种函数。
2. **描点画图：** 列表、描点、连线（见第七部分“函数”（第 201 页））。
3. **看图说性质，再用式子说明：** 图上看出的对称、增减，都要回到解析式说清为什么。
4. **待定系数法：** 有几个待定的系数，就需要几个条件。
5. **联系方程和不等式：** 令 $y=0$ 或者让两个函数相等，就回到了方程。
6. **解决实际问题：** 比较方案、求最大值或最小值，注意自变量的取值范围。

学透了一次函数，反比例函数和二次函数就是沿着同一条路再走两遍。每走到一步，都可以问自己：上一种函数在这一步是什么样子？

函数、方程、不等式：同一件事的几种问法

设两个函数的值分别是 y_1、y_2，下面每一行左右两边问的是同一件事：

在图象上看	用方程、不等式说
图象与 x 轴交点的横坐标	方程 $y_1=0$ 的解
图象在 x 轴上方的部分对应的 x 的范围	不等式 $y_1>0$ 的解
两个图象的交点	两个解析式联立成的方程组的解
一个图象在另一个图象上方的部分对应的 x 的范围	不等式 $y_1>y_2$ 的解

第四部分“总览：从等式到方程”（第 85 页）里有一张对照表，把解一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程组、一元二次方程，分别对应成直线与 x 轴的交点、直线在 x 轴上方的部分、两条直线的交点、抛物线与 x 轴的交点。这里是那张表的完整版：方程和不等式是代数的问法，函数图象是几何的问法。

学习顺序

1. **函数：** 先弄清“对应”和“唯一”，会求自变量的取值范围，会读图（见第七部分“函数”（第 201 页））。学之前要熟悉第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
2. **一次函数：** 最简单的函数，把“解析式 ↔ 图象 ↔ 方程、不等式”的对应关系完整走一遍（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。
3. **反比例函数：** 和正比例函数对照着学，重点是“在每一个象限内”和 k 的几何意义（见第七部分“反比例函数”（第 212 页））。
4. **二次函数：** 学完第四部分“一元二次方程”（第 104 页）后再学，重点是配方找顶点、平移和最值（见第七部分“二次函数”（第 218 页））。

学完这一部分，可以接着看第十一部分“动点与函数”（第 323 页）：图形中的点在运动，线段和面积跟着变，

就要用这里的三种函数去描述。

函数

> 对应人教版八年级下册第二十二章。

函数是一种对应：在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应，就说 y 是 x 的函数。 这里 x 叫自变量；$x=a$ 时对应的 y 值，叫 $x=a$ 时的函数值。

从哪里来

世界上很多量在变，而且一个量的变化常常跟着另一个量走：

变化过程	一个量	跟着变的量	关系
汽车以 60 km/h 匀速行驶	行驶时间 x（h）	路程 y（km）	$y=60x$
画不同大小的圆	半径 r	面积 S	$S=\pi r^2$
一天之中	时刻	气温	写不出式子，但每个时刻都有一个气温

在一个变化过程中，数值会变的量叫**变量**，数值始终不变的量叫**常量**。$y=60x$ 里，x、y 是变量，60 是常量；$S=\pi r^2$ 里，π 是常量。

这些例子有一个共同的样子：**先定下一个量，另一个量就跟着定下来了。** 时间定了，路程就定了；半径定了，面积就定了；时刻定了，气温就定了。

这种样子其实早就见过。代数式 $2x-1$ 的值随 x 变化：$x=3$ 时值是 5，$x=-1$ 时值是 −3，x 每取一个值，式子只算出一个值（见第三部分“代数式”（第 54 页））。函数就是把“代数式的值”这件事，推广到一切“一个量定下来、另一个量就跟着定下来”的变化过程，不管能不能写成式子。

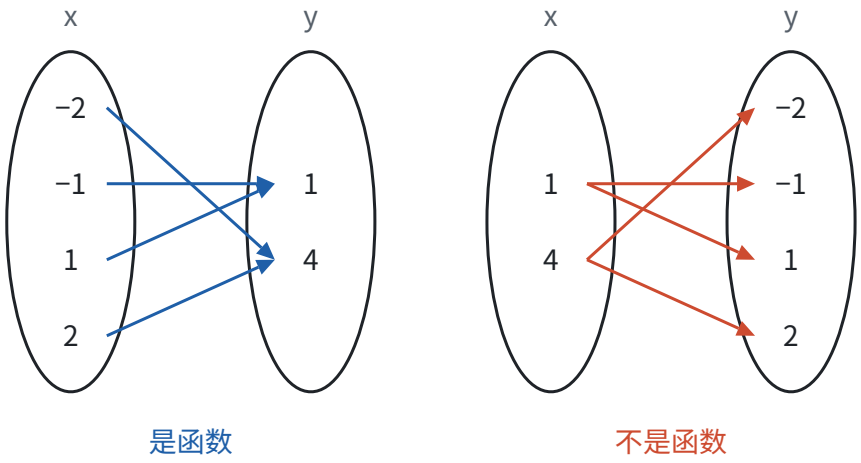
为什么要“每一个”和“唯一”

定义里有两个关键词，各管一件事。

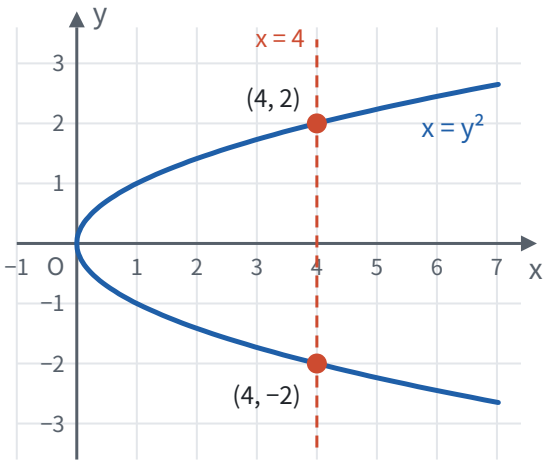
“每一个”： 自变量允许取的每个值，都要有函数值。允许取哪些值，叫自变量的**取值范围**，后面专门讲。

“唯一”： 一个 x 只能对应一个 y。定义函数，就是为了“知道 x，就能说出 y 是多少”；如果一个 x 对应两个 y，就说不出“那个” y 了。

下图左边，x 取 −2、−1、1、2，每个 x 都只射出一支箭头：这是 $y=x^2$，是函数。两个不同的 x 指向同一个 y（−2 和 2 都对应 4）并不违反定义，“唯一”只要求从 x 出发的箭头只有一支。右边是满足 $y^2=x$ 的对应：$x=4$ 时 y 可以是 2，也可以是 −2，一个 x 射出两支箭头，所以 y 不是 x 的函数。



放到坐标系里看：同一个 x 对应的点都在同一条竖直的直线上。“唯一”就是说，**任何一条竖直的直线和函数的图象最多只有一个交点。** 下面是满足 $x=y^2$ 的点组成的图形，竖直的直线 $x=4$ 和它交于 $(4,2)$、$(4,-2)$ 两点，所以它不是 y 关于 x 的函数的图象：



自变量的取值范围

自变量不是想取什么值都行，要受两方面的限制：

限制来自	要求	例子
分式	分母不能为 0	$y=1/(x-2)$ 中 $x\neq 2$
二次根式	被开方数不能是负数	$y=\sqrt{(x+3)}$ 中 $x\geqslant -3$
实际意义	符合实际：长度、时间为正数，件数、人数为整数等	买 x 支笔，x 是正整数

整式（如 $y=2x-1$）对 x 没有限制，x 可以取任意实数。几种限制同时出现时，要**同时满足**，取它们的公共部分。

例 1 求下面函数中自变量 x 的取值范围：

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

思路： 式子里有两处会“出问题”：根号里不能是负数，分母不能是 0。两个要求同时满足。

解： 由 $x+2 \geqslant 0$，得 $x \geqslant -2$；由 $x-1 \neq 0$，得 $x \neq 1$。所以 $x \geqslant -2$ 且 $x \neq 1$。

例 2 等腰三角形的周长是 20 cm，腰长为 x cm，底边长为 y cm。写出 y 关于 x 的函数解析式，并求自变量的取值范围。

思路： 解析式由周长直接得到。取值范围不能只看式子 $y=20-2x$（式子对 x 没有限制），要看实际意义：边长是正数，三条边还要能围成三角形。

解： 由 $2x+y=20$，得 $y=20-2x$。

1. 底边长为正数：$20-2x>0$，得 $x<10$。
2. 两腰之和大于底边（三角形两边之和大于第三边，见第五部分“三角形”（第 128 页））：$2x>20-2x$，得 $x>5$。
3. 腰长 x 是正数，已包含在 $x>5$ 中。

所以 $y=20-2x$，自变量的取值范围是 $5<x<10$。

检验： 取 $x=6$，底边 $y=8$，三边 6、6、8 能围成三角形；取 $x=4$，底边 $y=12$，$4+4<12$，围不成。

三种表示法

同一个函数可以用三种方式写出来。比如每支笔 3 元，买 x 支笔花 y 元：

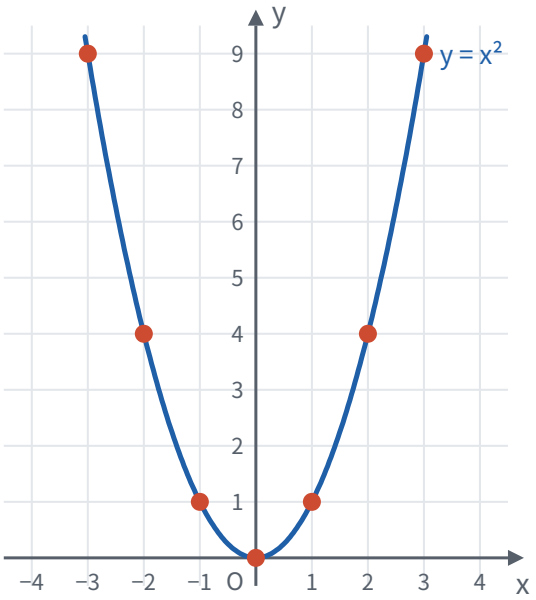
表示法	这个例子	好处	局限
列表法	列出 $x=1,2,3,4,5$ 时 $y=3,6,9,12,15$	不用计算，直接查到函数值	只能列出一部分，看不出整体规律
解析式法	$y=3x$（x 为正整数）	准确、完整，便于计算和推理	不直观；有些关系写不出式子
图象法	在坐标系中描出点 $(1,3)$、$(2,6)$、……	直观，一眼看出变化趋势	读出的数值往往不精确

这三种表示法说的是同一个对应关系，学函数就是在三者之间来回翻译：由式子列表、画图，由图读出性质，再回到式子说明为什么（见第一部分“三种数学语言”（第 12 页））。

注意这个例子的图象：x 只能取正整数，所以图象是一个个孤立的点，不能连成直线。**图象是什么样子，要看自变量的取值范围。**

画函数图象的方法叫描点法， 分三步：列表（取一些自变量的值，算出函数值）、描点（以每一对值为坐标，在坐标系中描出点）、连线（按自变量从小到大，用平滑的曲线连起来）。比如画 $y=x^2$：

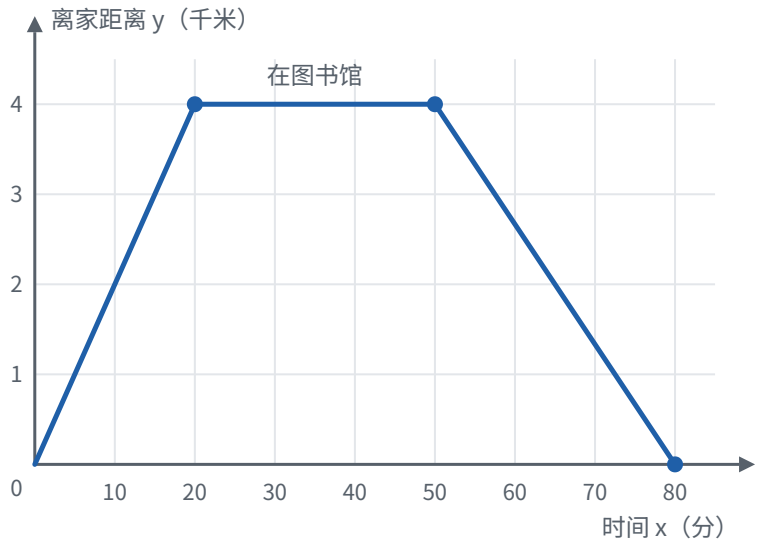
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



函数的图象，就是**所有满足解析式的点** (x, y) 组成的图形：图象上每个点的坐标都满足解析式，满足解析式的点都在图象上。这句话是后面判断“点在不在图象上”和求交点的依据。

读图：从图象中读出信息

例 3 小明骑车从家出发去图书馆，在图书馆看了一会儿书，再骑车回家。下图是他离家的距离 y（千米）和出发后的时间 x（分）的关系。



（1）图书馆离家多远？小明在图书馆待了多久？

（2）去图书馆和回家的速度分别是多少？

（3）出发后多长时间，小明离家 2 千米？

思路： 横轴是时间，纵轴是离家的距离。图象上升，说明离家越来越远；水平，说明距离不变，人没有动；下降，说明在往回走。每一段的速度就是“距离的变化 ÷ 时间的变化”。

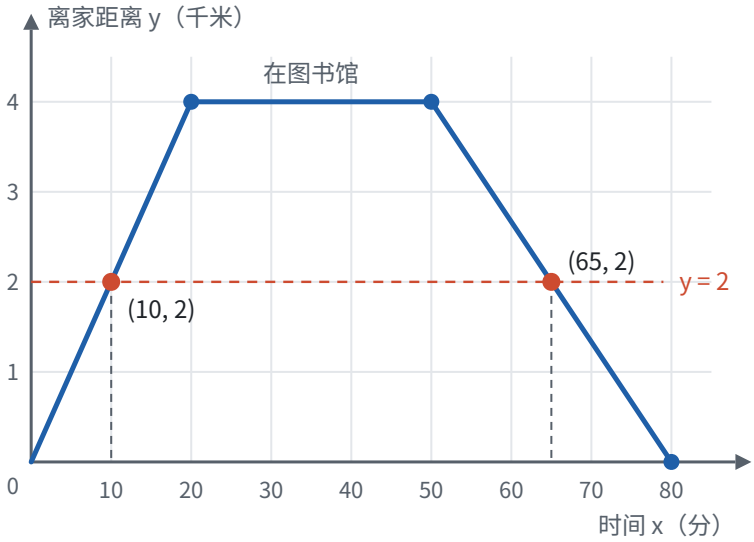
解： （1）x 从 20 到 50，y 一直是 4，所以图书馆离家 4 千米，小明在图书馆待了 $50 - 20 = 30$ 分钟。

（2）去：20 分钟走 4 千米，每分钟 0.2 千米，即 12 千米/时。回：从 $x = 50$ 到 $x = 80$，30 分钟走 4 千米，即

8 千米/时。

（3）去的路上，每分钟走 0.2 千米，走 2 千米用 $2 \div 0.2 = 10$ 分钟；回的路上，要走 $4 - 2 = 2$ 千米，每分钟走 $4/30 = 2/15$ 千米，用 $2 \div 2/15 = 15$ 分钟，所以 $x = 50 + 15 = 65$。答：出发后 10 分钟和 65 分钟时，小明离家 2 千米。

回顾： 第（3）问有两个答案，图上一条水平的直线 $y = 2$ 和图象交于两点：



所以在这个过程中，y 是 x 的函数（每个时刻只有一个距离），x 却不是 y 的函数（同一个距离对应两个时刻，$y = 4$ 时更是对应无数个时刻）。谁是谁的函数，要回到定义里的“唯一”去判断。

易错点

- **把“唯一”理解成“一一对应”。** $y = x^2$ 中，$x = 2$ 和 $x = -2$ 对应同一个 $y = 4$，y 仍然是 x 的函数。定义只要求一个 x 对应一个 y，不要求一个 y 只对应一个 x。
- **求取值范围只考虑一种限制。** 式子里既有分母又有根号时，两个条件都要写，并且用“且”连起来；实际问题还要再看实际意义，比如例 2（周长 20 cm 的等腰三角形，腰长 x cm，底边长 $y = 20 - 2x$ cm）里还要用三角形三边的关系，才得到 $5 < x < 10$。
- **忽视二次根式在分母上的情况。** $y = 1/(\sqrt{}(x - 1))$ 中，根号在分母上，被开方数既不能是负数，也不能是 0，所以 $x > 1$，不是 $x \geqslant 1$。
- **图象上的点和解析式对不上。** 点在函数图象上，它的坐标就一定满足解析式，可以代入；反过来，坐标不满足解析式的点，一定不在图象上。
- **读图时看错了纵轴的意思。** 例 3（小明骑车去图书馆，看了一会儿书，再骑车回家）中纵轴是“离家的距离”，不是“走过的路程”。图象下降，是在往家的方向走，走过的路程其实还在增加。

联系

- **代数式：** 代数式的值随字母变化，字母每取一个值，式子只有一个值，这就是函数的雏形。见第三部分“代数式”（第 54 页）。
- **平面直角坐标系：** 有了坐标系，一对对 (x, y) 才能画成点，函数才有了图象。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **三种数学语言：** 解析式、表格、图象是同一个函数的符号语言和图形语言。见第一部分“三种数学语

言”（第 12 页）。

- **一次函数、反比例函数、二次函数：** 初中要学的三种具体的函数，每一种都从解析式出发研究图象和性质。见第七部分“总览：三种函数对照”（第 199 页）。
- **动点与函数：** 图形里的点在动，线段长、面积跟着变，就产生了函数。见第十一部分“动点与函数”（第 323 页）。

真题： 2025 年第 10 题（第 371 页）、2024 年第 10 题（第 384 页）、2022 年第 10 题（第 411 页）。

一次函数 ★

> 对应人教版八年级下册第二十三章。

一次函数描述“均匀变化”：自变量 x 每增加 1，函数值 y 总是变化同一个数 k。 写成式子是 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq 0$），它的图象是一条直线。

从哪里来

先看几个生活中的例子：

情境	起点	每一步的变化	函数关系
手机套餐：月租 20 元，每通话 1 分钟加 0.1 元	不打电话也要付 20 元	每多 1 分钟，多 0.1 元	$y=0.1x+20$
一根 20 cm 长的蜡烛，每分钟烧掉 0.5 cm	开始时长 20 cm	每过 1 分钟，短 0.5 cm	$y=-0.5x+20$
匀速行驶的汽车，速度 60 km/h，从出发点开始计算路程	开始时路程为 0	每过 1 小时，多走 60 km	$y=60x$

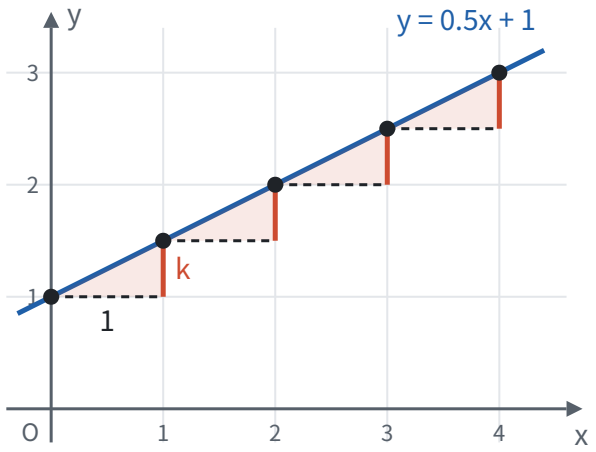
三个例子的共同点是：**有一个起点，然后每一步变化的量都一样。** 起点就是 b（$x=0$ 时 y 的值），每一步的变化量就是 k。这种关系就叫一次函数：

- **$y=kx+b$（$k\neq 0$）** 叫一次函数。x 的次数是 1，所以叫“一次”。
- $b=0$ 时，$y=kx$ 叫**正比例函数**，它是一次函数的特殊情况：起点是 0，y 和 x 成正比。

为什么要求 $k\neq 0$？$k=0$ 时 $y=b$，不管 x 怎么变，y 都不变，已经没有“变化”可言，也就不是一次函数了。

为什么图象是一条直线

在 $y=0.5x+1$ 的图象上，取 $x=0,1,2,3,4$ 这几个点。x 每增加 1，y 都增加 0.5。从一个点走到下一个点，都是“向右 1 格、向上 0.5 格”，形成一级一级相同的台阶：



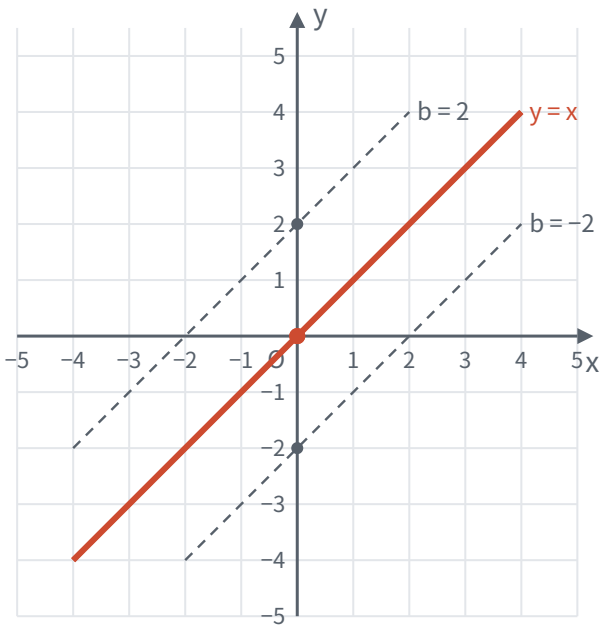
每一级台阶都是一个直角三角形，两条直角边分别是 1 和 k，夹角都是直角。根据“两边及其夹角分别相等的两个三角形全等”，这些小三角形全部全等（见第五部分“全等三角形”（第 136 页）），所以每一段斜边和水平方向的夹角都相等。相邻两段斜边首尾相接、方向又相同，连起来就不会拐弯，是一条直线。

x 不只取整数，取 0.5、0.1 这样更小的步长，道理也一样。所以一次函数的图象是一条直线。

既然是直线，**画图时只要找两个点**，因为两点确定一条直线（见第一部分“基本事实”（第 22 页））。最方便的两个点通常是与 y 轴的交点 $(0, b)$，和再往右走 1 步的点 $(1, k+b)$。

k 和 b 管什么

***b* 管起点。** $x=0$ 时 $y=b$，所以直线和 y 轴交于点 $(0, b)$。b 变了，直线整体上下平移，倾斜程度不变：

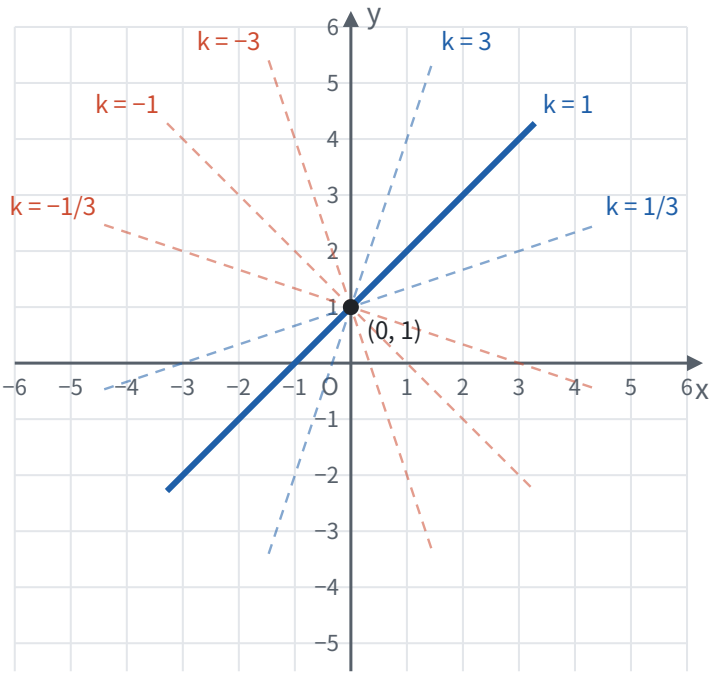


从另一个角度看：$y=kx+b$ 的每个函数值都比 $y=kx$ 多 b，所以它的图象就是把 $y=kx$ 的图象向上平移 b 个单位（b 是负数就向下）。

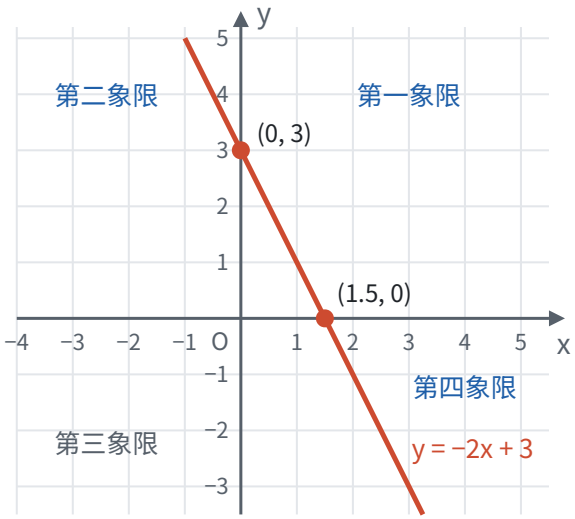
***k* 管方向和陡缓。** x 每增加 1，y 变化 k：

- $k>0$ 时，x 增加，y 也增加，直线从左往右**上升**；

- $k<0$ 时，x 增加，y 反而减少，直线从左往右**下降**；
- $|k|$ 越大，每一步变化得越多，直线越**陡**。



直线经过哪几个象限，不用背表格，看两件事就能推出来：从哪里出发（b 决定直线和 y 轴交在上半轴还是下半轴），往哪个方向走（k 决定上升还是下降）。比如 $y=-2x+3$：从 y 轴上的点 $(0,3)$ 出发，往右走一路下降，先经过第一象限，穿过 x 轴后进入第四象限；往左走一路上升，留在第二象限。所以它经过第一、二、四象限。



待定系数法：两个条件定一条直线

知道了函数是一次函数，只剩 k 和 b 两个数不知道，这时只要**两个条件**就能求出它们：把两个点的坐标代入 $y=kx+b$，得到关于 k、b 的二元一次方程组，解出来就行。这种先设出式子、再求系数的方法叫**待定系数法**。

为什么恰好两个条件？代数上，两个未知数需要两个方程；几何上，两点确定一条直线。这是同一件事的两种

说法。

例 1　一次函数的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(-1, -1)$，求它的解析式。

思路： 是一次函数，所以设 $y = kx + b$，两个点给出两个方程。

解： 设 $y = kx + b$。把两点坐标代入，得

$$\begin{cases} k + b = 3, \\ -k + b = -1. \end{cases}$$

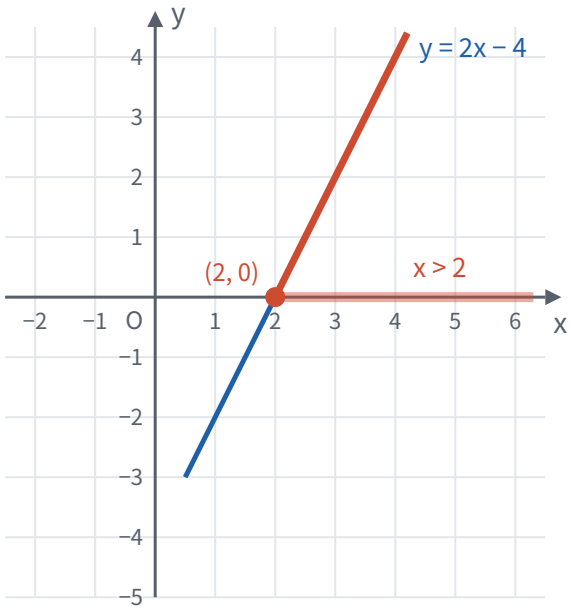
两式相加，得 $2b = 2$，所以 $b = 1$；代入第一个式子，得 $k = 2$。所以解析式是 $y = 2x + 1$。

检验： $x = -1$ 时，$y = 2 \times (-1) + 1 = -1$，和已知点一致。

一次函数与方程、不等式：同一个问题的三种问法

对于 $y = 2x - 4$，下面三个问题其实在问同一条直线：

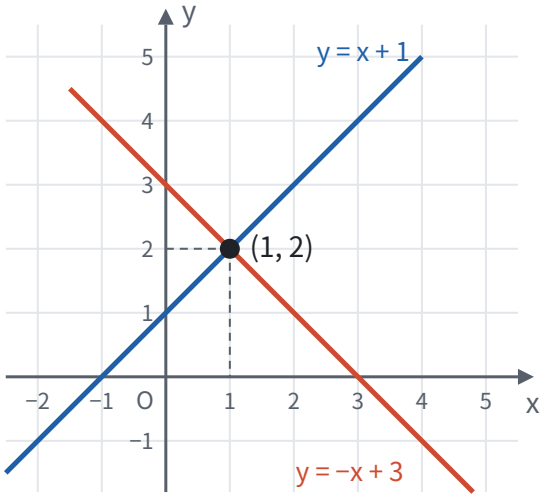
问法	代数的问法	在图象上看
x 取什么值时 $y = 0$?	解方程 $2x - 4 = 0$，得 $x = 2$	直线和 x 轴的交点 $(2, 0)$ 的横坐标
x 取什么值时 $y > 0$?	解不等式 $2x - 4 > 0$，得 $x > 2$	直线在 x 轴上方的部分，对应的 x 的范围
x 取什么值时 $y < 0$?	解不等式 $2x - 4 < 0$，得 $x < 2$	直线在 x 轴下方的部分，对应的 x 的范围



两个一次函数放在一起，就对应二元一次方程组。方程组

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

的解，就是同时满足两个式子的 x、y，也就是**同时在两条直线上的点：两条直线的交点**。



用代入法：$x+1=-x+3$，得 $x=1$，$y=2$。图上两条直线正好交于 $(1,2)$。

反过来也能看出方程组的解有几种情况：两条直线相交，方程组有唯一解；两条直线平行（k 相同、b 不同），方程组无解。

实际问题：用函数做比较

例 2 两种手机套餐：A 套餐月租 30 元，通话每分钟 0.1 元；B 套餐没有月租，通话每分钟 0.25 元。每月通话多长时间时，选 A 套餐更省钱？

思路： 两种套餐的月费都随通话时间变化，先把月费和通话时间的关系写出来。设每月通话 x 分钟，则

- A 套餐的月费：$0.1x+30$（元）；
- B 套餐的月费：$0.25x$（元）。

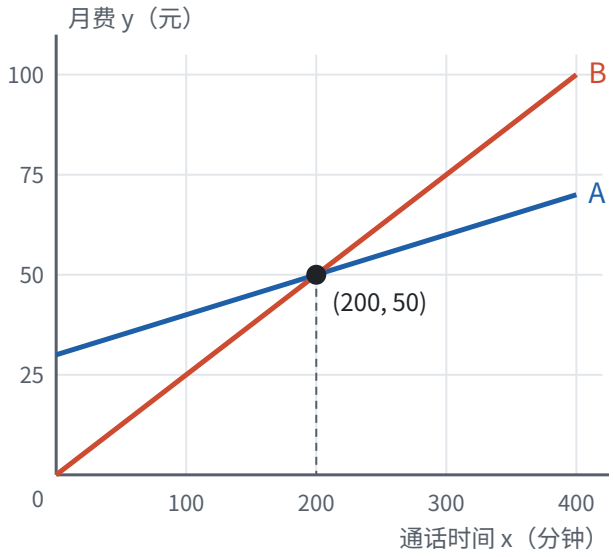
“A 更省钱”就是“A 的月费小于 B 的月费”。接下来可以直接比较两个式子，也可以把它们看成两个函数，画图比较。

解法一：列不等式。

1. A 更省钱，就是 $0.1x+30<0.25x$。
2. 移项，得 $30<0.25x-0.1x$，即 $30<0.15x$。
3. 两边同时除以 0.15，得 $x>200$。
4. 答：每月通话超过 200 分钟时，选 A 套餐更省钱。

解法二：画函数图象。

1. 设月费为 y 元。A 套餐：$y=0.1x+30$；B 套餐：$y=0.25x$。两个都是一次函数。
2. 求两条直线的交点：令 $0.1x+30=0.25x$，得 $x=200$，此时 $y=50$，交点是 $(200,50)$。
3. 在同一坐标系中画出两条直线：



4. 读图：B 的 k 更大，上升得更快。在交点左边，B 的直线更低；在交点右边，A 的直线更低。
5. 答：每月通话超过 200 分钟时，选 A 套餐更省钱；正好 200 分钟时两种一样；少于 200 分钟时选 B 套餐更省钱。

想一想： 两种解法用的是同一个关系，只是看的角度不同。

比较	解法一：列不等式	解法二：画函数图象
核心的一步	解 $0.1x+30<0.25x$	找两条直线的交点，再看哪条线在下面
得到什么	一个答案：$x>200$	整个变化过程：交点左边、交点上、交点右边分别哪种便宜，差距怎样随通话时间变大
好处	步骤少，算得快，结果精确	直观，一眼看出全局，还能回答题目没问的问题（比如 B 在什么时候更省钱、多打 100 分钟两种套餐差多少钱）
局限	只回答了题目问的那一个问题	要准确的数值，还得回到方程去算交点

两种解法其实是一回事：不等式 $0.1x+30<0.25x$ 成立的 x，正是图上 A 的直线在 B 的直线**下方**的那一段对应的 x；不等式变成等式 $0.1x+30=0.25x$ 时的解 $x=200$，正是两条直线**交点**的横坐标。只要一个答案时，列不等式更快；要比较整个过程、或者一时不知道从哪下手时，先画图看清全局，再用方程算出精确值。

易错点

- **忘了 $k\neq 0$。** 问“$y=(m-2)x+3$ 是一次函数，m 满足什么条件”，答案是 $m\neq 2$。一次项系数为 0 时，式子里就没有 x 了。
- **把 b 当成直线和 x 轴的交点。** b 是 $x=0$ 时的 y 值，是直线和 **y 轴**的交点的纵坐标。和 x 轴的交点要令 $y=0$ 去求。
- **读图解不等式时看错了轴。** “$y>0$”看的是图象在 x 轴上方的部分，答案是这部分对应的 **x 的范围**，不是 y 的范围。
- **增减性去看 b。** “y 随 x 的增大而增大”只由 k 决定（$k>0$），和 b 无关。b 只决定直线上下的位置。
- **实际问题忘了自变量的范围。** 通话时间、物品件数不能是负数，件数还必须是整数；开头那根 20 cm 长、每分钟烧掉 0.5 cm 的蜡烛，燃烧的时间不能超过烧完所需的 40 分钟。

联系

- **二元一次方程组：** 方程组的解就是两条直线的交点。见第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）。
- **一元一次方程和不等式：** 解方程 $kx+b=0$ 就是找直线和 x 轴的交点；解不等式 $kx+b>0$ 就是看直线在 x 轴上方的部分。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）和第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **全等三角形：** 图象为什么是直线，靠的是一级一级台阶三角形全等。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **平移：** b 的作用就是把 $y=kx$ 的图象上下平移。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **锐角三角函数：** k 是“竖直方向变化量 ÷ 水平方向变化量”，$k>0$ 时正好是直线与 x 轴正方向夹角的正切，所以 k 越大直线越陡。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。
- **二次函数：** 一次函数每一步的变化量相同；二次函数每一步的变化量本身在均匀地变，所以图象弯成了抛物线。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。

真题： 2026 年第 11 题（第 358 页）、2026 年第 20 题（第 362 页）、2025 年第 20 题（第 376 页）、2024 年第 10 题（第 384 页）、2022 年第 11 题（第 412 页）。

反比例函数 ★

> 对应人教版九年级上册第二十七章。

反比例函数描述“乘积一定”：两个变量 x、y 的乘积总是同一个不为 0 的常数 k，写成 $y=k/x$（$k\neq0$）。 它的图象是分在两个象限里的两支曲线，叫双曲线。

从哪里来

情境	不变的量	两个变量	关系
面积为 12 cm² 的长方形	面积 12	长 x，宽 y	$xy=12$，即 $y=12/x$
从甲地到乙地，路程 120 km	路程 120	速度 v，时间 t	$vt=120$，即 $t=120/v$
一批零件共 600 个，平均分给几个人做	总数 600	人数 n，每人做的个数 m	$nm=600$，即 $m=600/n$

共同点是：**两个量的乘积不变。** 一个量变成原来的 2 倍，另一个量就变成原来的一半，这就是“成反比例”。一般地，形如

$$y=\frac{k}{x}\quad(k\text{ 是常数，}k\neq0)$$

的函数叫**反比例函数**。它也可以写成 $xy=k$ 或 $y=kx^{-1}$。

和正比例函数对照着看：正比例函数 $y=kx$ 是**比值**一定（$y/x=k$），反比例函数是**乘积**一定（$xy=k$）。

定义里的两个限制都有来由：

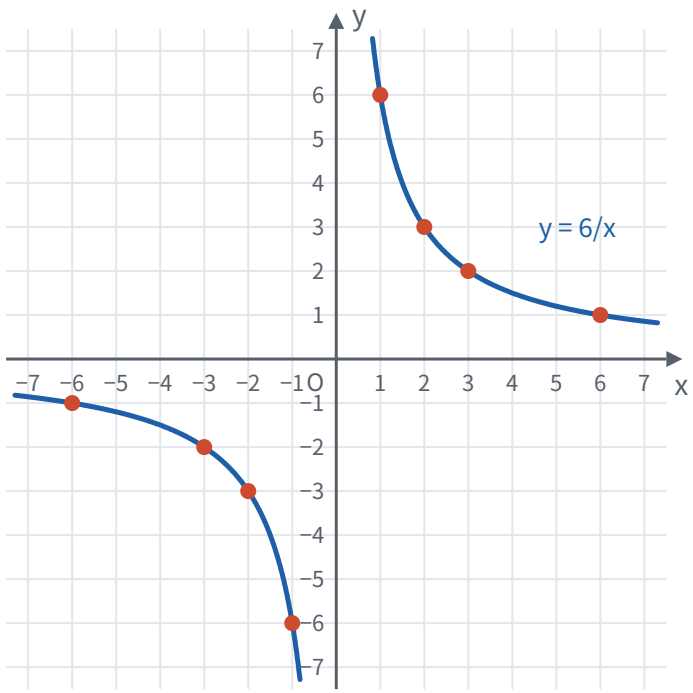
- **$x\neq0$：** x 在分母上，分母不能为 0。
- **$k\neq0$：** $k=0$ 时 y 恒等于 0，不再随 x 变化。

由 $xy = k \neq 0$ 还能看出：y 也永远不会等于 0。

图象：为什么是两支曲线

用描点法画 $y = 6/x$ 的图象：

x	−6	−3	−2	−1	1	2	3	6
y	−1	−2	−3	−6	6	3	2	1



图象的样子，每一点都能从解析式 $xy = 6$ 推出来：

1. **分成两支。** x 不能取 0，所以 y 轴上没有图象上的点，图象在 y 轴两侧断开。
2. **在第一、三象限。** $xy = 6 > 0$，x、y 同号：$x > 0$ 时 $y > 0$，$x < 0$ 时 $y < 0$。
3. **越来越靠近坐标轴，但永远碰不到。** x 越大，$y = 6/x$ 越接近 0，曲线越贴近 x 轴，但 y 不会等于 0；x 越接近 0，y 越大，曲线越贴近 y 轴，但 x 不会等于 0。

k 管什么

***k* 的正负管位置和增减。** $k > 0$ 时 x、y 同号，图象在第一、三象限；$k < 0$ 时 x、y 异号，图象在第二、四象限。

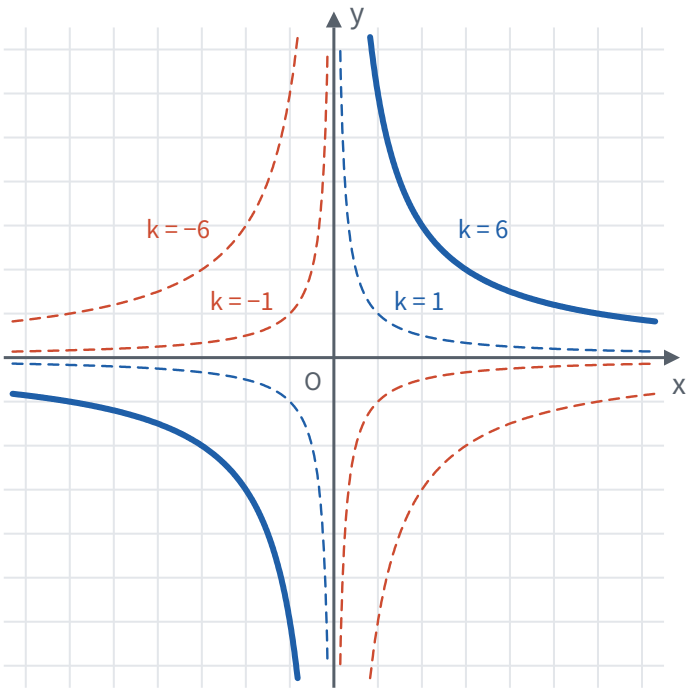
增减性用作差来说明。设 $k > 0$，在第一象限的那一支上取两点，$0 < x_1 < x_2$，则

$$y_1 - y_2 = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}.$$

$k > 0$，$x_2 - x_1 > 0$，$x_1 x_2 > 0$，所以 $y_1 - y_2 > 0$，即 $y_1 > y_2$：x 增大，y 减小。$x_1 < x_2 < 0$ 时，$x_1 x_2$ 仍然大于 0，结论一样。$k < 0$ 时，差的符号反过来，y 随 x 的增大而增大。

注意推导里用到了 $x_1 x_2 > 0$，也就是 **x_1、x_2 同号，两点在同一支上。** 两点分别在两支上时，结论不成立：$y = 6/x$ 中，$x = -1$ 时 $y = -6$，$x = 1$ 时 $y = 6$，x 增大，y 反而增大了。所以增减性一定要说“**在每一个象限内**”。

$|k|$ 管远近。 $|k|$ 越大，同一个 x 对应的 $|y|$ 越大，曲线离原点越远。

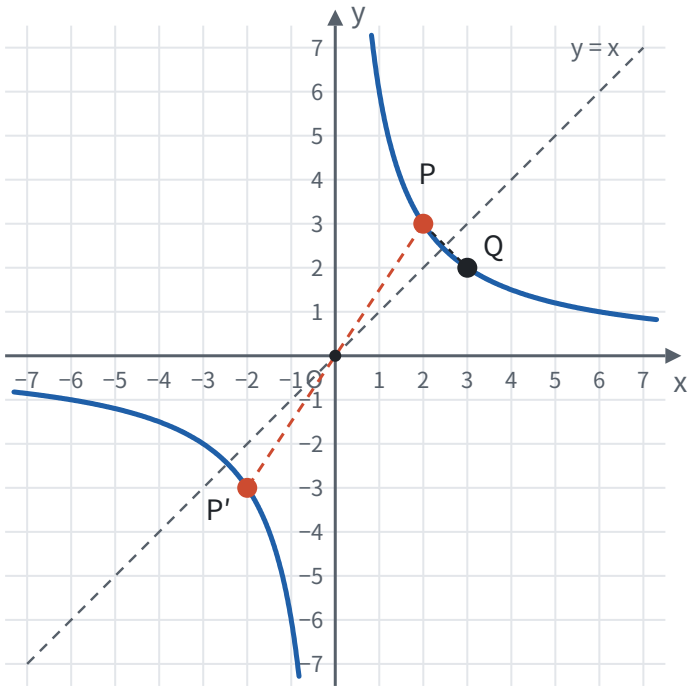


	$k>0$	$k<0$
图象所在象限	第一、三象限	第二、四象限
增减性	在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小	在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大

对称性

在 $y=6/x$ 的图象上取点 $P(2,3)$。

- 点 $P'(-2,-3)$ 也满足 $xy=6$，也在图象上。一般地，(a,b) 在图象上，则 $(-a)(-b)=ab=k$，所以 $(-a,-b)$ 也在图象上。(a,b) 和 $(-a,-b)$ 关于原点对称，所以**双曲线是中心对称图形，对称中心是原点。**
- 点 $Q(3,2)$ 也在图象上。一般地，(a,b) 在图象上，则 $ba=k$，(b,a) 也在图象上。(a,b) 和 (b,a) 关于直线 $y=x$ 对称，所以**双曲线也是轴对称图形**，直线 $y=x$ 是它的一条对称轴（同理，$(-b,-a)$ 也在图象上，直线 $y=-x$ 是另一条）。



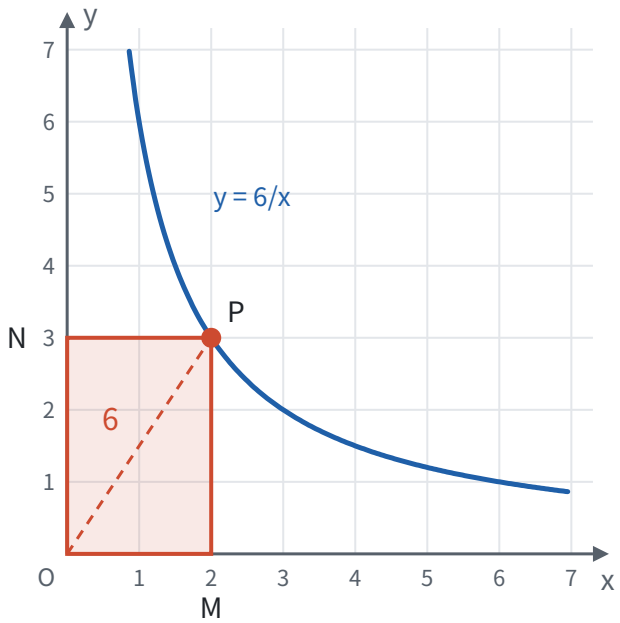
过原点的直线也关于原点中心对称，所以双曲线和一条过原点的直线相交时，一个交点关于原点的对称点也同时在两个图象上，两个交点关于原点对称。

k 的几何意义：面积不变

“乘积一定”在图上是什么样子？在 $y=6/x$ 的图象上任取一点 $P(x,y)$，作 $PM\perp x$ 轴于点 M，$PN\perp y$ 轴于点 N，得到长方形 $OMPN$。它的两条边长是 $|x|$ 和 $|y|$，所以

$$S_{长方形OMPN}=|x|\cdot|y|=|xy|=|k|=6.$$

点 P 在曲线上怎么动，长方形的形状都在变，面积却始终是 6：



连接 OP，它把长方形分成两个全等的直角三角形，所以 $S_{\triangle OPM}=|k|/2$。

反过来，已知这样的长方形或三角形的面积，就能求出 $|k|$，再由图象所在的象限定出 k 的正负。

待定系数法：一个条件就够了

反比例函数 $y=k/x$ 只有一个待定的系数 k，所以**一个条件**就能确定它。

例 1 反比例函数的图象经过点 $(2,-3)$。求它的解析式，并判断点 $(-1,6)$、$(3,2)$ 是否在这个函数的图象上。

思路： 设 $y=k/x$，用 $k=xy$ 求 k 最快。判断点在不在图象上，就看它的坐标满不满足解析式，也就是横、纵坐标的乘积是不是 k。

解： 设 $y=k/x$。把 $(2,-3)$ 代入，得 $k=2\times(-3)=-6$，所以解析式是 $y=-6/x$。

$(-1)\times 6=-6$，所以点 $(-1,6)$ 在图象上；$3\times 2=6\neq -6$，所以点 $(3,2)$ 不在图象上。

比较函数值的大小

例 2 点 $A(-2,y_1)$、$B(-1,y_2)$、$C(3,y_3)$ 都在 $y=6/x$ 的图象上，比较 y_1、y_2、y_3 的大小。

思路： 解析式和横坐标都知道，直接算出三个函数值最稳妥。

解： $y_1=6/(-2)=-3$，$y_2=6/(-1)=-6$，$y_3=6/3=2$，所以 $y_3>y_1>y_2$。

想一想： 如果把函数换成 $y=(m^2+1)/x$，m 不知道，就算不出具体的值了，这时要用性质：

1. $k=m^2+1>0$，图象在第一、三象限，在每一个象限内 y 随 x 的增大而减小。
2. A、B 的横坐标都是负数，在第三象限的同一支上；$-2<-1$，所以 $y_1>y_2$。
3. C 在第一象限，$y_3>0$；而 y_1、y_2 都小于 0。

所以仍然是 $y_3>y_1>y_2$。直接计算适合数都已知的情况；用性质比较，要先把点**按所在的象限分组**，同一组里才能用增减性，不同组之间比较正负。

和一次函数的交点

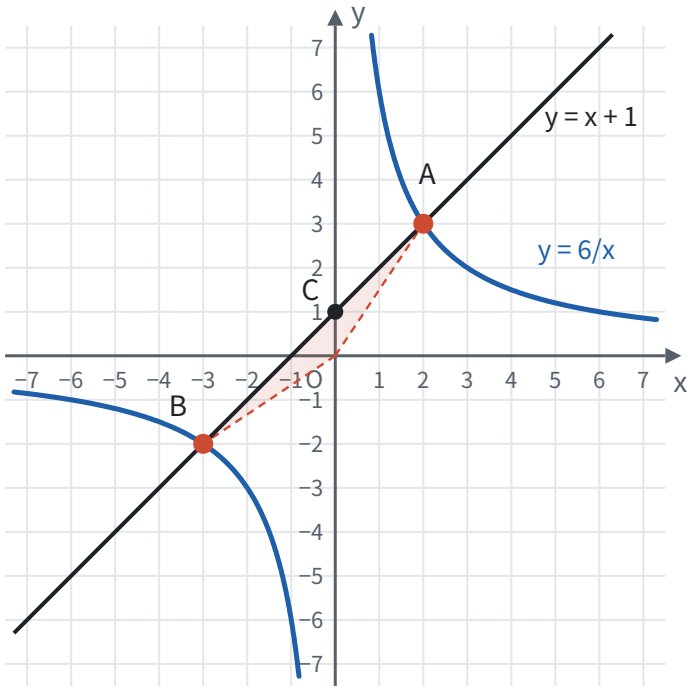
例 3 一次函数 $y=x+1$ 的图象与反比例函数 $y=6/x$ 的图象交于 A、B 两点（点 A 在第一象限），直线 AB 与 y 轴交于点 C。

（1）求 A、B 两点的坐标；

（2）求 $\triangle AOB$ 的面积；

（3）x 取什么值时，一次函数的值大于反比例函数的值？

思路： 交点同时在两个图象上，它的坐标同时满足两个解析式，所以联立成方程组。$\triangle AOB$ 的三条边都不在坐标轴上，但直线 AB 和 y 轴交于 C，OC 把它分成两个三角形，它们以 OC 为公共底，高就是 A、B 到 y 轴的距离。



解：（1）联立

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = \dfrac{6}{x}, \end{cases}$$

得 $x + 1 = 6/x$，两边乘 x，整理得 $x^2 + x - 6 = 0$，即 $(x + 3)(x - 2) = 0$，所以 $x = 2$ 或 $x = -3$。代入 $y = x + 1$，得 $A(2, 3)$，$B(-3, -2)$。

（2）在 $y = x + 1$ 中令 $x = 0$，得 $C(0, 1)$，$OC = 1$。点 A 到 y 轴的距离是 2，点 B 到 y 轴的距离是 3，所以

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{5}{2}.$$

（3）“一次函数的值大于反比例函数的值”，就是直线在双曲线**上方**。看图，以两个交点的横坐标 −3、2 和不能取的 0 为分界：$-3 < x < 0$ 时直线在上方，$x > 2$ 时直线也在上方。所以 $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$。

检验： 取 $x = -1$，$x + 1 = 0$，$6/x = -6$，$0 > -6$，成立；取 $x = 1$，$2 < 6$，不成立，和答案一致。

回顾： $A(2, 3)$ 和 $B(-3, -2)$ 不关于原点对称，因为直线 $y = x + 1$ 不过原点。只有过原点的直线和双曲线的两个交点，才关于原点对称。

实际问题

例 4　某蓄电池的电压一定，用它给一个可变电阻 R（Ω）供电，电流 I（A）与 R 成反比例。当 $R = 9$ 时，$I = 4$。

（1）写出 I 关于 R 的函数解析式；

（2）如果电路中的电流不能超过 12 A，可变电阻 R 应控制在什么范围？

思路： 电压一定，就是 I 与 R 的乘积一定。求范围时，先找 I 正好等于 12 时的 R，再看 R 往哪边变电流会变小。

解：（1）设 $I = k/R$，由 $k = 9 \times 4 = 36$，得 $I = 36/R$（$R > 0$）。

（2）$I=12$ 时，$R=36/12=3$。$k=36>0$，$R>0$，在第一象限内 I 随 R 的增大而减小，所以要 $I\leqslant 12$，需要 $R\geqslant 3$。答：可变电阻应不小于 3 Ω。

易错点

- **增减性漏了“在每一个象限内”。** 反比例函数在整个定义范围上并不单调：$y=6/x$ 中，$x=-1$ 时 $y=-6$，$x=1$ 时 $y=6$，x 增大，y 反而增大了。比较函数值时，先看点在不在同一支上。
- **几何意义忘了绝对值，或者把三角形当成长方形。** 长方形 $OMPN$ 的面积是 $|k|$，$\triangle OPM$ 的面积是 $|k|/2$。由面积求 k 时，还要根据图象所在象限确定符号。
- **把不是反比例函数的式子当成反比例函数。** $y=2/(x+1)$、$y=1/(x^2)$ 都不是反比例函数：前者的分母不是 x，后者 xy 不是常数。判断时看能不能化成 $xy=k$（$k\neq 0$）。
- **以为图象和坐标轴有交点。** $x\neq 0$、$y\neq 0$，双曲线只会无限靠近坐标轴，不会相交。
- **解不等式时漏了 $x=0$ 这个分界。** 例 3 第（3）问求 $y=x+1$ 的值大于 $y=6/x$ 的值时 x 的范围，两个交点的横坐标是 −3 和 2，答案是 $-3<x<0$ 或 $x>2$。x 从负数变到正数时，要经过双曲线断开的地方，所以答案分成两段。

联系

- **分式：** $y=k/x$ 是分式，$x\neq 0$ 就是分式有意义的条件；面积一定的长方形，一边变长另一边就变短。见第三部分“分式”（第 74 页）。
- **分式方程：** 路程一定时时间和速度成反比，工作量一定时时间和效率成反比，列出的分式方程里藏着反比例关系。见第四部分“分式方程”（第 100 页）。
- **一次函数：** 正比例函数是比值一定，反比例函数是乘积一定；两者的交点要联立方程组去求。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **一元二次方程：** 一次函数和反比例函数联立，消元后常得到一元二次方程，它有几个根，两个图象就有几个交点。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **中心对称和轴对称：** 双曲线关于原点中心对称，关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 轴对称。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **以数解形：** 用 k 的几何意义求面积，是用坐标算几何量的典型。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。

真题： 2026 年第 20 题（第 362 页）、2025 年第 18 题（第 374 页）、2024 年第 18 题（第 388 页）、2023 年第 19 题（第 403 页）、2022 年第 18 题（第 415 页）。

二次函数 ★

> 对应人教版九年级上册第二十六章。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象是抛物线，每一条抛物线都能由 $y=ax^2$ 的图象平移得到。 所以研究二次函数只要看清两件事：a 决定抛物线的形状（开口方向和大小），顶点决定它的位置。

从哪里来

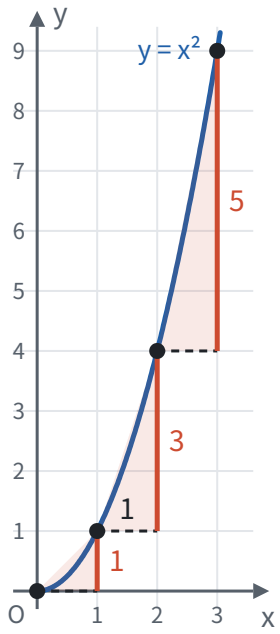
情境	函数关系	展开后
正方形的边长为 x，面积为 y	$y=x^2$	$y=x^2$
用长 20 m 的篱笆围一个矩形，一边长为 x m，面积为 S m²	$S=x(10-x)$	$S=-x^2+10x$
某产品原价 100 元，连续两年每年涨价的百分率都是 x，两年后价格为 y 元	$y=100(1+x)^2$	$y=100x^2+200x+100$

这些关系展开后，x 的最高次数都是 2。一般地，形如

$$y=ax^2+bx+c\quad(a,b,c\text{ 是常数，}a\neq 0)$$

的函数叫**二次函数**。$a\neq 0$ 是为了保证有二次项；$a=0$ 时它就成了一次函数（或常数）。

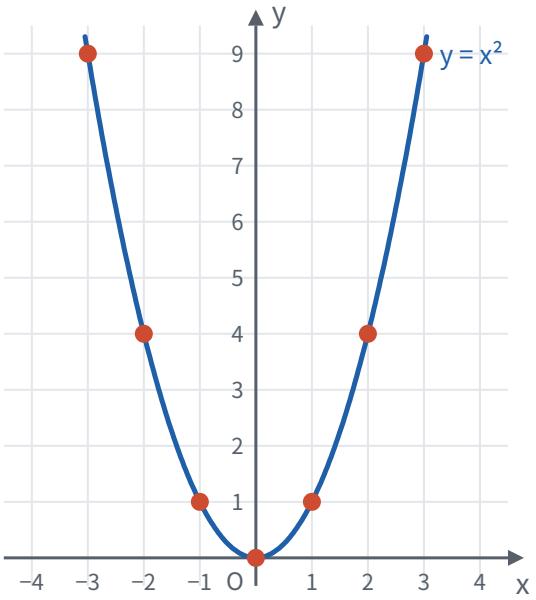
二次函数和一次函数有什么不同？看 $y=x^2$ 在 $x=0,1,2,3$ 时的值：0，1，4，9。x 每增加 1，y 分别增加 1，3，5，**每一步的增加量不再相同，而是每次多 2**。



一次函数的台阶一样高，连起来是直线；二次函数的台阶一级比一级高（一般地，x 每增加 1，y 的增加量每次多 $2a$），连起来就弯成了曲线。

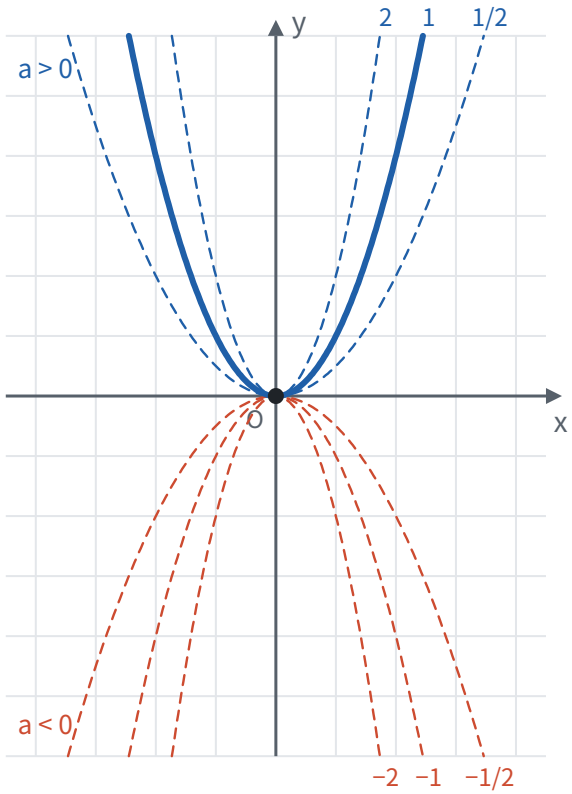
最简单的抛物线：y = ax²

$y=x^2$ 的图象已经用描点法画过（见第七部分“函数”（第 201 页）），就是这张图：



它的性质都能从解析式看出来：

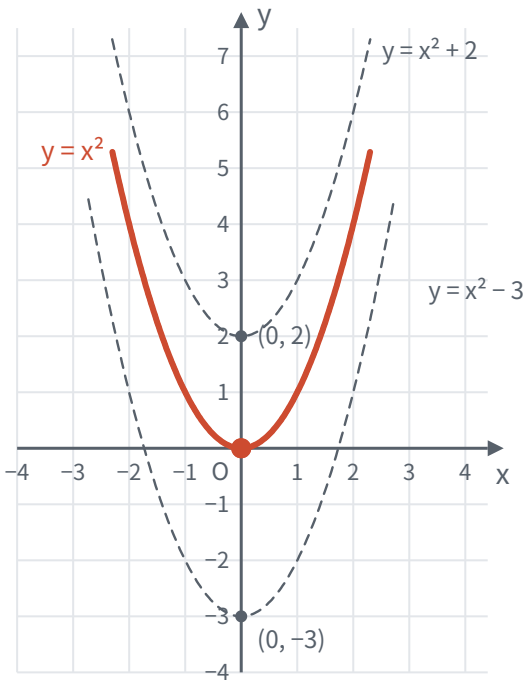
- **关于 y 轴对称。** x 和 $-x$ 的函数值相等：$a(-x)^2 = ax^2$。所以图象上每个点 (x, y) 关于 y 轴的对称点 $(-x, y)$ 也在图象上。
- **顶点是原点。** $a > 0$ 时，$ax^2 \geqslant 0$，只有 $x = 0$ 时 $y = 0$，所以原点是图象的**最低点**，图象开口向上；$a < 0$ 时，$ax^2 \leqslant 0$，原点是**最高点**，开口向下。
- **$|a|$ 越大，开口越小。** 同一个 x，$|a|$ 越大，$|y|$ 越大，曲线升（降）得越快，看上去越“瘦”。



增减性由对称得到。$a > 0$ 时，在 y 轴右侧，$0 \leqslant x_1 < x_2$ 时 $x_1^2 < x_2^2$，所以 y 随 x 的增大而增大；左侧和右侧关于 y 轴对称，变化方向正好相反，y 随 x 的增大而减小。$a < 0$ 时两侧都反过来。

平移：y = a(x − h)² + k

上下平移：*k*。 $y=x^2+k$ 的每个函数值都比 $y=x^2$ 多 k，所以图象是把 $y=x^2$ 向上平移 k 个单位（k 是负数就向下），顶点从 $(0,0)$ 移到 $(0,k)$。这和一次函数中 b 的作用是一回事：$y=2x+b$ 的图象，是把 $y=2x$ 的图象向上平移 b 个单位。

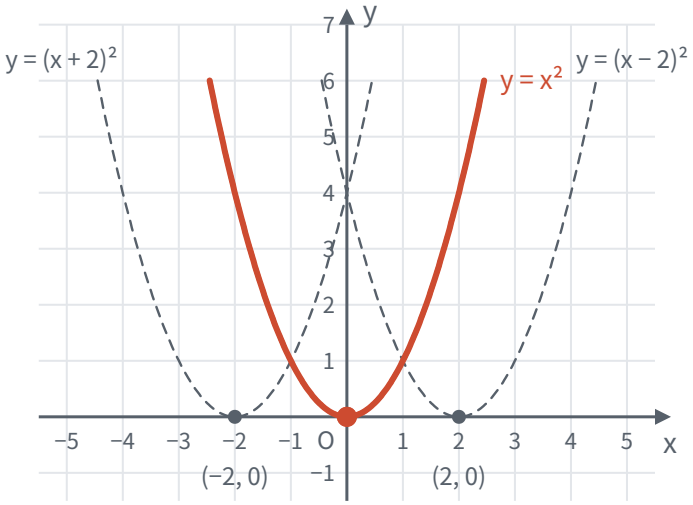


左右平移：*h*。 $y=(x-2)^2$ 的图象在哪里？在 $y=x^2$ 上取一点 (x_0,y_0)，即 $y_0=x_0^2$。把它向右平移 2 个单位，得到点 (x_0+2,y_0)。代入 $y=(x-2)^2$：

$$\big((x_0+2)-2\big)^2=x_0^2=y_0,$$

所以这个点在 $y=(x-2)^2$ 的图象上。$y=x^2$ 上的每个点向右平移 2 个单位，都落在 $y=(x-2)^2$ 上，**图象是向右平移了 2 个单位**。

换个角度理解：$y=x^2$ 在 $x=0$ 时取到最小值，$y=(x-2)^2$ 要等到 $x-2=0$，也就是 $x=2$ 时才取到。同样的函数值，都要“晚 2 个单位”才出现，所以图象整体右移。同理，$y=(x+2)^2=[x-(-2)]^2$ 是向左平移 2 个单位。



两种平移合起来：**$y=a(x-h)^2+k$ 的图象，是把 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位、向上平移 k 个单位**（h、k 是负数就向左、向下）。平移不改变形状，所以 a 不变；原点 $(0,0)$ 移到了 (h,k)。这个式子叫二次函数的**顶点式**。

$y=a(x-h)^2+k$	$a>0$	$a<0$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	直线 $x=h$
顶点	(h,k)，最低点	(h,k)，最高点
增减性	$x<h$ 时 y 随 x 的增大而减小；$x>h$ 时 y 随 x 的增大而增大	$x<h$ 时 y 随 x 的增大而增大；$x>h$ 时 y 随 x 的增大而减小
最值	$x=h$ 时，y 有最小值 k	$x=h$ 时，y 有最大值 k

这张表不用背：画出草图（开口方向 + 顶点），每一行都能从图上读出来。

一般式：配方找顶点

一般式 $y=ax^2+bx+c$ 看不出顶点，要用**配方**把它化成顶点式，和配方法解一元二次方程是同一个变形（见第四部分“一元二次方程”（第 104 页））。

例 1 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的顶点、对称轴和它与坐标轴的交点，并画出草图。

思路： 配方得到顶点和对称轴；与 y 轴的交点令 $x=0$，与 x 轴的交点令 $y=0$。

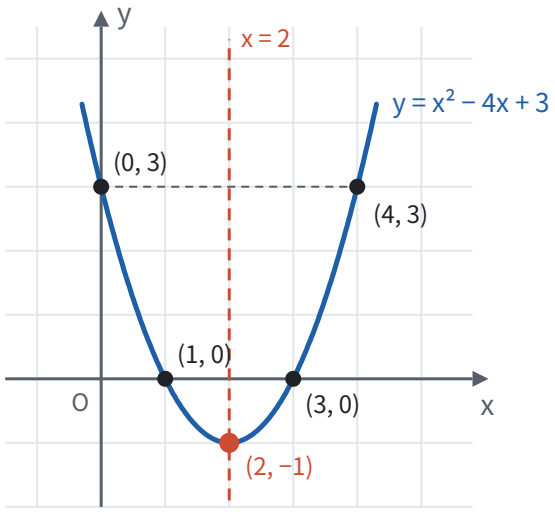
解： 配方：

$$y=x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1.$$

所以顶点是 $(2,-1)$，对称轴是直线 $x=2$，开口向上。

令 $x=0$，得 $y=3$，与 y 轴交于 $(0,3)$。点 $(0,3)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点是 $(4,3)$，也在抛物线上。

令 $y=0$，得 $x^2-4x+3=0$，即 $(x-1)(x-3)=0$，与 x 轴交于 $(1,0)$ 和 $(3,0)$。



回顾： 两个交点 $(1,0)$、$(3,0)$ 的纵坐标相等，所以关于对称轴对称，对称轴正好是 $x=(1+3)/2=2$。**抛物线上纵坐标相等的两点，横坐标的平均数就是对称轴。** 这常常比配方更快。

对一般的 $y=ax^2+bx+c$ 做同样的配方：

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \end{aligned}$$

所以抛物线的对称轴是直线 $x=-b/(2a)$，顶点是

$$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

这个公式是配方的结果，记不住时，重新配一次方就能得到。

a、b、c 在图象上的样子

系数	管什么	为什么
a	开口方向和大小	平移不改变 a，形状和 $y=ax^2$ 一样
c	与 y 轴的交点 $(0,c)$	令 $x=0$，得 $y=c$
b（和 a 一起）	对称轴的位置	对称轴是 $x=-b/(2a)$：a、b 同号时它小于 0，在 y 轴左侧；异号时在右侧；$b=0$ 时就是 y 轴

还有几个常用的式子，也都是“代入一个 x”：$a+b+c$ 是 $x=1$ 时的函数值，$a-b+c$ 是 $x=-1$ 时的函数值。看图时，找到这些点在 x 轴上方还是下方，就知道式子的正负。

待定系数法：三个条件，三种设法

二次函数有 a、b、c 三个待定系数，一般需要**三个条件**。设成哪种形式，看条件给的是什么：

已知条件	设成	待定的系数
图象上的三个点	一般式 $y=ax^2+bx+c$	a、b、c
顶点 (h,k) 和另一个点	顶点式 $y=a(x-h)^2+k$	只剩 a
与 x 轴的两个交点 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 和另一个点	交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$	只剩 a

交点式的来由：$x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时 $y=0$，所以 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，二次式就能分解成 $a(x-x_1)(x-x_2)$（见第三部分“因式分解”（第 69 页））。

例 2 分别根据下列条件求抛物线的解析式：

（1）经过点 $(0,-3)$、$(1,-4)$、$(-1,0)$；

（2）顶点是 $(1,-4)$，且经过点 $(0,-3)$；

（3）与 x 轴交于 $(-1,0)$、$(3,0)$，且经过点 $(0,-3)$。

解： （1）设 $y=ax^2+bx+c$。由过点 $(0,-3)$，得 $c=-3$。再代入另两点：

$$\begin{cases} a+b-3=-4, \\ a-b-3=0, \end{cases}$$

即 $a+b=-1$，$a-b=3$，解得 $a=1$，$b=-2$。所以 $y=x^2-2x-3$。

（2）设 $y=a(x-1)^2-4$。代入 $(0,-3)$，得 $a-4=-3$，$a=1$。所以 $y=(x-1)^2-4$，展开得 $y=x^2-2x-3$。

（3）设 $y=a(x+1)(x-3)$。代入 $(0,-3)$，得 $a\times1\times(-3)=-3$，$a=1$。所以 $y=(x+1)(x-3)$，展开得 $y=x^2-2x-3$。

想一想： 三问得到的是同一条抛物线，只是已知条件的“样子”不同。

比较	一般式	顶点式	交点式
要解的	二元一次方程组（先由 $(0,c)$ 定出 c）	一个一元一次方程	一个一元一次方程
利用了什么	三个普通的点	顶点同时给出了 h、k 两个条件	两个交点给出了两个条件

顶点和与 x 轴的交点是“特殊的点”，一个顶点顶两个条件，所以顶点式、交点式只剩一个系数要求。拿到条件先看有没有特殊的点，再决定怎样设。

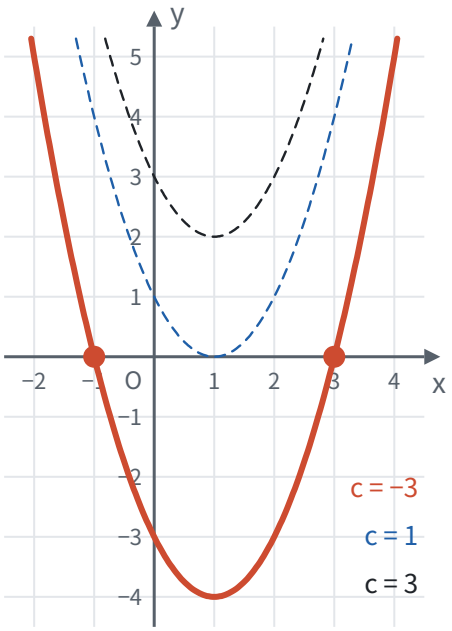
与一元二次方程的关系

令 $y=0$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 就变成一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$。所以**方程的根，就是抛物线与 x 轴交点的横坐标。** 抛物线与 x 轴有几个交点，方程就有几个实数根，由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 决定（见第四部分“一元二次方程”（第 104 页））。

以 $y=x^2-2x+c$ 为例，配方得 $y=(x-1)^2+(c-1)$，c 变化时抛物线上下平移：

c	$\Delta=4-4c$	方程 $x^2-2x+c=0$ 的根	抛物线与 x 轴
−3	16 > 0	$x_1=-1$，$x_2=3$	两个交点
1	0	$x_1=x_2=1$	一个交点（顶点在 x 轴上）

c	$\Delta = 4 - 4c$	方程 $x^2 - 2x + c = 0$ 的根	抛物线与 x 轴
3	$-8 < 0$	没有实数根	没有交点

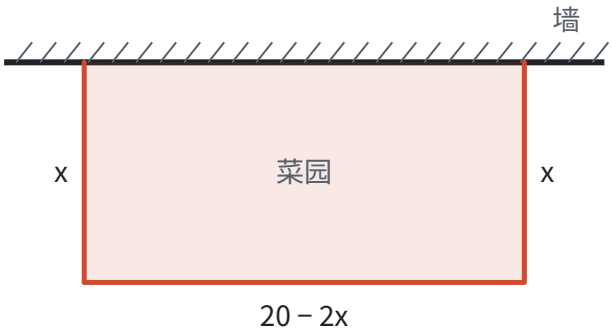


拓展： 同一张图还能读出不等式的解：$x^2 - 2x - 3 < 0$，就是抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 在 x 轴**下方**的部分，对应 $-1 < x < 3$；$x^2 - 2x - 3 > 0$，就是抛物线在 x 轴上方的部分，对应 $x < -1$ 或 $x > 3$。这和一次函数中“看直线在 x 轴上方还是下方”是同一个想法。

最值问题：先看顶点，再看范围

二次函数的最大值或最小值在顶点取到，前提是**顶点的横坐标在自变量的取值范围内**。实际问题一定要先写出取值范围。

例 3　如图，用长 20 m 的篱笆靠墙围一个矩形菜园（靠墙的一边不用篱笆），设垂直于墙的边长为 x m，菜园面积为 S m²。



（1）墙足够长时，x 为多少时菜园面积最大？最大面积是多少？

（2）如果墙长只有 8 m，菜园面积最大是多少？

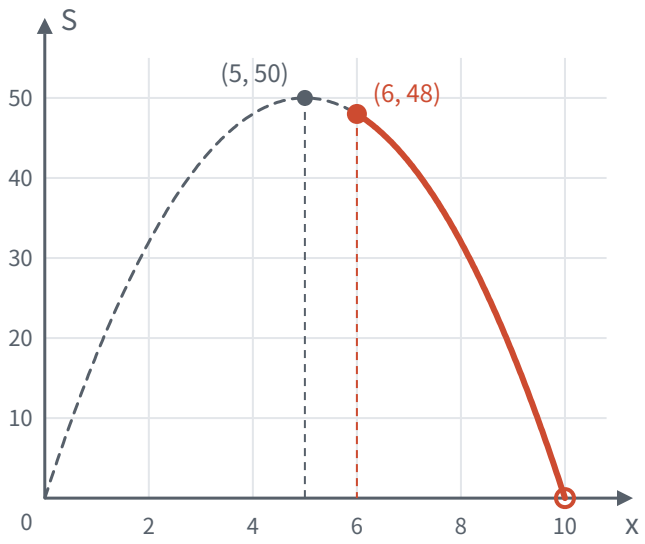
思路： 平行于墙的边长是 $20 - 2x$，面积是两边之积，得到二次函数。配方找顶点，再检查顶点在不在取值范围里。

解： （1）$S = x(20-2x) = -2x^2 + 20x = -2(x-5)^2 + 50$。

边长为正数：$x > 0$ 且 $20 - 2x > 0$，所以 $0 < x < 10$。$a = -2 < 0$，开口向下，顶点横坐标 5 在范围内，所以 $x = 5$ 时 S 最大，最大面积是 50 m²，此时平行于墙的边长 10 m。

（2）平行于墙的边不能超过墙长：$20 - 2x \leqslant 8$，得 $x \geqslant 6$。所以 $6 \leqslant x < 10$。

顶点的横坐标 5 不在这个范围里。范围在对称轴 $x = 5$ 的右侧，开口向下时右侧 S 随 x 的增大而减小，所以 x 取最小的 6 时 S 最大：$S = 6 \times 8 = 48$。答：最大面积是 48 m²。



回顾： 第（2）问如果直接答“最大是 50”，就错了：$x = 5$ 时平行于墙的边长 10 m，墙只有 8 m，围不出来。最值问题的三步是：写出函数和取值范围 → 配方找顶点 → 顶点在范围内就取顶点，不在范围内就看范围端点，由增减性判断。

例 4 某商品进价每件 40 元。售价 50 元时，每天能卖 500 件；售价每涨 1 元，每天少卖 10 件。售价定为多少元时，每天的利润最大？最大利润是多少？

思路： 利润 = 每件的利润 × 销量，两个因式都随涨价的钱数变化。设每件涨价 x 元，把两个因式都用 x 表示。

解： 设每件涨价 x 元，每天利润为 W 元。每件利润 $(50 + x - 40)$ 元，销量 $(500 - 10x)$ 件，所以

$$W = (10 + x)(500 - 10x) = -10x^2 + 400x + 5000 = -10(x - 20)^2 + 9000.$$

涨价的钱数不是负数，$x \geqslant 0$；销量不能是负数，$500 - 10x \geqslant 0$，$x \leqslant 50$。所以 $0 \leqslant x \leqslant 50$。顶点横坐标 20 在范围内，$a = -10 < 0$，所以 $x = 20$ 时 W 最大，为 9000。答：售价定为 70 元时，每天的利润最大，是 9000 元。

检验： 售价 70 元时，每件利润 30 元，销量 $500 - 10 \times 20 = 300$ 件，$30 \times 300 = 9000$。

易错点

- **左右平移的方向弄反。** $y = (x + 2)^2$ 是 $y = x^2$ 向**左**平移 2 个单位，顶点 $(-2, 0)$。依据是“同样的函数值，x 要早 2 个单位取到”，不是看括号里的符号。
- **顶点坐标的符号写错。** $y = -2(x + 1)^2 + 3$ 的顶点是 $(-1, 3)$。先把括号写成 $x - h$ 的样子：$x + 1 = x - (-1)$，所以 $h = -1$。
- **忘了 $a \neq 0$。** “$y = (m - 1)x^2 + 2x$ 是二次函数”要求 $m \neq 1$。题目只说“函数”时，还要讨论 $a = 0$ 的情

况，这时它是一次函数（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。

- **最值不看取值范围。** 顶点不在取值范围内时，最值在范围的端点取到。例 3 第（2）问就是这样：靠 8 m 长的墙围菜园，$S=-2(x-5)^2+50$，$6\leqslant x<10$，顶点横坐标 5 不在范围内，最大面积不是 50 m^2，而是 $x=6$ 时的 48 m^2。
- **增减性不分段。** 二次函数的增减性在对称轴两侧相反，不能笼统地说“y 随 x 的增大而增大”，要说清在对称轴的哪一侧。
- **随便用交点式。** 抛物线与 x 轴没有交点（$\Delta<0$）时，没有交点式可设。

联系

- **一元二次方程：** 方程的根是抛物线与 x 轴交点的横坐标，判别式决定交点个数；配方找顶点和配方法解方程是同一个变形。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **整式的乘法和因式分解：** 顶点式、交点式展开就是一般式，用的是乘法公式；一般式分解因式就得到交点式。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）和第三部分“因式分解”（第 69 页）。
- **轴对称：** 抛物线是轴对称图形，对称点的纵坐标相等，常用来求对称轴。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **平移：** 顶点式就是把 $y=ax^2$ 的图象平移，“右移 h”对应 x 换成 $x-h$，“上移 k”对应函数值加 k。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **一次函数：** 一次函数每一步的变化量不变，二次函数每一步的变化量在均匀地变；直线在 x 轴上方、下方对应一元一次不等式，抛物线也一样。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **动点与函数、方程思想与建模：** 动点问题中的面积、实际问题中的利润，常常是二次函数，最值就是顶点。见第十一部分“动点与函数”（第 323 页）和第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

真题： 2026 年第 22 题（第 365 页）、2025 年第 22 题（第 378 页）、2024 年第 22 题（第 393 页）、2023 年第 9 题（第 398 页）、2023 年第 22 题（第 405 页）。

总览：从全等到相似

这一部分的主线是：全等只管“一模一样”，相似放开了大小、只管形状；形状用“比”来描述，相似三角形的对应边成比例，直角三角形里边的比只由锐角决定，就是锐角三角函数。

全等和相似对照

相似比为 1 的相似就是全等。相似的每一条判定，都是把全等的判定中的“边相等”换成“边成比例”，证明时也正是借用了对应的全等判定（见第八部分“相似”（第 230 页））：

比较	全等三角形	相似三角形
定义	能够完全重合	对应角相等，对应边成比例
三边	三边分别相等（SSS）	三边成比例
两边和夹角	两边和它们的夹角分别相等（SAS）	两边成比例且夹角相等
角	两角和一边分别相等（ASA、AAS）	两角分别相等，不需要边
直角三角形	斜边和一条直角边分别相等（HL）	斜边和一条直角边成比例
不能判定	两边和其中一边的对角（SSA）；三个角（AAA）	两边成比例和其中一边的对角相等
周长、面积	相等	周长比等于相似比 k，面积比等于 k^2
对应的图形变化	平移、轴对称、旋转	位似（放大或缩小），再加上前三种

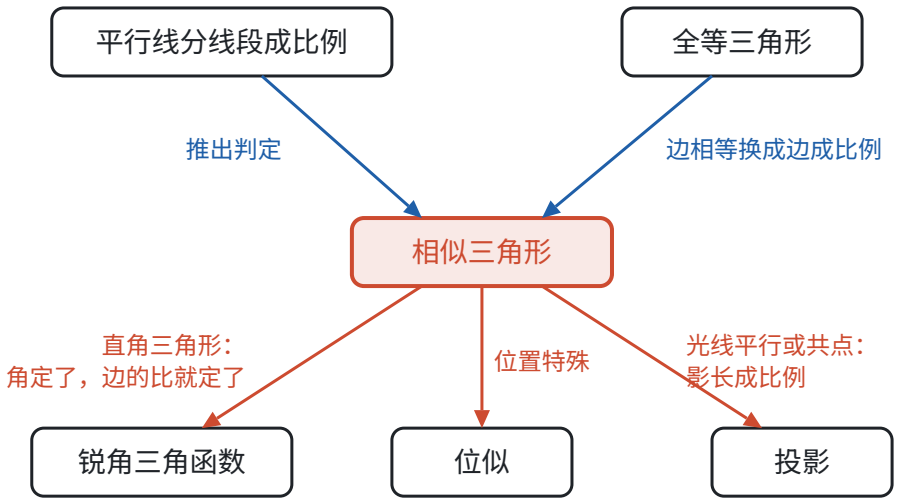
都是“比”

这一部分出现的新量，几乎都是两条线段的比：

比	在哪里出现	由什么决定
比例线段 $a/b = c/d$	平行线分线段成比例	一组平行线
相似比 k	相似三角形的对应边	两个三角形的大小关系
黄金分割数约 0.618	截去一个正方形后，剩下的长方形和原来相似	方程 $x^2 = 1 - x$
$\sin A$、$\cos A$、$\tan A$	直角三角形两条边的比	锐角 A 的大小
坡度 i	铅直高度与水平宽度的比	坡角的正切
物高与影长的比	太阳光下的平行投影	光线的方向
一次函数的 k	竖直方向变化量与水平方向变化量的比	直线的倾斜程度

这些比能够成立，靠的都是相似：同一个角的直角三角形都相似，比值才只由角决定；同一时刻的太阳光平行，物体和影子组成的三角形才都相似。一次函数的 k 放在这里，是因为直线上每一级台阶都是相似的直角三角形，k 就是台阶的正切（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。

各页的关系



- **相似**是这一部分的中心。它从“平行线分线段成比例”这个基本事实出发，借助全等的判定推出相似的判定，再得到相似三角形的性质、位似和测高测距的方法（见第八部分“相似”（第 230 页））。
- **锐角三角函数**把相似用到直角三角形上：锐角确定了，边的比就确定了，于是可以由角求边、由边求角，解决仰角、坡度、方位角的实际问题（见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页））。
- **投影与视图**讲怎样把立体图形变成平面图形。太阳光下的影子、路灯下的影子，计算时都是相似三角形；三视图用正投影表示物体的形状和尺寸（见第八部分“投影与视图”（第 248 页））。

学习顺序

1. **相似：** 先复习第五部分“全等三角形”（第 136 页）和第一部分“基本事实”（第 22 页）中的平行线分线段成比例，再学相似。重点是判定和“面积比等于相似比的平方”。
2. **锐角三角函数：** 学完相似再学，还要用到第五部分“勾股定理”（第 149 页）和第三部分“二次根式”（第 79 页）。重点是解直角三角形和作高、列方程两种想法。
3. **投影与视图：** 平行投影和中心投影的计算用到相似；三视图可以和第五部分“几何图形初步”（第 113 页）中的展开图对照着学。

学完这一部分再学圆，圆中的计算和证明也常常用到相似三角形和锐角三角函数（见第九部分“总览：圆的对称性”（第 257 页））。

相似 ★

> 对应人教版九年级下册“相似”一章。

形状相同、大小不一定相同的图形叫相似图形；相似就是把图形的每一条线段都乘同一个数 k：对应角相等，对应边成比例。

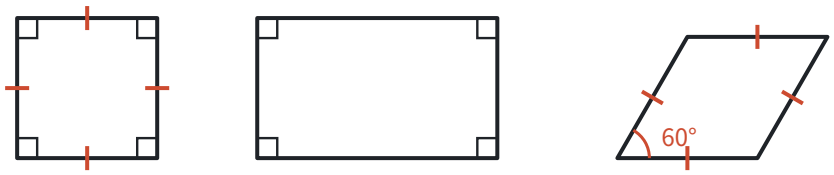
从哪里来

把一张照片等比例放大、按比例尺画地图、用复印机缩印一页纸，得到的图形和原来的“样子一样”，只是大小变了。“样子一样”要说清楚，就要问：变的是什么，不变的是什么？

- 放大到 2 倍，**所有**线段都变成原来的 2 倍，不能有的边放大、有的边不变，否则图形会被拉扁；
- 所有的角都不变，否则图形会变歪。

所以两个多边形相似，是指：**对应角相等，对应边成比例**。各对应边的比 k 叫**相似比**。$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，和全等一样，字母的顺序表示对应关系。

两个条件缺一不可：



正方形　　长方形　　菱形

角都相等，边不成比例　　边成比例，角不相等

正方形和长方形的四个角都是直角，但长方形的长和宽不相等，不能由正方形按同一个比放大得到；正方形和菱形的四条边都相等，边是成比例的，但菱形的角变了。它们都和正方形不相似。

相似比 $k=1$ 时，对应边相等，对应角也相等，就是全等。**全等是相似的特殊情况。**

比例线段

相似离不开“比”。四条线段 a、b、c、d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

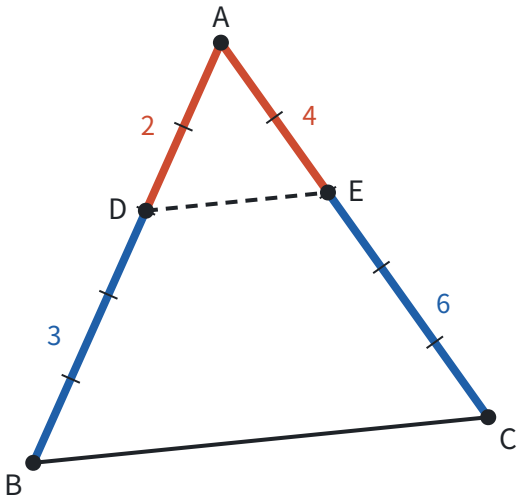
就说这四条线段是**成比例线段**。求线段的比时，两条线段要用同一个长度单位，比值是一个没有单位的数。

比例式本质是一个等式，所以可以用等式的性质变形：

性质	写法	怎样得到
基本性质	$a/b=c/d$ 可以化成 $ad=bc$	两边都乘 bd
比例中项	如果 $a/b=b/c$，那么 $b^2=ac$，b 叫 a、c 的比例中项	基本性质的特殊情况
合比	$a/b=c/d$ 可以化成 $(a+b)/b=(c+d)/d$	两边都加 1

合比要成立，前提是**两个比相等**。它说的是：两个比相等，把每个比的前项和后项加起来作新的前项，得到的两个比仍然相等。道理就是两边都加 1：$a/b+1=c/d+1$，通分就是 $(a+b)/b=(c+d)/d$。

它在相似里的用处，是处理“两条线段按同样的比例切开”的情况。如图，$DE \parallel BC$，$AD=2$，$DB=3$，$AE=4$，$EC=6$：



- **部分比部分相等：** $AD/(DB)=AE/(EC)$，即 $2/3=4/6$。平行线截出来的就是这种关系（见下文“平行线分线段成比例”）。
- **合比，得到整体比部分相等：** 两边都加 1，$(AD+DB)/(DB)=(AE+EC)/(EC)$，即 $AB/(DB)=AC/(EC)$，也就是 $5/3=10/6$。
- **再得到部分比整体相等：** 把上式倒过来，$DB/(AB)=EC/(AC)=3/5$；用 1 减去它，$AD/(AB)=AE/(AC)=2/5$。

用份数看更直观：$AD{:}DB=2{:}3$，就是把 AB 分成 5 份，D 在第 2 份处；$AE{:}EC$ 也是 $2{:}3$，AC 也分成 5 份，E 也在第 2 份处。两条边不一样长（$AB=5$，$AC=10$，每份的长短不同），但切的位置相同，所以 AD 占 AB 的 $2/5$，AE 也占 AC 的 $2/5$。合比做的就是“把份数加成整体”这一步。

为什么要这样换？平行线直接给出的是“部分比部分”，$AD/(DB)=AE/(EC)$；而相似三角形 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$ 的相似比要用“部分比整体”，$AD/(AB)=AE/(AC)=DE/(BC)$，分母是整条边。合比就是这两种写法之间的桥。

黄金分割

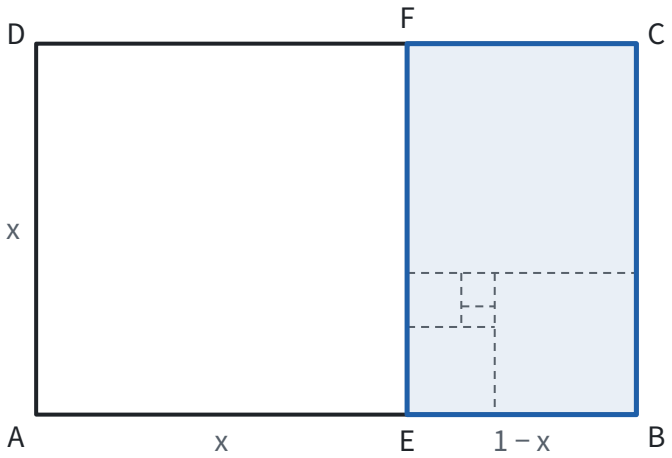
在线段 AB 上取一点 C，如果较长的一段 AC 是全长 AB 和较短的一段 CB 的比例中项，即 $AC^2=AB\cdot CB$，就说点 C 把线段 AB **黄金分割**，点 C 叫线段 AB 的**黄金分割点**。

设 $AB=1$，$AC=x$，则 $CB=1-x$，条件变成 $x^2=1-x$。解这个一元二次方程，取正根：

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

也就是说 $AC\approx 0.618AB$（见第四部分“一元二次方程” （第 104 页））。黄金分割点离哪一端近都可以，所以一条线段有两个黄金分割点。

黄金分割为什么和相似有关？看一个长和宽的比是 $1{:}x$ 的长方形 $ABCD$，从中截去正方形 $AEFD$：



原长方形的宽与长之比是 $x/1$；剩下的长方形 $EBCF$ 的宽是 $EB=1-x$，长是 $BC=x$，宽与长之比是 $(1-x)/x$。要让剩下的长方形和原来的**相似**，就要

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1},$$

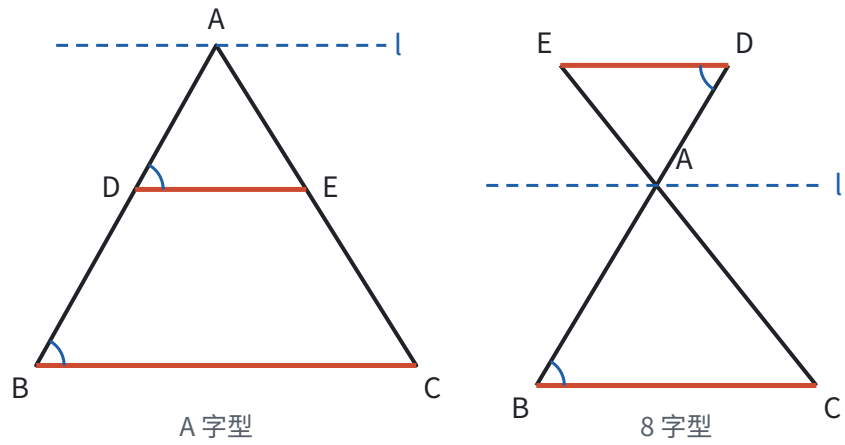
仍然是 $x^2=1-x$。所以宽与长之比为 0.618 的长方形有一个特点：截去一个正方形，剩下的还是和它相似的长方形，可以一直截下去。这样的长方形叫**黄金矩形**。

平行线分线段成比例

相似的判定要从一个基本事实出发（见第一部分“基本事实”（第 22 页））：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。

把它用到三角形里：在 $\triangle ABC$ 中作 $DE\parallel BC$，D、E 分别在直线 AB、AC 上。再过顶点 A 作直线 $l\parallel BC$。这样 l、DE、BC 是三条互相平行的直线，它们截直线 AB、AC，在 AB 上截出 AD、DB，在 AC 上截出 AE、EC，由基本事实，这些对应线段成比例。多作直线 l，是因为 AD、AE 的一端在顶点 A 处，要让它们也成为“被平行线截出的线段”，A 处就得有一条平行线。于是得到推论：**平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例。**



两种图里都有

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

A 字型中还有 $AD/(DB)=AE/(EC)$，两个比例式可以用合比互相转化。D、E 恰好是 AB、AC 的中点时，$AD/$

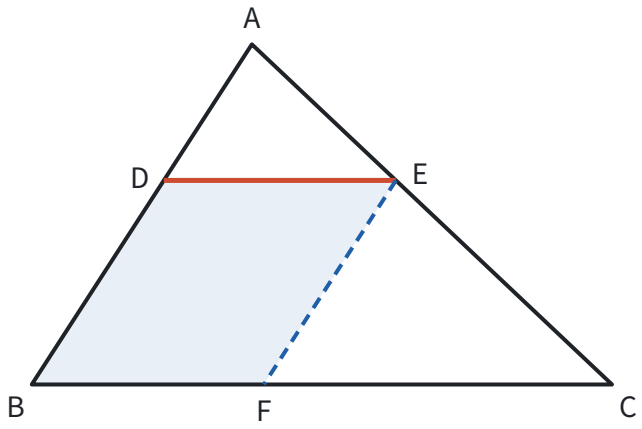
$(AB)=1/2$，这就是三角形的中位线（见第五部分“四边形”（第 157 页））。

相似三角形的判定

起点：平行线截出相似三角形

平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。

以 A 字型为例，$DE\parallel BC$，要证 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，按定义要说明三个角分别相等、三条边成比例。

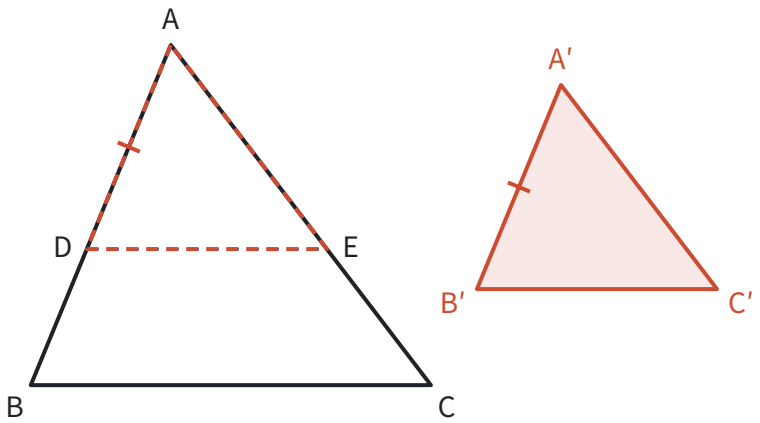


1. **角：** $\angle A$ 是公共角；$DE\parallel BC$，所以 $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$（两直线平行，同位角相等）。
2. **两条边：** 由上一节的推论（平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例），$AD/(AB)=AE/(AC)$。
3. **第三条边：** DE 和 BC 不在同一对截线上，要把 DE “搬”到 BC 上。过 E 作 $EF\parallel AB$ 交 BC 于点 F。四边形 $DBFE$ 两组对边分别平行，是平行四边形，所以 $DE=BF$。对直线 CA、CB 用推论，$BF/(BC)=AE/(AC)$，也就是 $DE/(BC)=AE/(AC)$。

三个角分别相等，三条边的比都等于 $AE/(AC)$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$。

三个判定：截一个全等的小三角形

有了这个起点，判定就好推了。要证 $\triangle A'B'C'$（较小）和 $\triangle ABC$ 相似，办法是：**在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上截取 $AD=A'B'$，作 $DE\parallel BC$ 交 AC 于点 E。** 由上面的结论，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$；只要再证 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 也就和 $\triangle ABC$ 相似了。



判定	已知	为什么 $\triangle ADE \backsim \triangle A'B'C'$
两角分别相等	$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$	$\angle ADE=\angle B=\angle B'$，又 $AD=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，用 ASA
两边成比例且夹角相等	$A'B'/(AB)=A'C'/(AC)$，$\angle A=\angle A'$	$AE/(AC)=AD/(AB)=A'B'/(AB)=A'C'/(AC)$，所以 $AE=A'C'$，用 SAS
三边成比例	$A'B'/(AB)=B'C'/(BC)=C'A'/(CA)$	同理得 $AE=A'C'$，$DE=B'C'$，用 SSS

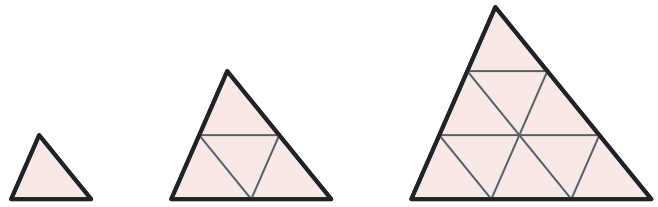
每一条相似的判定，都是一条全等的判定把“边相等”换成“边成比例”，证明时也正是借用了对应的全等判定。直角三角形还有一条：**斜边和一条直角边成比例的两个直角三角形相似**，因为由勾股定理，第三边也成同样的比，就变成了三边成比例（对应全等里的 HL）。

和全等一样，“两边成比例且其中一边的对角相等”不能判定相似。而“三个角分别相等”在全等里不行，在相似里只要两个角就够了：相似本来就不管大小。

相似三角形的性质

相似三角形的对应角相等，对应边成比例，这是定义。由此还能推出更多的“对应量”之比：

- **对应高、对应中线、对应角平分线的比都等于相似比。** 比如 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$ 是对应的高，那么 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中 $\angle B=\angle B'$，$\angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ$，两角分别相等，所以相似，$AD/(A'D')=AB/(A'B')=k$。中线、角平分线也一样，找出含它们的那一对三角形：若 AD、$A'D'$ 是对应中线，则 $BD/(B'D')=BC/(B'C')=k$，又 $AB/(A'B')=k$，$\angle B=\angle B'$，两边成比例且夹角相等；若是对应角平分线，则 $\angle BAD=\angle B'A'D'$（相等的角的一半），又 $\angle B=\angle B'$，两角分别相等。
- **周长的比等于相似比。** 三条边都乘 k，和也乘 k。
- **面积的比等于相似比的平方。** 三角形面积是 $1/2\times$ 底 $\times$ 高，底乘 k，高也乘 k，面积就乘 k^2。



相似比 1
面积 1 份

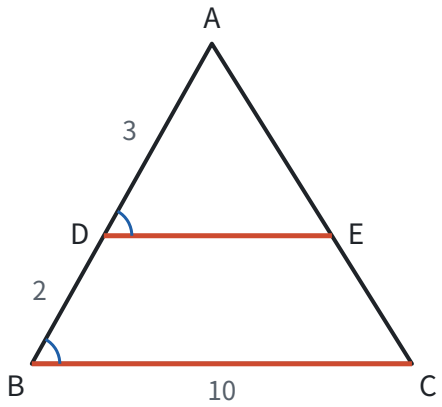
相似比 2
面积 4 份

相似比 3
面积 9 份

长度是“一维”的量，乘 k；面积是“二维”的量，乘 k^2。把一张照片的长和宽都放大到 2 倍，面积是原来的 4 倍，道理相同。

例题

例 1　如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，$AD=3$，$DB=2$，$BC=10$。求 DE 的长，以及 $\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积比。



思路： $DE \parallel BC$ 马上给出 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$。相似比是哪两条边的比？$DE$ 和 BC 是对应边，和它们对应的是 AD 与 AB，不是 AD 与 DB。

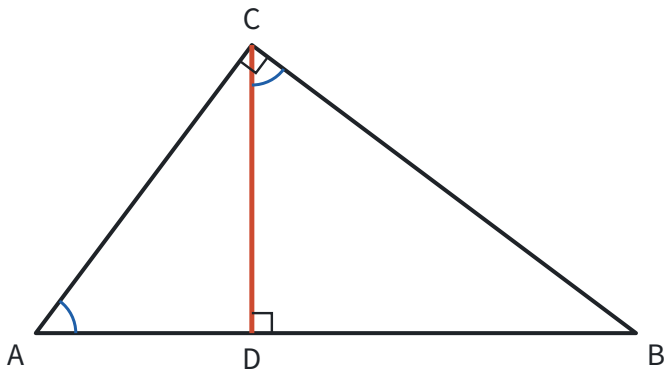
解： 因为 $DE \parallel BC$，所以 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，相似比为

$$\frac{AD}{AB}=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}.$$

所以 $DE/(BC)=3/5$，$DE=10\times 3/5=6$。

面积比等于相似比的平方，$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=9:25$。把 $\triangle ABC$ 的面积看成 25 份，$\triangle ADE$ 占 9 份，四边形 $DBCE$ 占 $25-9=16$ 份，所以 $\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积比是 9:16。

例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D。求证：$AC^2=AD\cdot AB$。若 $AC=15$，$BC=20$，求 AD 和 CD。



思路： 要证的式子是乘积相等，由比例的基本性质，它就是 $AD/(AC)=AC/(AB)$。这三条线段里，AD、AC 在 $\triangle ACD$ 中，AC、AB 在 $\triangle ABC$ 中，所以去证这两个三角形相似。

证明： 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$（公共角），$\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$，所以 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$（两角分别相等），所以 $AD/(AC)=AC/(AB)$，即 $AC^2=AD\cdot AB$。

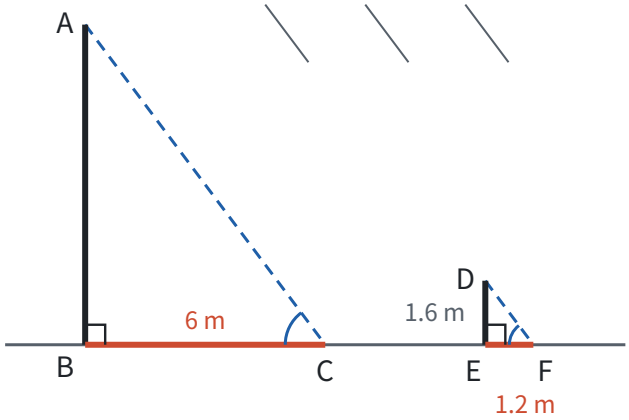
计算： 由勾股定理，$AB=\sqrt{(15^2+20^2)}=\sqrt{625}=25$。所以 $AD=AC^2/(AB)=225/25=9$，$BD=AB-AD=16$。

求 CD 可以有两种想法：

- **再找一对相似三角形。** 同理 $\triangle CBD \backsim \triangle ABC$，所以 $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$，得 $CD^2=AD\cdot BD=9\times 16=144$，$CD=12$。
- **把面积算两遍。** $\triangle ABC$ 的面积既等于 $(1/2)AC\cdot BC$，又等于 $(1/2)AB\cdot CD$，所以 $CD=(15\times 20)/25=12$。

想一想： 图中三个直角三角形 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle CBD$ 两两相似，因为它们各有一个直角，又两两共用一个锐角（图中蓝色弧标出的 $\angle A = \angle BCD$，都是 $\angle B$ 的余角）。这种“直角三角形斜边上的高”的图形里，任意两个三角形都可以列比例式；只求高时，面积法更快。

例 3　同一时刻，身高 1.6 m 的小明在阳光下的影长是 1.2 m，一棵树的影长是 6 m。这棵树有多高？



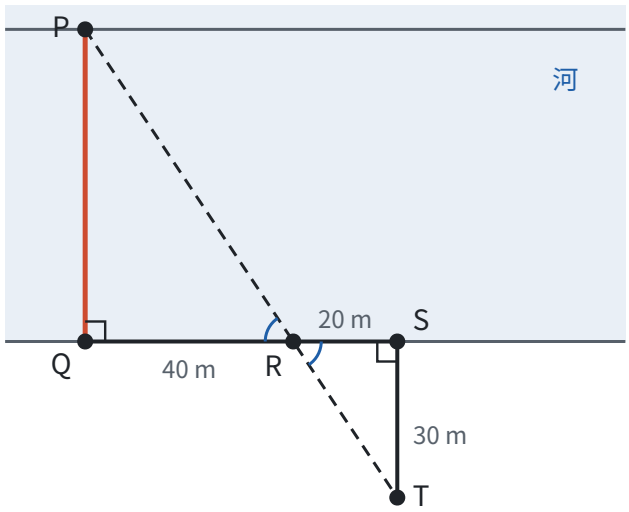
思路： 树高没法直接量，影长能量。太阳离得很远，同一时刻照到地面上的光线可以看成平行的，于是树、影子、光线围成的三角形，和人、影子、光线围成的三角形形状相同。

解： 因为 $AC \parallel DF$，所以 $\angle ACB = \angle DFE$；又 $\angle ABC = \angle DEF = 90°$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}, \quad AB = \frac{1.6 \times 6}{1.2} = 8.$$

答：树高 8 m。

例 4　为了测量河宽，在河对岸选一个目标 P，在这一岸找到点 Q，使 PQ 与河岸垂直。沿河岸从 Q 走 40 m 到 R，在 R 处立一根标杆，再走 20 m 到 S；从 S 沿与河岸垂直的方向往远离河的方向走，直到点 T，使 T、R、P 在同一直线上，量得 $ST = 30$ m。求河宽 PQ。



思路： 河宽过不去，就在岸上造一个“缩小版”的三角形：$\triangle PQR$ 和 $\triangle TSR$ 在 R 处是对顶角，又各有一个直角，是 8 字型的相似三角形。

解： $\angle PRQ = \angle TRS$（对顶角相等），$\angle PQR = \angle TSR = 90°$，所以 $\triangle PQR \backsim \triangle TSR$，

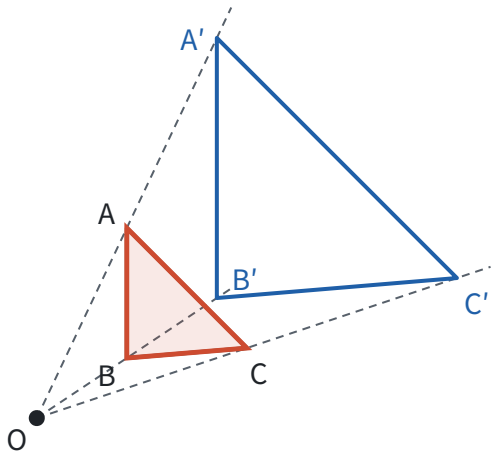
$$\frac{PQ}{TS} = \frac{QR}{SR}, \quad PQ = \frac{30 \times 40}{20} = 60.$$

答：河宽 60 m。

回顾： 测高、测距的共同想法是：**要量的长度够不着，就找一个和它相似、又能量的三角形。** 相似三角形把“形状”搬到了能测量的地方，比例式再把长度换算回来。

位似

把一个图形放大或缩小，最直接的画法是：选一个点 O，把每个点 A 沿射线 OA 推到 A'，使 $OA' = k \cdot OA$。

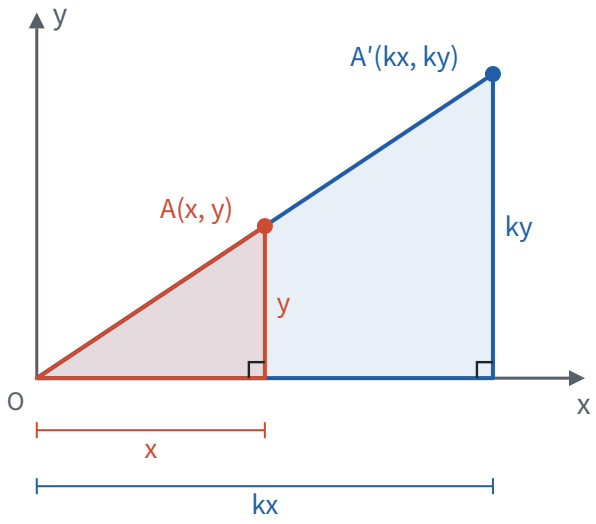


这样得到的两个图形不仅相似，而且**对应点的连线都经过同一点 O，对应边互相平行（或在同一条直线上）**。这样的两个图形叫**位似图形**，点 O 叫**位似中心**，k 叫**位似比**。

为什么 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$？因为 $OA'/(OA) = OB'/(OB) = k$，又 $\angle AOB$ 是公共角，所以 $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$（两边成比例且夹角相等），得 $A'B' = k \cdot AB$，且 $\angle OA'B' = \angle OAB$，$A'B' \parallel AB$。三条边都这样，所以三边成比例。

位似中心也可以在两个图形之间：把每个点 A 推到射线 OA 的反向延长线上，同样使 $OA' = k \cdot OA$，得到的图形在 O 的另一侧，是倒过来的（见下面例 5 的图）。

坐标系中的位似。 以原点 O 为位似中心，位似比为 k，点 (x, y) 的对应点是 (kx, ky) 或 $(-kx, -ky)$。理由是：从点 $A(x, y)$ 和它的对应点 A' 分别向 x 轴作垂线，得到的两个直角三角形也是位似的，直角边都变成原来的 k 倍，而两条直角边的长正是横坐标和纵坐标的绝对值。

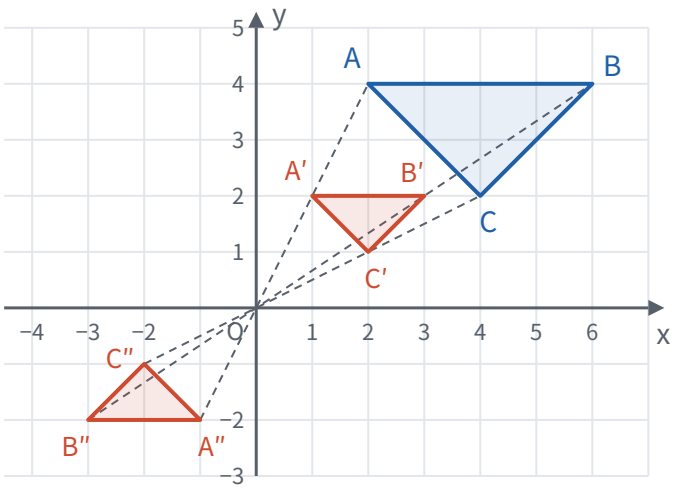


例 5 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(2, 4)$，$B(6, 4)$，$C(4, 2)$。以原点 O 为位似中心，位似比为 $1/2$，把 $\triangle ABC$ 缩小，写出

对应点的坐标。

思路： 位似比为 $1/2$，就是每个点到原点 O 的距离都变成一半；缩小后的图形可以在 O 的同一侧，也可以在另一侧，两种都要写。

解： 把每个点的横、纵坐标都乘 $1/2$，得 $A'(1,2)$，$B'(3,2)$，$C'(2,1)$；都乘 $-1/2$，得 $A''(-1,-2)$，$B''(-3,-2)$，$C''(-2,-1)$。两个三角形都符合要求。



和坐标系中的其他变化放在一起看：

变化	点 (x,y) 变成	形状	大小
平移	$(x+a, y+b)$	不变	不变
关于 x 轴对称	$(x,-y)$	不变	不变
绕原点旋转 $180°$	$(-x,-y)$	不变	不变
以原点为位似中心，位似比为 k	(kx,ky) 或 $(-kx,-ky)$	不变	边长变成 k 倍

平移、轴对称、旋转得到全等的图形，位似得到相似的图形。取 $k=1$ 时的 $(-x,-y)$，正好是绕原点旋转 $180°$。

易错点

- **对应关系没对齐就写比例式。** $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ 的比例式是 $AB/(DE)=BC/(EF)=CA/(FD)$，对应边要从相似式里按字母位置读出来。题目只说“两个三角形相似”而没给出对应关系时，要分情况讨论。
- **把 $AD/(DB)$ 当成相似比。** A 字型中 $DE/(BC)=AD/(AB)$，是“部分比整体”；$AD/(DB)=AE/(EC)$ 只对两条边上的线段成立，不能用来求 DE。
- **面积比用了相似比。** 面积比是相似比的平方；反过来，已知面积比 4:9，相似比是 2:3。
- **把相似比的方向弄反。** $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比是 k，那么 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 $1/k$。
- **位似只画了一侧。** 没有说明在位似中心的哪一侧时，两侧的图形都符合要求，坐标乘 k 和乘 $-k$ 各有一个答案。
- **黄金分割点只找了一个。** 一条线段有两个黄金分割点，分别靠近两个端点。

联系

- **全等三角形：** 全等是相似比为 1 的相似；相似的判定由全等的判定推出，一一对应。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **基本事实：** 相似三角形的全部判定都从“平行线分线段成比例”出发。见第一部分“基本事实”（第 22 页）。
- **四边形：** 三角形的中位线是平行线截三角形时比为 1:2 的特例。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **一元二次方程：** 黄金分割数是方程 $x^2+x-1=0$ 的正根。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **勾股定理：** 直角三角形斜边上的高分出的三个三角形两两相似，由此也能推出勾股定理。像例 2 那样，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，则 $AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$，两式相加得 $AC^2+BC^2=AB^2$。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 这三种变化保持大小不变，位似改变大小、保持形状。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **锐角三角函数：** 有一个锐角相等的两个直角三角形相似，所以它们对应边的比相等，这个比只由锐角决定。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。
- **投影与视图：** 阳光下的影长和物高成比例，路灯下的影子问题也是相似三角形。见第八部分“投影与视图”（第 248 页）。
- **分类讨论：** 相似的对应关系不确定、位似在中心的哪一侧不确定时，都要分情况。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2025 年第 6 题（第 369 页）、2025 年第 15 题（第 373 页）、2025 年第 21 题（第 377 页）、2024 年第 6 题（第 383 页）、2023 年第 20 题（第 403 页）。

锐角三角函数 ★

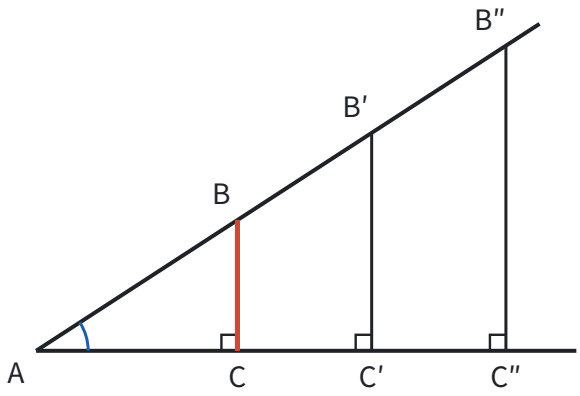
> 对应人教版九年级下册“锐角三角函数”一章。

在直角三角形中，一个锐角的大小确定了，三条边两两之间的比就都确定了；这些比叫做这个锐角的三角函数。 它们把“角”和“边”连了起来：知道角可以求边的比，知道边的比也可以求角。

从哪里来

一个斜坡有多陡，可以用坡角的大小来说，也可以用“升高的高度 ÷ 水平走过的距离”来说。这两种说法之间是什么关系？

在一个锐角 $\angle A$ 的一边上任取几个点 B、B'、B''，分别向另一边作垂线，得到几个直角三角形：



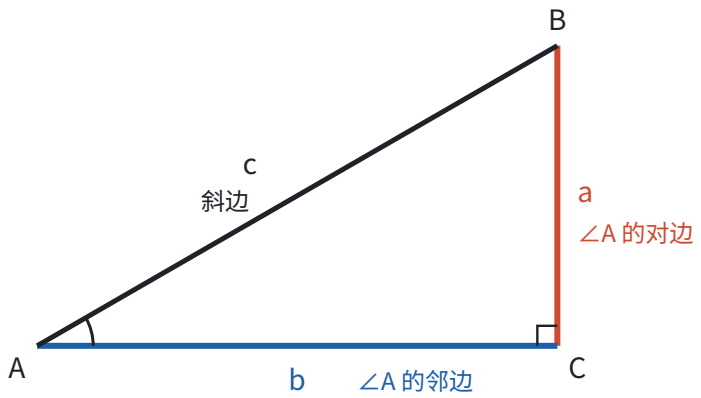
这些直角三角形都有一个直角，又共用 $\angle A$，两角分别相等，所以**全都相似**（见第八部分“相似”（第 230 页））。于是它们对应边的比相等：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

垂线画在哪里，三角形有多大，都不影响这个比值；只有 $\angle A$ 变了，比值才会变。**比值只由角决定**，所以可以把它看成角的“身份证”：给一个锐角，就对应一个确定的比值。每取一个锐角都对应唯一的比值，这正是函数的意思（见第七部分“函数”（第 201 页）），所以叫三角函数。

正弦、余弦、正切

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别是 a、b、c。对 $\angle A$ 来说，a 是它的**对边**，b 是它的**邻边**，c 是**斜边**：

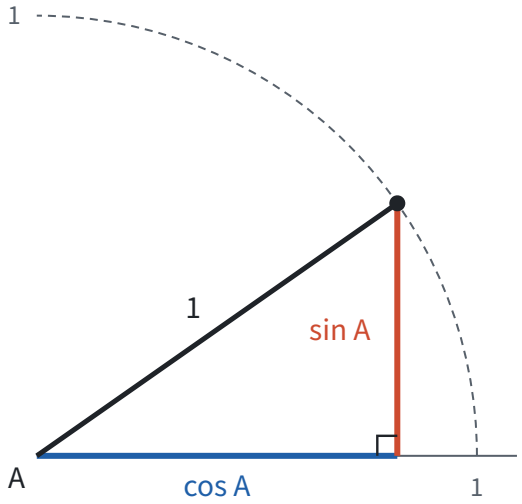


三条边两两相比，有三个常用的比值：

$$\sin A=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},\qquad \tan A=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{a}{b}.$$

它们分别叫 $\angle A$ 的**正弦**、**余弦**、**正切**，统称 $\angle A$ 的锐角三角函数。$\sin A$ 是一个完整的记号，表示一个数，不是 $\sin$ 乘 A。

斜边取 1 来看。 既然比值和三角形的大小无关，不妨让斜边等于 1，这时对边的长就是 $\sin A$，邻边的长就是 $\cos A$：



从图上能直接读出：

- 直角边比斜边短，所以 $0 < \sin A < 1$，$0 < \cos A < 1$；
- $\angle A$ 越大，对边越长、邻边越短：**$\sin A$ 随 $\angle A$ 的增大而增大，$\cos A$ 随 $\angle A$ 的增大而减小；**
- $\tan A$ 是对边除以邻边，分子变大、分母变小，也随 $\angle A$ 的增大而增大。$\tan A$ 越大，斜边越陡，这正是坡度要用的量。

三个比值之间的关系

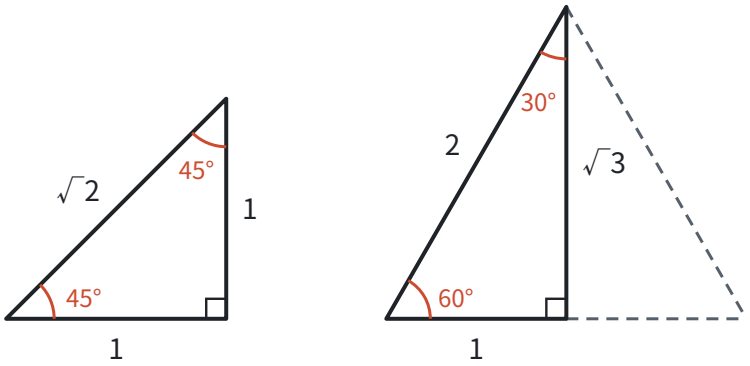
三个比值来自同一个直角三角形，它们之间有关系，不用单独记：

关系	式子	从哪里来
平方和为 1	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$	$a^2/(c^2) + b^2/(c^2) = (a^2 + b^2)/(c^2)$，由勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$，结果是 1
正切是正弦除以余弦	$\tan A = \sin A/(\cos A)$	$a/c \div b/c = a/b$
互余两角	$\angle A + \angle B = 90°$ 时，$\sin A = \cos B$，$\cos A = \sin B$	$\angle A$ 的对边 a 正是 $\angle B$ 的邻边，所以 $\sin A = a/c = \cos B$

其中 $\sin^2 A$ 表示 $(\sin A)^2$。

特殊角的三角函数值

30°、45°、60° 的三角函数值，都能从两个熟悉的三角形里读出来：



- **等腰直角三角形：** 两条直角边都取 1，由勾股定理斜边是 $\sqrt{2}$，两个锐角都是 45°。
- **半个等边三角形：** 边长为 2 的等边三角形，作一条高，把它分成两个全等的直角三角形。每个直角三角形的斜边是 2，短直角边是底边的一半 1，另一条直角边（高）由勾股定理是 $\sqrt{(2^2-1^2)}=\sqrt{3}$。等边三角形的角是 60°，高又平分顶角，所以两个锐角是 60° 和 30°。

按定义直接读出比值：

角	sin	cos	tan
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

比如 $\tan30°=1/(\sqrt{3})=\sqrt{3}/3$（分母有理化，见第三部分“二次根式”（第 79 页））。表里的规律都能用前面的道理检查：$\sin30°=\cos60°$，因为 30° 和 60° 互余；sin 一列从上往下变大，cos 一列变小。

反过来，已知三角函数值也能求角：$\sin A=1/2$，A 是锐角，那么 $A=30°$。其他角的三角函数值，以及由三角函数值求角，用计算器。

解直角三角形

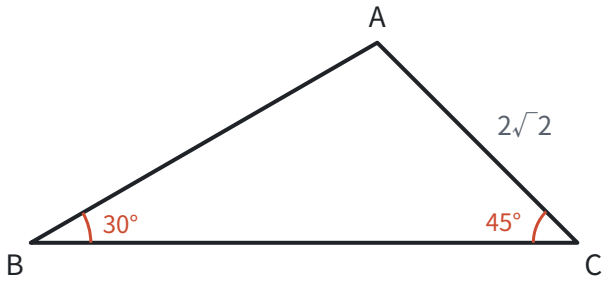
直角三角形除了直角，还有 5 个元素：三条边和两个锐角。它们之间有三类关系：

- **三边之间：** $a^2+b^2=c^2$（勾股定理）；
- **两锐角之间：** $\angle A+\angle B=90°$；
- **边角之间：** $\sin A=a/c$，$\cos A=b/c$，$\tan A=a/b$。

由已知元素求出其余元素，叫**解直角三角形**。只要知道 5 个元素中的 2 个，而且**其中至少有一条边**，就能解出其余的。只知道两个角不行：角相同的直角三角形可大可小，都相似，边定不下来。这和“两角分别相等的三角形相似而不一定全等”是一回事。

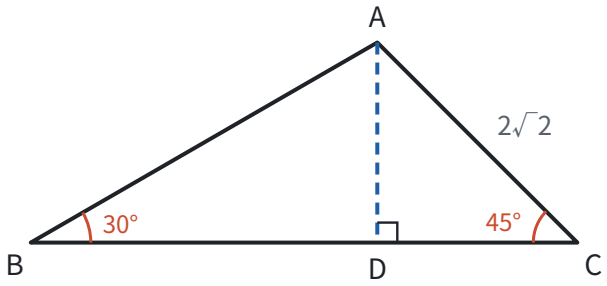
怎样选用关系式：**选一个同时含有已知量和要求的量的式子。** 比如在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=8$，求 BC：BC 是 $\angle A$ 的对边，AB 是斜边，对边和斜边用正弦，$BC=AB\cdot\sin30°=4$。同样，$AC=AB\cdot\cos30°=4\sqrt{3}$，$\angle B=60°$。

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=30°$，$\angle C=45°$，$AC=2\sqrt{2}$。求 BC 的长和 $\triangle ABC$ 的面积。



思路： 三角函数是在直角三角形里定义的，$\triangle ABC$ 不是直角三角形，先要造出直角。已知的两个角 $\angle B$、$\angle C$ 都在 BC 的两端，从 A 作 BC 的垂线 AD，这两个角就分别落在两个直角三角形里，而且两个直角三角形共用 AD。先在已知一条边的 Rt$\triangle ADC$ 里算出 AD，再用 AD 去解 Rt$\triangle ADB$。

解： 作 $AD\perp BC$ 于点 D。



在 Rt$\triangle ADC$ 中，$\angle C=45°$，

$$AD=AC\cdot\sin 45^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2,\qquad DC=AC\cdot\cos 45^\circ=2.$$

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$\angle B=30°$，$\tan B=AD/(BD)$，所以

$$BD=\frac{AD}{\tan 30^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=2\sqrt{3}.$$

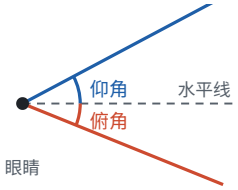
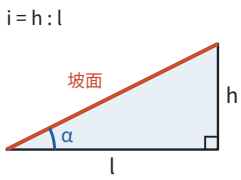
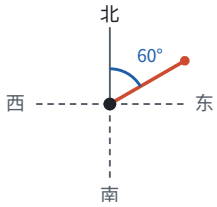
所以 $BC=BD+DC=2\sqrt{3}+2$，面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}+2)\times 2=2\sqrt{3}+2.$$

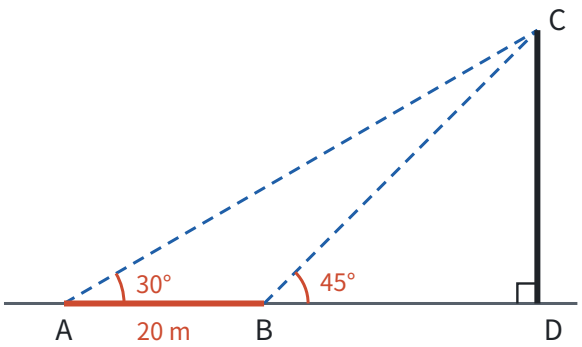
回顾： 斜三角形作高，是把它化成直角三角形的常用办法。作哪条高要看条件：让已知的角留在直角三角形里，不要把它分开。

实际问题中的角和比

解实际问题，先要把题目里的说法翻译成直角三角形里的角或边的比：

说法	示意图	意思	注意
仰角、俯角		视线与**水平线**的夹角；视线在水平线上方是仰角，在下方是俯角	从水平线量起，不是从竖直方向量起
坡度 i		坡面的铅直高度 h 与水平宽度 l 的比，$i=h:l$，常写成 $1:m$	坡面与水平面的夹角 α 叫坡角，$i=h/l=\tan\alpha$。坡度是比值，不是角
方位角		从正北或正南方向量起，偏向东或西的角，如“北偏东 60°”	先找南北方向线，再往东或西转

例 2　在地面上 A 处测得塔顶 C 的仰角为 30°，向塔前进 20 m 到达 B 处，测得塔顶 C 的仰角为 45°。A、B 和塔底 D 在同一直线上。求塔高 CD（结果保留根号，并求出精确到 0.1 m 的近似值。参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$）。



思路： 图里有两个直角三角形 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$，但哪一个都只知道一个角，没有已知的边；已知的 20 m 是两条直角边 AD 和 BD 的差。它们共用 CD，所以设 $CD=x$，把 AD、BD 都用 x 表示，再由 $AD-BD=20$ 列方程。

解： 设 $CD=x$ m。

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=45°$，所以 $BD=CD=x$。

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle A=30°$，$\tan 30°=CD/(AD)$，所以

$$AD=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x.$$

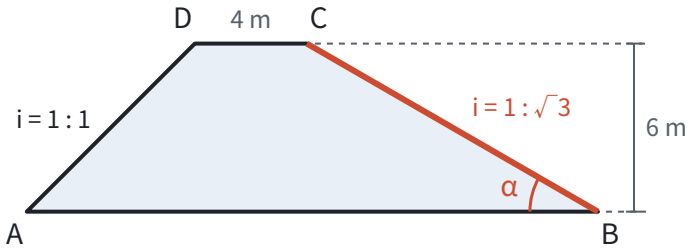
由 $AD-BD=AB$，得 $(\sqrt{3})x-x=20$，所以

$$x=\frac{20}{\sqrt{3}-1}=\frac{20(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=10(\sqrt{3}+1)\approx 10\times 2.73=27.3.$$

答：塔高 $10(\sqrt{3}+1)$ m，约 27.3 m。

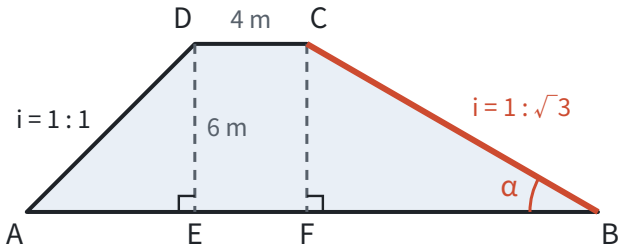
想一想： 例 2 里的两个直角三角形 Rt△ACD 和 Rt△BCD，各自只知道一个角，没有一条已知边，都“条件不够”，没法单独解出来。但它们有公共边 CD，已知的 20 m 又是两条线段的差 $AD-BD$，所以设公共边为未知数，列方程。对比例 1（$\angle B=30°$，$\angle C=45°$，$AC=2\sqrt{2}$）：作高 AD 后，Rt△ADC 已知斜边 AC 和 $\angle C$，是一个“条件够用”的直角三角形，可以直接一步一步往下算。什么时候直接算、什么时候列方程，看的是**有没有一个直角三角形已经知道两个元素（至少一条边）**。

例 3 一段河堤的横截面是梯形 $ABCD$，$DC\parallel AB$，堤顶宽 $DC=4$ m，堤高 6 m，斜坡 AD 的坡度 $i=1:1$，斜坡 BC 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$，坡角为 α。求坡角 α、堤底宽 AB 和斜坡 BC 的长（精确到 0.1 m。参考数据：$\sqrt{3}\approx1.73$）。



思路： 梯形不是直角三角形，过 D、C 作高 DE、CF，梯形分成两个直角三角形和中间一个矩形。坡度就是直角三角形里“高 ÷ 水平宽度”，每一段都能直接算。

解： 作 $DE\perp AB$ 于点 E，$CF\perp AB$ 于点 F，则 $DE=CF=6$，四边形 $DEFC$ 是矩形，$EF=DC=4$。

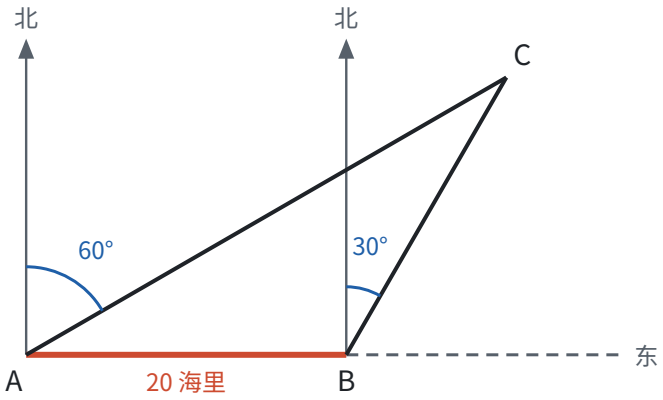


- 斜坡 AD：$DE/(AE)=1$，所以 $AE=6$。
- 斜坡 BC：$\tan\alpha=CF/(BF)=1/(\sqrt{3})=\sqrt{3}/3$，所以 $\alpha=30°$，$BF=\sqrt{3}\times6=6\sqrt{3}$。

所以 $AB=AE+EF+BF=10+6\sqrt{3}\approx10+6\times1.73\approx20.4$（m）。在 Rt△$BCF$ 中，$BC=CF/(\sin30°)=12$（m）。

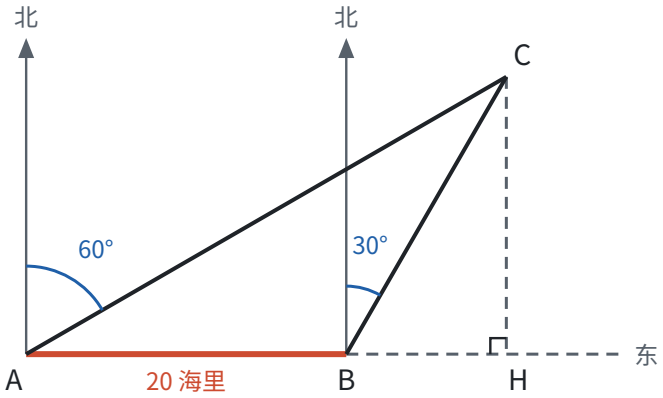
答：坡角 $\alpha=30°$，堤底宽约 20.4 m，斜坡 BC 长 12 m。

例 4 一艘船由 A 处向正东航行，在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 60° 方向；航行 20 海里到达 B 处，测得灯塔 C 在北偏东 30° 方向。灯塔周围 15 海里内有暗礁，船继续向正东航行，有没有触礁的危险？



思路： 船沿直线 AB 向东走，离灯塔最近的时候，是走到从 C 向航线所作垂线的垂足 H 时，所以要比较的是 CH 和 15 海里。先把方位角换成三角形的内角，看看 $\triangle ABC$ 有什么特点。

解： 作 $CH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H。



由方位角，$\angle CAB=90°-60°=30°$，$\angle CBH=90°-30°=60°$。$\angle CBH$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，所以 $\angle ACB=\angle CBH-\angle CAB=30°$。于是 $\angle ACB=\angle CAB$，$BC=AB=20$ 海里（等角对等边）。

在 Rt$\triangle BCH$ 中，

$$CH=BC\cdot\sin 60^\circ=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$$

比较 $10\sqrt{3}$ 和 15，不用近似值，两边平方就行：$(10\sqrt{3})^2=300$，$15^2=225$，$300>225$，所以 $10\sqrt{3}>15$。答：船继续向正东航行，没有触礁的危险。

易错点

- **对边、邻边认错了角。** “对边”“邻边”是相对于某个锐角说的。$\angle A$ 的对边是 $\angle B$ 的邻边。直角不一定在 C，先找到直角，再看要用的是哪个锐角。
- **在非直角三角形里直接用定义。** $\sin A=$ 对边/(斜边) 只在直角三角形里成立。遇到斜三角形，先作高。
- **把 $\sin A$ 当成乘法。** $\sin 60°\neq 2\sin 30°$：$\sin 60°=\sqrt{3}/2$，$2\sin 30°=1$。角扩大 2 倍，三角函数值并不扩大 2 倍。
- **特殊角的值记混。** 不要死记，画出两个特殊三角形现读；再用“sin 随角增大而增大”检查，比如 $\sin 30°$ 一定小于 $\sin 60°$。
- **把坡度当成坡角。** 坡度 $i=1:\sqrt{3}$ 是 $\tan\alpha=\sqrt{3}/3$，坡角才是 30°。

- **仰角、方位角量错了起始线。** 仰角、俯角从水平线量起；方位角从正北或正南方向量起。
- **中途取近似值。** 中间步骤保留根号，最后一步再取近似值，否则误差会累积。

联系

- **相似：** 三角函数之所以只由角决定，是因为有一个锐角相等的直角三角形都相似。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **勾股定理：** $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 就是勾股定理两边同除以 c^2；特殊角的边长也由勾股定理算出。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **一次函数：** 直线 $y=kx+b$（$k>0$）上，x 每增加 1，y 增加 k，这就是一级台阶的“对边 ÷ 邻边”，所以 k 等于直线与 x 轴正方向夹角的正切。k 越大，夹角越大，直线越陡。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **二次根式：** 特殊角的三角函数值和解直角三角形的结果常含根号，要会化简和分母有理化。见第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **函数：** 每个锐角对应唯一的三角函数值，所以叫“函数”。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **投影与视图：** 线段 AB 和投影面成 α 角时，它的正投影长 $AB\cdot\cos\alpha$。见第八部分“投影与视图”（第 248 页）。
- **与圆有关的计算：** 正多边形的边长、边心距，都是在由半径、边心距和半条边组成的直角三角形里解出来的。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **方程思想与建模：** 例 2 在相距 20 m 的 A、B 两处测得塔顶的仰角是 30°、45°，设公共边 CD（塔高）为未知数列方程，是解直角三角形实际问题的常用想法。见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）。

真题： 2026 年第 21 题（第 364 页）、2024 年第 20 题（第 391 页）、2023 年第 20 题（第 403 页）、2023 年第 23 题（第 406 页）、2022 年第 19 题（第 416 页）。

投影与视图

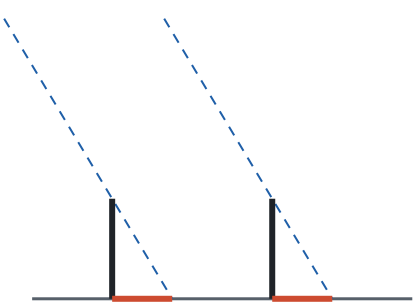
> 对应人教版九年级下册“投影与视图”一章。

用光线照射物体，在某个平面上得到的影子叫物体的投影；把光线换成视线、从三个规定的方向去看，就得到物体的三视图。 投影和视图都是把立体图形变成平面图形的办法。

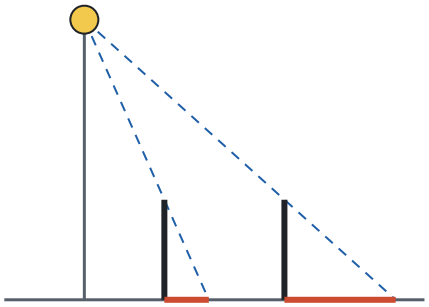
从哪里来

阳光下的树影、灯光下的人影、皮影戏里幕布上的影子，都是投影。照射的光线叫**投影线**，影子所在的平面叫**投影面**。

影子的形状和大小由两件事决定：光线是怎样射来的，物体和投影面是怎样摆放的。光线有两种典型情况：



平行投影：光线平行



中心投影：光线从一点出发

平行投影和中心投影

投影	投影线	例子	等高的物体	可以用来
平行投影	互相平行	太阳光下的影子	同一时刻影子一样长，影长与物高成比例	用影长测高度
中心投影	从一点出发	路灯、手电筒、台灯下的影子	离光源越远，影子越长	由影子找光源的位置

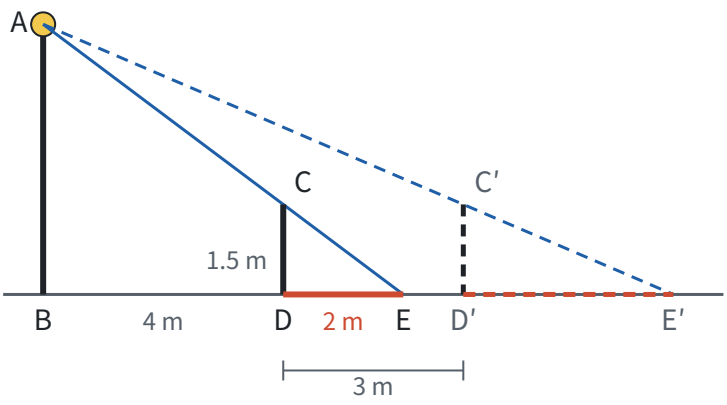
平行投影： 太阳离地球非常远，射到地面上的光线可以看成平行的。同一时刻，竖直的物体和它的影子、光线组成的直角三角形，一个锐角都等于光线和地面的夹角，所以都相似，**物高与影长的比都相等**。第八部分“相似”（第 230 页）中测树高的例题就是这样做的：同一时刻，身高 1.6 m 的小明影长 1.2 m，树的影长 6 m，树高与影长的比也等于 $1.6:1.2$，所以树高是 $(1.6\times 6)/1.2=8$（m）。一天中太阳的位置在变，影子的方向和长短也在变：上午影子偏向西，中午最短，下午偏向东。

中心投影： 灯光从一点射出。把两个物体的顶端和各自影子的端点分别连成直线，两条直线的交点就是光源。

例 1　如图，路灯 AB 竖直立在地面上，身高 1.5 m 的小明站在 D 处，$BD=4$ m，他的影长 $DE=2$ m。

（1）求路灯的高 AB；

（2）小明沿 BD 方向再走 3 m 到 D' 处，这时他的影长 $D'E'$ 是多少？



思路： 光线 AE 经过小明的头顶 C。人和路灯都垂直于地面，$CD\parallel AB$，于是 $\triangle ECD$ 和 $\triangle EAB$ 是 A 字型的相似三角形。第（2）问换了位置，但还是同一个图形，只是未知数变成了影长。

解：（1）因为 $CD \parallel AB$，所以 $\triangle ECD \backsim \triangle EAB$，

$$\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE},\quad \frac{1.5}{AB}=\frac{2}{4+2},$$

所以 $AB=4.5$ m。

（2）此时 $BD'=4+3=7$（m）。设 $D'E'=x$ m，同理 $\triangle E'C'D' \backsim \triangle E'AB$，

$$\frac{1.5}{4.5}=\frac{x}{7+x}.$$

两边乘 $4.5(7+x)$，得 $1.5(7+x)=4.5x$，解得 $x=3.5$。经检验，$x=3.5$ 是方程的解。答：影长是 3.5 m。

想一想： 上面算了两个位置：离灯 4 m 时影长 2 m，离灯 7 m 时影长 3.5 m，每换一个位置都要重新列比例、解方程。能不能一次说清“走到哪里，影子多长”？把位置也用字母表示：设小明离路灯底部 x m，影长 y m（这里 x 表示离灯的距离，不再是第（2）问的影长）。同样由 $\triangle ECD \backsim \triangle EAB$，

$$\frac{1.5}{4.5}=\frac{y}{x+y}.$$

左边化简是 $1/3$，所以 $x+y=3y$，即

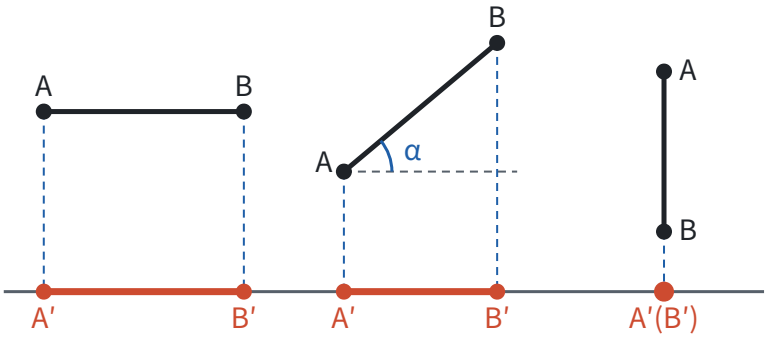
$$y=\frac{1}{2}x.$$

这个 $1/2$ 从哪里来？人高 1.5 m，是灯高 4.5 m 的 $1/3$，所以影长占“离灯距离 + 影长”的 $1/3$，也就是离灯距离的一半。

$y=(1/2)x$ 是正比例函数（见第七部分“一次函数”（第 206 页））：人离灯越远，影子越长，而且均匀变长，离灯每远 1 m，影子变长 0.5 m；走到灯底下（$x=0$），影子缩成 0。把前面两个位置代进去：$x=4$ 时 $y=2$，$x=7$ 时 $y=3.5$，和上面算的一致。有了这个式子，小明走到哪里，影子多长，一眼就能看出来。

正投影

平行投影中，投影线**垂直**于投影面时，叫**正投影**。一条线段的正投影有多长，要看它和投影面怎样摆放：



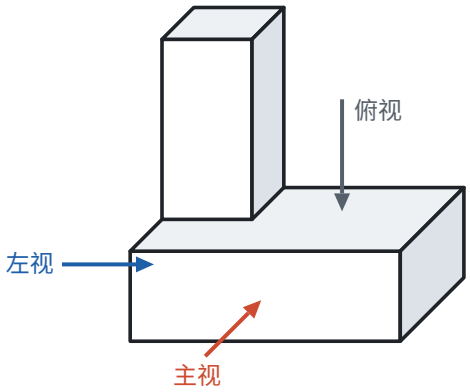
- **平行于投影面：** AA'、BB' 都垂直于投影面，$AA'B'B$ 是矩形，所以 $A'B'=AB$；
- **倾斜于投影面：** 设 AB 与投影面成 α 角，过 A 作投影面的平行线，得到一个斜边为 AB 的直角三角形，$A'B'=AB\cdot\cos\alpha$，比 AB 短（见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页））；
- **垂直于投影面：** 正投影是一个点。

平面图形也一样：平行于投影面时，正投影和原图形全等；倾斜时，形状会被“压扁”；垂直时，缩成一条线段。所以要看清一个面的真实形状，就要让它平行于投影面。

三视图

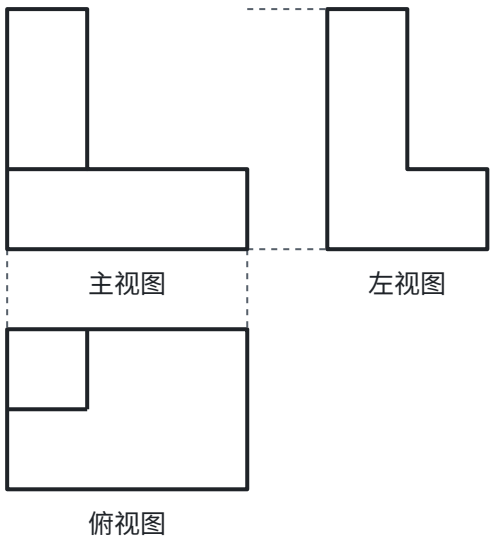
从一个方向看一个物体，看到的就是物体在这个方向上的正投影，叫**视图**。一个视图只能反映物体的两个方向的尺寸，所以要从三个互相垂直的方向去看：

- 从正面看，得到**主视图**；
- 从左面看，得到**左视图**；
- 从上面看，得到**俯视图**。



把物体的左右方向叫“长”，前后方向叫“宽”，上下方向叫“高”。三个视图各反映两个尺寸：

视图	看的方向	反映的尺寸	位置
主视图	从前往后	长和高	左上
俯视图	从上往下	长和宽	主视图的正下方
左视图	从左往右	宽和高	主视图的正右方

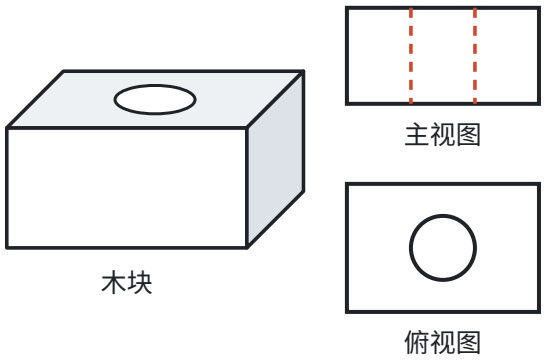


三视图这样排，是为了让共有的尺寸对齐：主视图和俯视图都反映长，就上下对正，左右边界对齐；主视图和左视图都反映高，就左右摆齐，上下边界对齐；俯视图和左视图都反映宽，所以**俯视图的上下宽度等于左视图**

的左右宽度。

读图时还要分清方向：俯视图的**下方**是物体的前面；左视图的**右方**是物体的前面（站在物体左边往右看，物体的前面在你的右手边）。上图中较高的部分在物体后部，所以在俯视图里靠上，在左视图里靠左。

看得见的轮廓线画实线，看不见的轮廓线画虚线。 比如一块中间打了竖直圆孔的木块，孔在主视图里看不见，要画成两条竖直的虚线；从上往下看，孔看得见，俯视图里是一个实线的圆。



常见几何体的三视图：

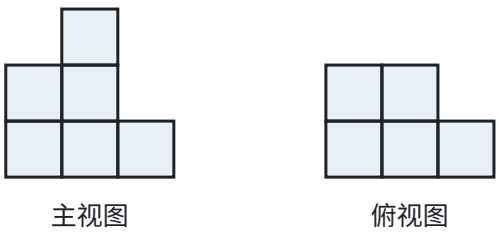
几何体	主视图	左视图	俯视图
正方体	正方形	正方形	正方形
长方体	长方形	长方形	长方形
圆柱（竖放）	长方形	长方形	圆
圆锥（竖放）	等腰三角形	等腰三角形	圆和圆心
球	圆	圆	圆

圆锥的俯视图里有圆心那一点，因为从上往下看，顶点正对着底面圆心。

由三视图想象几何体

反过来，由三视图想象物体的形状，常用的顺序是：**先看俯视图定“地基”，再用主视图和左视图定高度。**

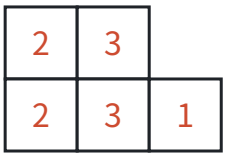
例 2　用若干个大小相同的小正方体搭成一个几何体，它的主视图和俯视图如图所示。搭成这个几何体最多需要几个小正方体？最少需要几个？



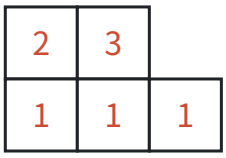
思路： 俯视图告诉我们哪些位置上有小正方体：后排 2 个位置，前排 3 个位置，每个位置至少有 1 个。主视图告诉我们的是**每一列最高的那一摞有多高**，至于这一列前后两个位置各有几个，主视图看不出来。

- 左边一列：前后两个位置，最高是 2；
- 中间一列：前后两个位置，最高是 3；
- 右边一列：只有前排一个位置，高是 1。

解： 把每个位置上小正方体的个数写在俯视图的格子里：



最多：11 个

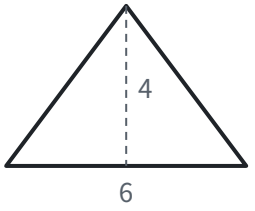


最少：8 个（一种摆法）

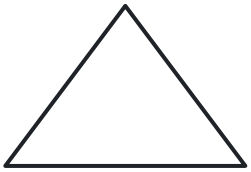
- **最多：** 每个位置都摆到这一列的最高高度，共 $2+2+3+3+1=11$ 个。
- **最少：** 每一列只要有一个位置达到最高高度，其余位置各摆 1 个，共 $(2+1)+(3+1)+1=8$ 个。最少时哪个位置摆高都可以，摆法不止一种。

答：最多需要 11 个，最少需要 8 个。

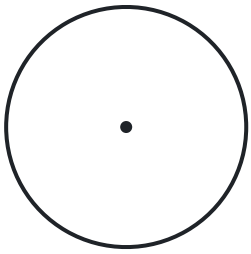
例 3　一个几何体的三视图如图所示（单位：cm）。求这个几何体的侧面积和全面积。



主视图



左视图



俯视图

思路： 俯视图是带圆心的圆，主视图、左视图是等腰三角形，这是一个竖放的圆锥。主视图的底边是底面直径，高是圆锥的高；求侧面积还需要母线长，它是由高、底面半径和母线组成的直角三角形的斜边。

解： 这个几何体是圆锥，底面半径 $r=3$ cm，高 $h=4$ cm。由勾股定理，母线长 $l=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$（cm）。

侧面积 $\pi rl=\pi\times3\times5=15\pi$（$\text{cm}^2$），底面积 $\pi r^2=9\pi$（cm^2），全面积为 $15\pi+9\pi=24\pi$（cm^2）。

圆锥侧面积公式的由来见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。

立体图形、展开图与三视图

把立体图形变成平面图形，有两种办法，得到的东西不一样：

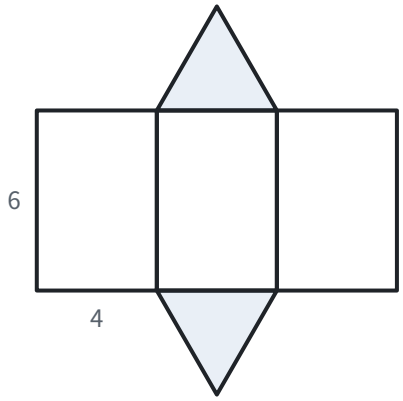
办法	怎样得到	保留了什么	丢掉了什么
展开图	沿棱剪开，把所有的面摊平在一个平面上	每个面的真实形状和大小	面与面之间的立体位置关系
三视图	从三个方向作正投影	长、宽、高和各个方向上的轮廓	倾斜的面的真实形状；看不见的部分要靠虚线补

展开图适合算表面积、做模型；三视图适合表示形状和尺寸。一个面只有平行于投影面时，在视图里才是真实形状，所以倾斜的面要从展开图或计算中求真实大小，例 3 的母线长就是这样算出来的：视图里看不到母线的真实长度，是由圆锥的高 4 cm 和底面半径 3 cm 用勾股定理算出 5 cm。展开图的读法见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。

制作立体模型。 把三视图、想象、展开图连起来，可以亲手做一个模型来检验：

1. 由三视图想象出几何体的形状，从视图中读出各部分的尺寸；
2. 画出它的展开图，尺寸和三视图一致；
3. 剪下、折叠、粘好，做成模型；
4. 从正面、左面、上面看模型，画出三视图，和原来的对照。

比如一个直三棱柱，俯视图是边长 4 cm 的等边三角形，主视图和左视图都是高 6 cm 的长方形。它的侧面是三个 4 cm × 6 cm 的长方形，上下底面是两个边长 4 cm 的等边三角形，展开图可以画成：



易错点

- **左视图放错位置或看错方向。** 左视图画在主视图的正右方，是从左往右看得到的；物体的前面在左视图的右边。
- **看不见的轮廓线没画成虚线。** 被挡住的棱和轮廓线也要画出来，用虚线。
- **分不清平行投影和中心投影。** 看投影线：互相平行的是平行投影（太阳光），交于一点的是中心投影（灯光）。在中心投影下，影长与物高不再有固定的比，要用相似三角形具体算。
- **以为正投影和原线段一样长。** 只有线段平行于投影面时才一样长，倾斜时变短。
- **圆锥的俯视图漏了圆心。** 顶点投影在底面圆心，要画出这一点。
- **用主视图直接数小正方体。** 主视图只反映每一列的最高高度，前后有几个位置要看俯视图；最多、最少要分开想。

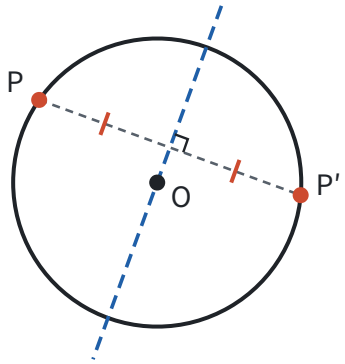
联系

- **相似：** 平行投影中影长与物高成比例，中心投影的影子问题是 A 字型相似三角形。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **锐角三角函数：** 倾斜的线段的正投影长等于原长乘以夹角的余弦。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。
- **一次函数：** 路灯下影长是离灯距离的正比例函数。见第七部分“一次函数”（第 206 页）。
- **几何图形初步：** 立体图形与平面图形的互相转化，除了三视图，还有展开图。见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。
- **勾股定理：** 由三视图求圆锥的母线、长方体的对角线，都要用勾股定理。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **与圆有关的计算：** 圆锥的侧面展开图是扇形，侧面积 πrl 由扇形面积推出。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。

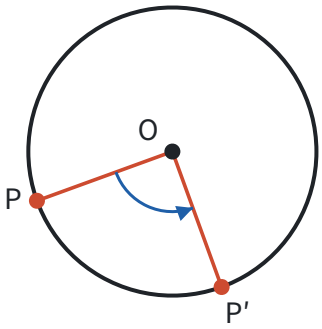
真题： 2025 年第 21 题（第 377 页）、2024 年第 4 题（第 382 页）、2023 年第 2 题（第 396 页）。

总览：圆的对称性

圆上每一点到圆心的距离都等于半径，这一个事实让圆拥有最完整的对称：沿任何一条直径翻折都和自身重合，绕圆心旋转任意角度也和自身重合；圆的性质都从这两种对称推出来，位置关系都归结为比较距离和半径，计算都归结为按圆心角的比例取整圆的一部分。



沿任一直径所在直线翻折



绕圆心旋转任意角度

两种对称推出的性质

对称	为什么成立	推出的性质	页面
旋转对称：绕圆心旋转任意角度，和自身重合	旋转不改变点到圆心的距离	同圆或等圆中，圆心角、弧、弦有一组相等，另两组也相等；弧的度数等于圆心角的度数	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
旋转对称，加上半径相等	两条半径和一条弦组成等腰三角形	圆周角等于同弧所对圆心角的一半；直径所对的圆周角是直角；圆内接四边形对角互补	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
轴对称：任何一条直径所在直线都是对称轴	圆心在对称轴上，到一对对称点的距离相等	垂径定理：垂直于弦的直径平分弦和弦所对的两条弧	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
轴对称	两条切线关于圆心和圆外一点的连线对称	切线长定理：两条切线长相等	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
旋转对称	把圆 n 等分，转过一个中心角就重合	正 n 边形，中心角是 $360°/n$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）

证明这些性质时，最常用的一步都是“连接半径”：有了两条相等的半径，就有了等腰三角形，前面学过的“三线合一”、全等、勾股定理就都能用上了。

位置关系：比较距离和半径

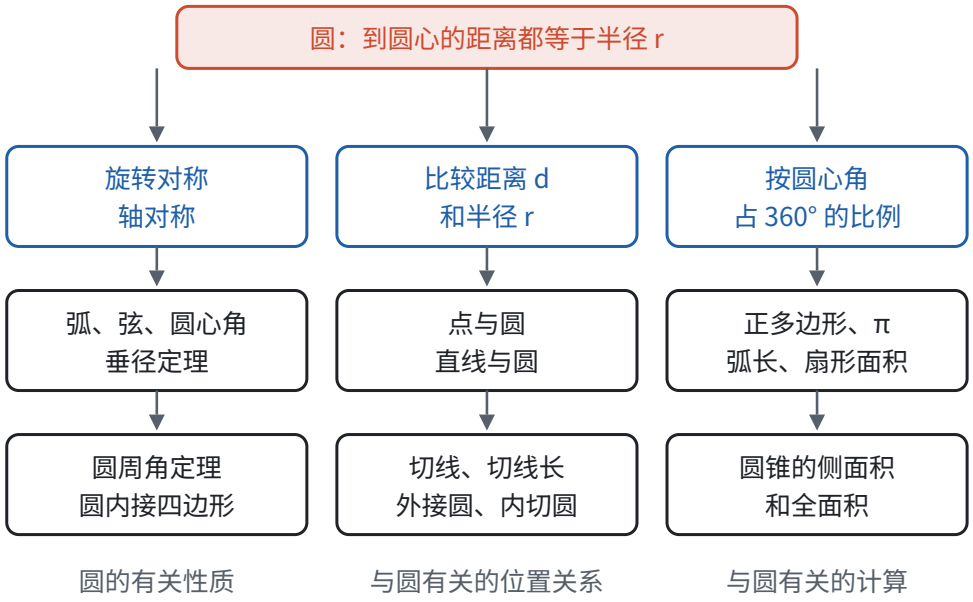
对象	比较的距离 d	$d<r$	$d=r$	$d>r$
点和圆	点到圆心的距离	点在圆内	点在圆上	点在圆外
直线和圆	圆心到直线的距离	相交，2 个公共点	相切，1 个公共点	相离，没有公共点

位置关系和数量关系可以互相推出：知道位置，就知道 d 和 r 谁大；知道 d 和 r 谁大，也就知道位置。三角形和圆的关系也是这样说的：外接圆的圆心到三个顶点的距离都等于半径，内切圆的圆心到三条边的距离都等于半径。

计算：按比例取一部分

整圆的周长 $2\pi R$ 和面积 πR^2 是用圆内接正多边形逼近得到的。有了它们，弧长、扇形面积都是按圆心角占 360° 的比例取一部分，圆锥的侧面积是展开后扇形的面积。

三页之间的关系



页面	讲什么	核心的想法
圆的有关性质	弦、弧、圆心角；垂径定理；圆周角定理；圆内接四边形	旋转对称和轴对称，再加上半径相等
与圆有关的位置关系	点与圆、直线与圆；过三点作圆；切线的判定和性质；切线长定理；外接圆和内切圆	比较距离和半径
与圆有关的计算	正多边形与圆；圆周率；弧长；扇形面积；圆锥的侧面积和全面积	按圆心角占 360° 的比例取一部分

建议按顺序学：

1. 先学第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。学之前复习等腰三角形的“三线合一”（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））和勾股定理（见第五部分“勾股定理”（第 149 页）），圆里的证明和计算几乎都要用到它们。
2. 再学第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。它用到上一页的垂径定理和“直径所对的圆周角是直角”；外心和内心又连着线段的垂直平分线（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））和角的平分线（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。
3. 最后学第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。正多边形的计算要用锐角三角函数（见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）），圆锥的展开图要用到立体图形的展开（见第五部分“几何图形初步”（第 113

页））。

圆里常用的辅助线怎样想到，见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）；位置不确定、需要分情况讨论的问题，见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

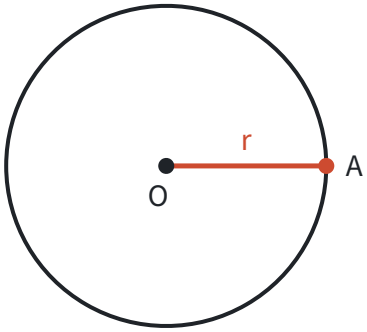
圆的有关性质 ★

> 对应人教版九年级上册第二十九章。

圆上每一点到圆心的距离都相等，所以圆绕圆心旋转任意角度都和自身重合，沿任何一条直径翻折也和自身重合；弧、弦、圆心角的关系，垂径定理，圆周角定理，都是这两种对称推出来的。 证明时最常用的一步是“连接半径”：两条半径和一条弦围成一个等腰三角形。

从哪里来：圆的定义

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆。固定的端点 O 叫圆心，线段 OA 叫半径，通常用 r 表示。以 O 为圆心的圆记作 $\odot O$，读作“圆 O”。



用圆规画圆就是这个过程：针尖是圆心，两脚之间的距离是半径。在转动中，A 每到一个位置，它到 O 的距离都是 r。所以圆也可以这样定义：

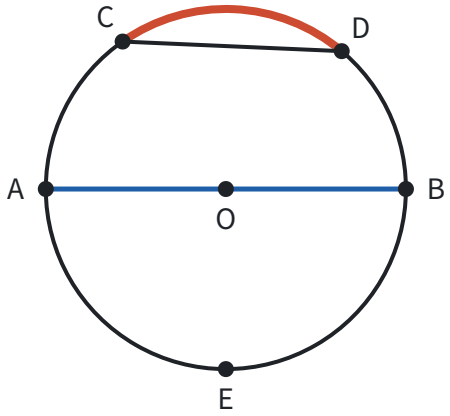
圆是平面内到定点的距离等于定长的所有点组成的图形。

这句话包含两层意思：圆上每一点到圆心的距离都等于 r；反过来，到圆心的距离等于 r 的点都在圆上。确定一个圆需要两个条件：圆心确定它的位置，半径确定它的大小。半径相等的两个圆叫等圆，等圆经过平移可以完全重合。

圆上的线和弧有下面这些名称：

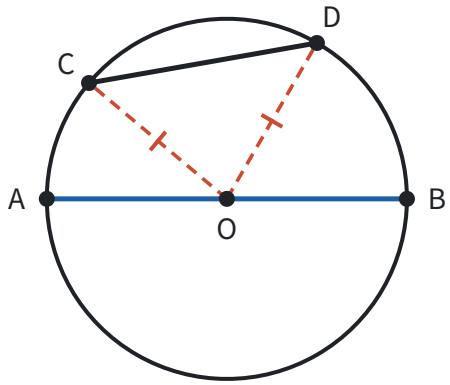
名称	定义	图中的例子
弦	连接圆上任意两点的线段	CD、AB
直径	经过圆心的弦	AB
弧	圆上任意两点间的部分	弧 CD
半圆	直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条都叫半圆	弧 ACB、弧 AEB

名称	定义	图中的例子
劣弧、优弧	小于半圆的弧叫劣弧，大于半圆的弧叫优弧	劣弧 CD（红色）、优弧 CED
等弧	在同圆或等圆中，能够互相重合的弧	—



以 C、D 为端点的弧读作“弧 CD”，书写时在字母 CD 上方画一段弧线。优弧要用三个字母表示，比如优弧 CED，中间的字母说明弧经过哪一边。

直径是圆中最长的弦。 任取一条不经过圆心的弦 CD，连接 OC、OD。在 $\triangle OCD$ 中，两边之和大于第三边，所以 $CD < OC + OD = 2r$，而直径的长正好是 $2r$。

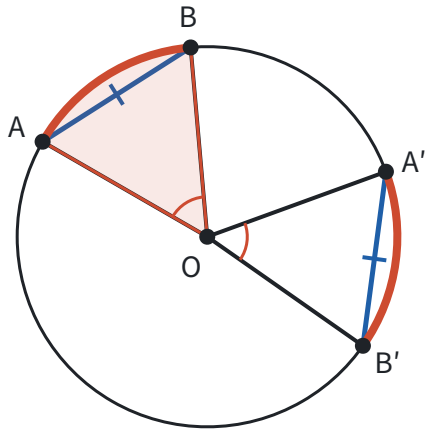


旋转对称：圆心角、弧、弦

顶点在圆心的角叫圆心角。

把圆绕圆心旋转任意角度，每个点到圆心的距离都不变，所以圆上的点仍然落在圆上：**圆绕圆心旋转任意角度，都能和原来的圆重合。** 转 $180°$ 当然也重合，所以圆是中心对称图形，对称中心是圆心。

用这个性质比较两个相等的圆心角。设 $\angle AOB = \angle A'OB'$，把 $\angle AOB$ 连同弧 AB、弦 AB 一起绕 O 旋转，使 OA 和 OA' 重合。因为两个角相等，射线 OB 就落在射线 OB' 上；又因为 $OA = OA'$、$OB = OB'$（都是半径），点 A 落在 A' 上，点 B 落在 B' 上。于是弧 AB 和弧 $A'B'$ 重合，弦 AB 和弦 $A'B'$ 重合：



在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等。

反过来也成立：

- 弧 AB 和弧 $A'B'$ 相等，就是能够重合，重合时端点对端点，所以圆心角相等、弦相等。
- 弦 $AB=A'B'$，再加上四条半径相等，由 SSS 得 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$，所以圆心角相等，于是弧也相等（这里的弧都指劣弧，或都指优弧）。

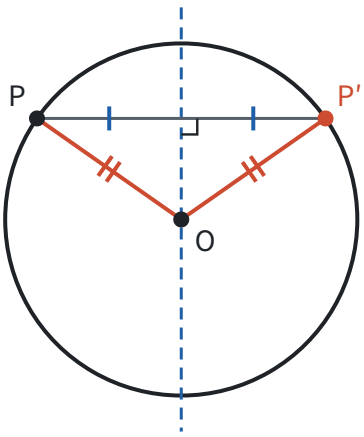
合起来就是：**在同圆或等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦中，只要有一组相等，另外两组也相等。** 三者捆在一起，是因为它们都随着旋转一起移动。

“同圆或等圆”不能丢：两个大小不同的同心圆，同一个圆心角在大圆上截得的弧和弦都比在小圆上的长。

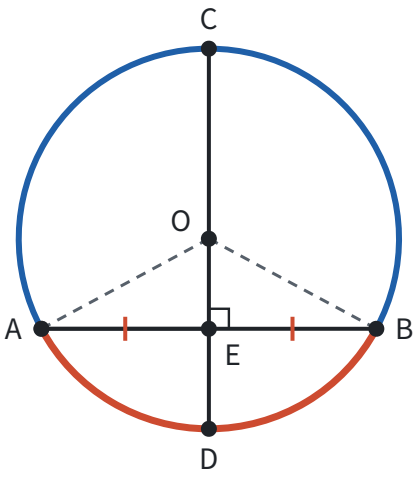
弧的度数。 把以圆心为顶点的周角等分成 360 份，每一份是 $1°$ 的圆心角，它所对的弧叫 $1°$ 的弧。所以**圆心角是多少度，它所对的弧就是多少度。** 后面讲圆周角、弧长时都要用到这句话。

轴对称：垂径定理

在圆上任取一点 P，作它关于某条直径所在直线的对称点 P'。圆心 O 在对称轴上，而对称轴是线段 PP' 的垂直平分线，所以 $OP'=OP=r$，P' 也在圆上。**圆是轴对称图形，任何一条直径所在的直线都是它的对称轴。**



现在让直径 CD 垂直于弦 AB，垂足为 E：



连接 OA、OB。$OA=OB$，所以 $\triangle OAB$ 是等腰三角形，OE 是底边 AB 上的高。由“三线合一”，OE 也是底边上的中线，$AE=BE$（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））。于是直线 CD 是 AB 的垂直平分线，A、B 关于直线 CD 对称。沿 CD 翻折，A 和 B 重合，C、D 不动，所以弧 AC 和弧 BC 重合，弧 AD 和弧 BD 重合：

垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

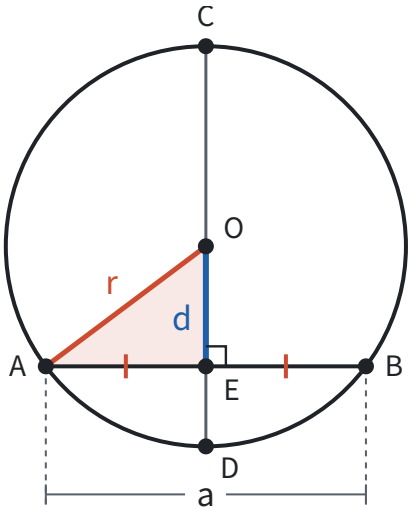
图中，条件是“CD 是直径”和“$CD\perp AB$”，结论是 $AE=BE$，弧 AC 和弧 BC 相等，弧 AD 和弧 BD 相等。

这五件事说的是同一条直线。“过圆心”“垂直于弦”“平分弦”“平分弦所对的优弧”“平分弦所对的劣弧”，每一条都是弦 AB 的垂直平分线的特征。一条直线由两个条件就确定了，所以知道其中两条，就能推出另外三条。比如过圆心又平分弦 AB，这条直线经过 O 和 AB 的中点两个点，就是 AB 的垂直平分线，于是：

推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

“不是直径”是因为：如果 AB 本身是直径，它的中点就是 O，“过圆心”和“平分弦”说的是同一个点，只算一个条件。两条直径总是互相平分，却不一定互相垂直。

垂径定理最常见的用法是算长度。圆心到弦的距离叫弦心距，记作 d，弦长记作 a。半径、弦心距、弦的一半组成直角三角形。再看一次前面讲垂径定理时用的图，直径 CD 垂直于弦 AB，垂足为 E，其中的 $\triangle OAE$ 就是这个直角三角形：

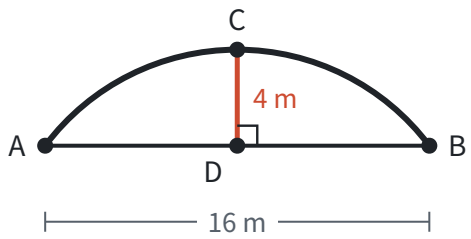


由勾股定理，

$$r^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

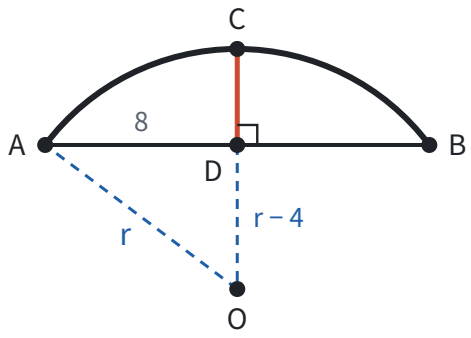
三个量知道两个，就能求第三个。

例 1　一座石拱桥的桥拱是圆弧形。如图，跨度 $AB = 16$ m，拱高 $CD = 4$ m，其中 D 是 AB 的中点，$CD \perp AB$。求桥拱所在圆的半径。



思路： 半径、弦的一半、弦心距能组成直角三角形，所以先找圆心。圆心到 A、B 的距离相等，一定在 AB 的垂直平分线上，而直线 CD 正是 AB 的垂直平分线，所以圆心 O 在直线 CD 上。半径不知道，就设为 r，把直角三角形的三条边都用 r 表示出来，列方程。

解： 设桥拱所在圆的圆心为 O，半径为 r m，连接 OA。由上面的分析，O 在直线 CD 上，$OC = r$，所以 $OD = r - 4$；$AD = (1/2)AB = 8$。



在 Rt$\triangle AOD$ 中，$OA^2 = AD^2 + OD^2$，即

$$r^2 = 8^2 + (r-4)^2.$$

展开得 $r^2 = 64 + r^2 - 8r + 16$，所以 $8r = 80$，$r = 10$。

答：桥拱所在圆的半径是 10 m。

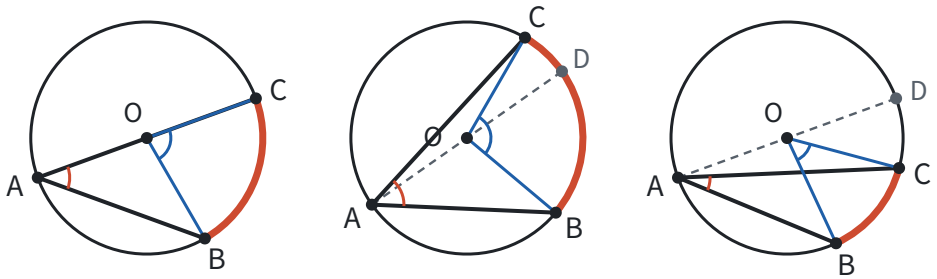
回顾： 圆里求长度，常常是“作弦心距、连半径，构成直角三角形”，再把未知量设出来用勾股定理列方程（见第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页））。

圆周角定理

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫圆周角。

圆心角是“站在圆心看一条弧”，圆周角是“站在圆上看一条弧”。同一条弧 BC，站在圆心看和站在圆上看，

张开的角有什么关系？在圆上取一点 A，看圆周角 $\angle BAC$ 和圆心角 $\angle BOC$。圆心 O 和 $\angle BAC$ 的位置有三种情况：



① 圆心在角的一边上　② 圆心在角的内部　③ 圆心在角的外部

情况 ①：圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边 AC 上。 这是最容易的情况。$OA = OB$，所以 $\angle OBA = \angle BAC$。$\angle BOC$ 是 $\triangle OAB$ 的外角，等于和它不相邻的两个内角之和：

$$\angle BOC = \angle BAC + \angle OBA = 2\angle BAC.$$

情况 ②：圆心在角的内部。 作直径 AD，它把 $\angle BAC$ 分成 $\angle BAD$ 和 $\angle DAC$，两部分都属于情况 ①：$\angle BAD = 1/2\angle BOD$，$\angle DAC = 1/2\angle DOC$。两式相加，得 $\angle BAC = 1/2\angle BOC$。

情况 ③：圆心在角的外部。 同样作直径 AD，这次 $\angle BAC$ 是两个角的差：

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BOD - \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

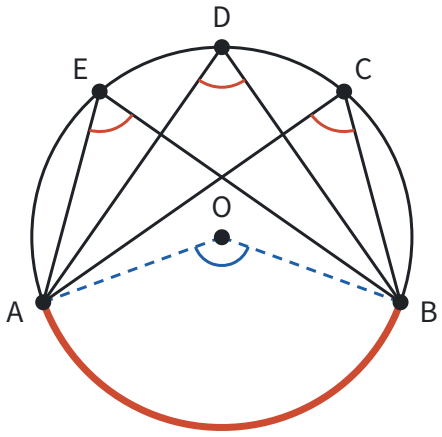
三种情况结论相同：

圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

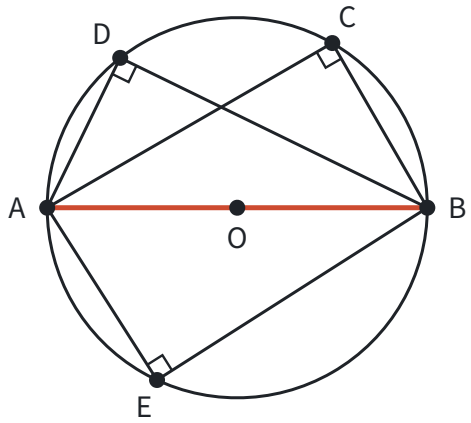
证明的想法是：先把最简单的情况 ① 证出来，另两种情况都作一条直径，把角拆成或补成情况 ①。这种“分情况、再化归到已经会的情况”的做法，见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

由圆周角定理马上得到两个推论。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等。 它们都等于同一个圆心角的一半。

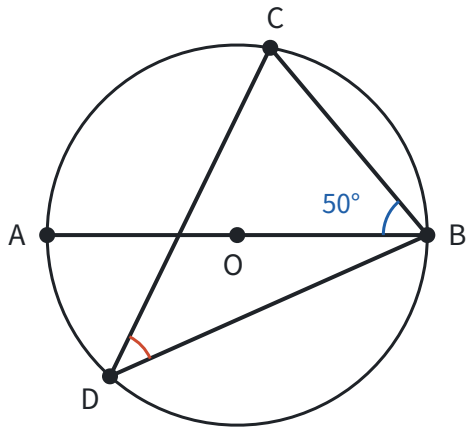


推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径。 直径所对的圆心角是平角，一半就是 90°。反过来，圆周角是 90°，它所对的圆心角就是 180°，弦的两个端点和圆心在一条直线上，这条弦是直径。



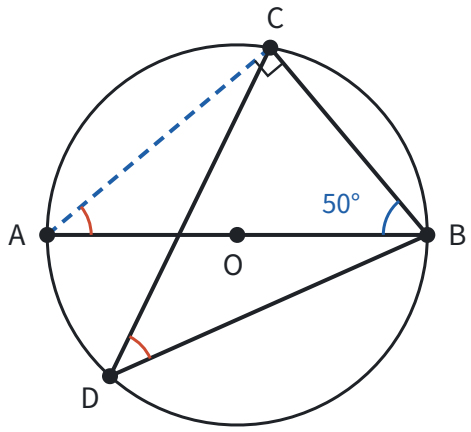
推论 2 就是“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”换了一种说法：斜边的中点到三个顶点的距离相等，所以直角顶点在以斜边为直径的圆上（见第五部分“四边形”（第 157 页））。

例 2　如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C、D 在 $\odot O$ 上，$\angle ABC = 50°$。求 $\angle BDC$ 的度数。



思路： $\angle BDC$ 是弧 BC 所对的圆周角，它所在的 $\triangle BCD$ 里没有已知的角。但同一条弧 BC 还对着别的圆周角，比如 $\angle BAC$，可以把问题转到它身上。$\angle BAC$ 在 $\triangle ABC$ 里，而 AB 是直径，$\angle ACB = 90°$，这个三角形的角就都能求了。所以连接 AC。

解： 连接 AC。

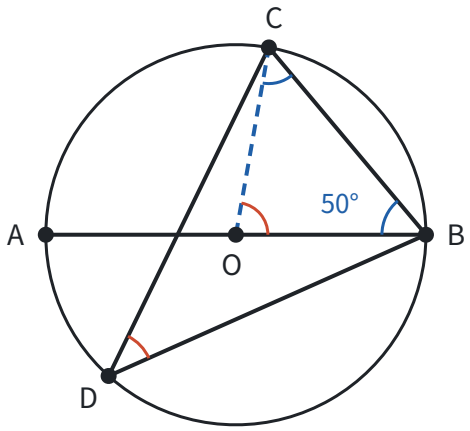


因为 AB 是直径，所以 $\angle ACB = 90°$。在 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle BAC = 180° - 90° - 50° = 40°.$$

$\angle BDC$ 和 $\angle BAC$ 都是弧 BC 所对的圆周角，所以 $\angle BDC = \angle BAC = 40°$。

想一想： 不连 AC，改连 OC 也能做。



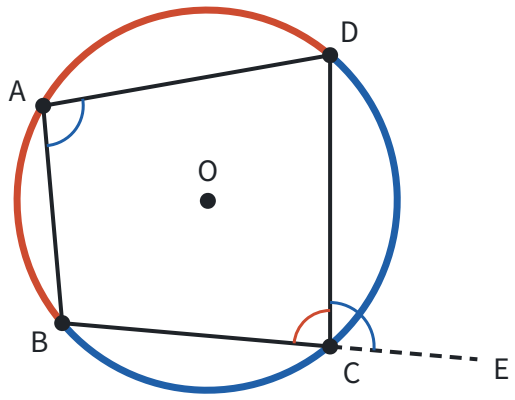
$OB = OC$，所以 $\angle OCB = \angle OBC = 50°$，$\angle BOC = 180° - 2 \times 50° = 80°$，于是 $\angle BDC = 1/2 \angle BOC = 40°$。

比较	连 AC	连 OC
得到什么	直径所对的圆周角，是直角	两条半径，是等腰三角形
用的定理	直径所对的圆周角是直角；同弧所对的圆周角相等	等腰三角形的底角相等；圆周角是圆心角的一半

这两种添线正是圆里最常用的辅助线：**连半径得到等腰三角形，连出直径所对的圆周角得到直角。** 见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）。

圆内接四边形

四个顶点都在同一个圆上的四边形叫圆内接四边形，这个圆叫四边形的外接圆。



$\angle A$ 是弧 BCD 所对的圆周角，$\angle BCD$ 是弧 BAD 所对的圆周角。两条弧合起来正好是整个圆，它们所对的圆心角合起来是周角 360°，所以

$$\angle A + \angle BCD = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ.$$

同样，$\angle ABC + \angle D = 180°$。**圆内接四边形的对角互补。**

延长 BC 到 E，$\angle DCE$ 和 $\angle BCD$ 互补，而 $\angle A$ 也和 $\angle BCD$ 互补，所以 $\angle DCE = \angle A$：**圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角。**

例 3　在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C = 2:3:4$，求 $\angle D$ 的度数。

思路： 四个角里有两对对角，每对互补。$\angle A$ 和 $\angle C$ 是一对，按比例设出来，就能求出每一份是多少度。

解： 设 $\angle A = 2x$，$\angle B = 3x$，$\angle C = 4x$。由 $\angle A + \angle C = 180°$，得 $6x = 180°$，$x = 30°$，所以 $\angle B = 90°$。再由 $\angle B + \angle D = 180°$，得 $\angle D = 90°$。

检验： $\angle A = 60°$，$\angle C = 120°$，四个角的和是 $60° + 90° + 120° + 90° = 360°$，符合四边形内角和。

易错点

- **丢掉“在同圆或等圆中”。** 圆心角、弧、弦“一组相等则其余相等”，只在同一个圆或半径相等的圆里成立。
- **把“度数相等的弧”当成“等弧”。** 等弧要能完全重合。半径不同的两个圆里，度数相同的弧长短不同，不是等弧。
- **垂径定理的推论漏掉“弦不是直径”。** 两条直径互相平分，但不一定互相垂直。
- **一条弦所对的圆周角只算了一个。** 弦把圆分成优弧和劣弧，顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角互补（这正是圆内接四边形对角互补）。比如弦长等于半径时，它所对的圆心角是 $60°$，所对的圆周角是 $30°$ 或 $150°$。
- **把不是圆周角的角当成圆周角。** 圆周角的顶点必须在圆上，而且两边都和圆相交。顶点在圆内或圆外的角，不能用圆周角定理。
- **弦的位置只考虑了一种。** 半径为 5 的圆里有两条平行弦，长分别为 6 和 8，它们的弦心距分别是 4 和 3。两条弦在圆心同侧时相距 $4 - 3 = 1$，在圆心两侧时相距 $4 + 3 = 7$，要分两种情况。

联系

- **轴对称与等腰三角形：** 连接两条半径就得到等腰三角形；垂径定理就是“三线合一”加上圆的轴对称。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 圆心角、弧、弦的关系来自旋转，垂径定理来自轴对称。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **勾股定理：** 半径、弦心距、弦的一半组成直角三角形，知二求一。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **三角形：** 圆周角定理的证明用的是三角形的外角等于不相邻的两个内角之和。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **四边形：** 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，说的就是直角顶点在以斜边为直径的圆上。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **与圆有关的位置关系：** 过三点作圆，圆心在弦的垂直平分线上，是垂径定理的另一种用法；过圆外一点作切线要用直径所对的圆周角是直角。见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **与圆有关的计算：** 弧的度数等于圆心角的度数，弧长、扇形面积都按圆心角占 $360°$ 的比例计算。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **辅助线从哪里来：** 连半径、作弦心距、连出直径所对的圆周角，是圆里最常用的辅助线。见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）。

真题： 2026 年第 13 题（第 358 页）、2025 年第 14 题（第 372 页）、2025 年第 19 题（第 375 页）、2024 年第 20 题（第 391 页）、2023 年第 6 题（第 397 页）。

与圆有关的位置关系 ★

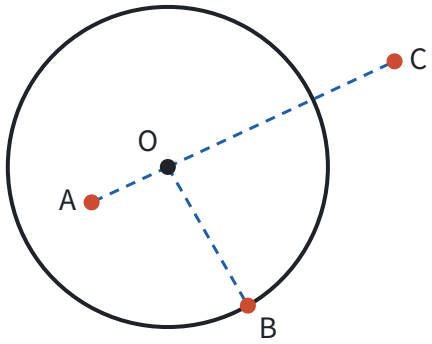
> 对应人教版九年级上册第三十章。

点、直线和圆的位置关系，都由“距离和半径谁大”决定：距离小于半径是在圆内或相交，等于半径是在圆上或相切，大于半径是在圆外或相离。 反过来，知道了位置关系，也就知道了距离和半径的大小关系。

点和圆：比较距离和半径

圆是到圆心的距离等于 r 的点组成的图形。所以一个点 P 和圆的位置关系，只要看 OP 和 r 谁大：

点 P 的位置	OP 和 r 的关系	图中的点
点在圆内	$OP < r$	A
点在圆上	$OP = r$	B
点在圆外	$OP > r$	C



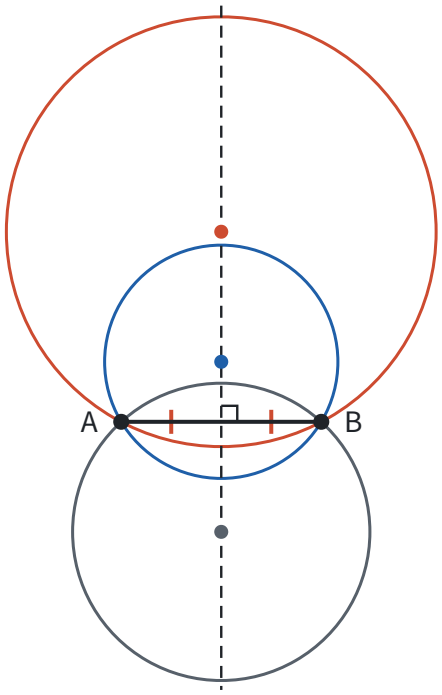
表里每一行从左往右读、从右往左读都成立：由位置可以得出数量关系，由数量关系也可以判断位置。

这和数轴上的绝对值是同一个想法。数轴上 $|x|$ 是点 x 到原点的距离，满足 $|x| < 3$ 的点在 -3 和 3 之间；平面上满足 $OP < r$ 的点在圆的内部。一个在直线上，一个在平面上，都是“到一个定点的距离和一个定长比大小”（见第二部分“有理数”（第 36 页））。

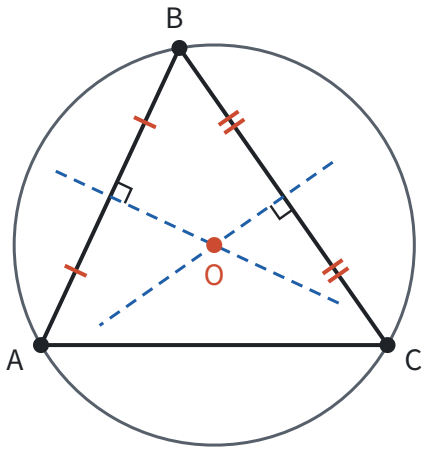
过三点作圆

经过一个点 A 能作多少个圆？以任意一点为圆心、以它到 A 的距离为半径，都行，有无数个。

经过两个点 A、B 呢？圆心到 A、B 的距离相等，所以圆心在线段 AB 的垂直平分线上。这条直线上任取一点都可以作圆心，仍然有无数个。



经过三个点 A、B、C，而且三点不在同一直线上：圆心既要在 AB 的垂直平分线上，又要在 BC 的垂直平分线上，只能是这两条直线的交点 O。两条直线只有一个交点，所以圆心只有一个，半径 OA 也只有一个。

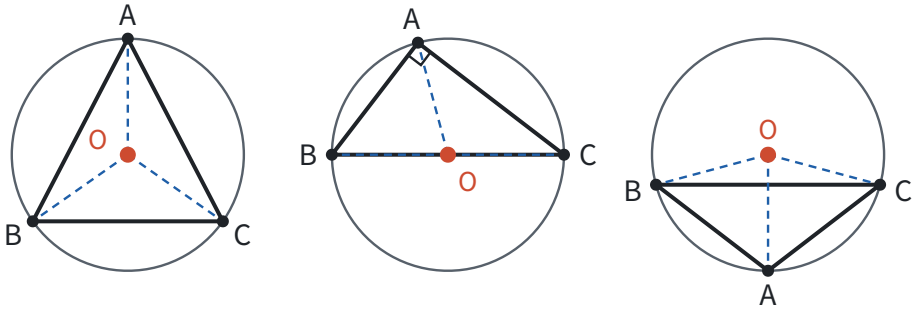


不在同一直线上的三个点确定一个圆。

两条垂直平分线为什么一定相交？如果它们平行，那么分别垂直于它们的 AB 和 BC 也互相平行，而 AB、BC 有公共点 B，只能在同一条直线上，和“三点不在同一直线上”矛盾。反过来也说明了：**经过同一直线上的三个点不能作圆**，因为这时两条垂直平分线平行，找不到圆心。这种先假设、再推出矛盾的证法是反证法（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

外接圆和外心。 经过三角形三个顶点的圆叫三角形的**外接圆**，外接圆的圆心叫三角形的**外心**。外心是三边垂直平分线的交点，到三个顶点的距离相等（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））。

外心不一定在三角形里面：



锐角三角形　　直角三角形　　钝角三角形

用圆周角定理可以说明原因。$\angle A$ 是弧 BC 所对的圆周角：

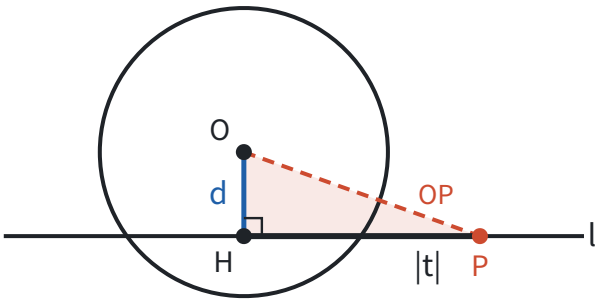
- $\angle A = 90°$ 时，BC 是直径，外心就是斜边 BC 的中点；
- $\angle A < 90°$ 时，弧 BC 小于半圆，圆心和 A 在 BC 的同侧；三个角都是锐角，圆心就在三条边的内侧，也就是三角形内部；
- $\angle A > 90°$ 时，弧 BC 大于半圆，圆心和 A 在 BC 的两侧，外心在三角形外部。

直线和圆：比较 d 和 r

直线和圆的公共点可能有 2 个、1 个或 0 个：

位置关系	公共点个数	名称
相交	2 个	直线叫圆的割线
相切	1 个	直线叫圆的切线，公共点叫切点
相离	0 个	—

公共点有几个，由圆心到直线的距离 d 决定。过 O 作直线 l 的垂线，垂足为 H，$d = OH$。把直线 l 看成一条数轴，原点取在 H，l 上的点 P 对应的数记作 t，那么 $HP = |t|$。



在直角三角形 OHP 中，由勾股定理，

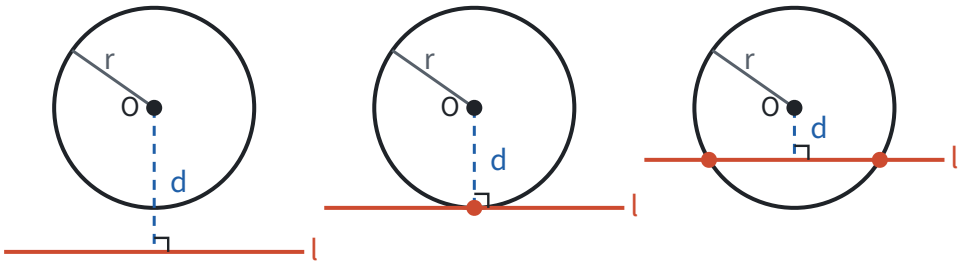
$$OP^2 = d^2 + t^2.$$

P 在圆上，就是 $OP = r$，也就是

$$t^2 = r^2 - d^2.$$

直线和圆有几个公共点，就看这个方程有几个解：

- $d<r$ 时，右边是正数，t 有两个值（互为相反数），直线上有两个点在圆上，**相交**；
- $d=r$ 时，右边是 0，只有 $t=0$，唯一的公共点就是垂足 H，**相切**；
- $d>r$ 时，右边是负数，方程无解，**相离**。

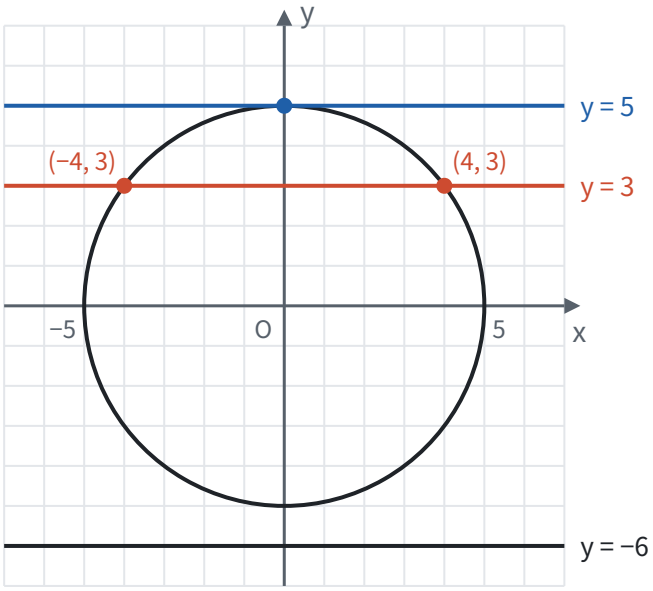


相离：d > r　　相切：d = r　　相交：d < r

位置关系	公共点个数	d 和 r 的关系
相交	2 个	$d<r$
相切	1 个	$d=r$
相离	0 个	$d>r$

拓展： 放到坐标系里看得更清楚。以原点为圆心、5 为半径作圆，点 (x, y) 到原点的距离是 $\sqrt{(x^2+y^2)}$，所以点在圆上就是 $x^2+y^2=25$。水平直线 $y=k$ 上的点在圆上，就是 $x^2=25-k^2$：

- $k=3$：$x^2=16$，$x=\pm 4$，有两个公共点 $(-4, 3)$ 和 $(4, 3)$；
- $k=5$：$x^2=0$，$x=0$，只有一个公共点 $(0, 5)$；
- $k=-6$：$x^2=-11$，无解，没有公共点。

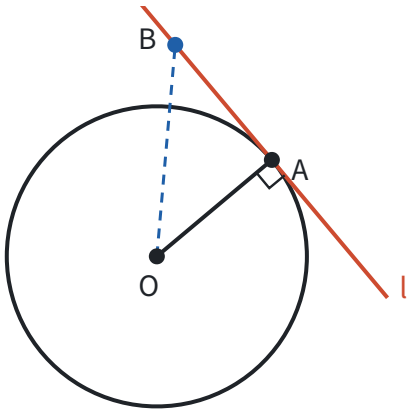


这里 $|k|$ 正是圆心到直线的距离 d。“求公共点”变成了“解方程”，“公共点有几个”变成了“方程有几个解”。一元二次方程根的个数由判别式决定，抛物线和 x 轴有几个交点也由判别式决定，想法完全一样（见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页））。

切线的判定和性质

直线 l 经过半径 OA 的外端 A，并且 $l\perp OA$。这时圆心到 l 的距离就是 OA，等于半径，所以 l 和圆相切：

切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。



从图上也能直接看出来：l 上除 A 以外的任何一点 B，OB 是 Rt$\triangle OAB$ 的斜边，$OB>OA=r$，所以 B 在圆外，l 和圆只有 A 一个公共点。

反过来，设 l 和 $\odot O$ 相切于点 A。过 O 作 $OH\perp l$，垂足为 H。由上一节，相切时 $d=r$，也就是 $OH=r$，所以 H 在圆上，是 l 和圆的公共点。相切时公共点只有一个，所以 H 就是切点 A，$OA\perp l$。也就是说，切点是直线上离圆心最近的点，OA 正是从 O 到 l 的垂线段（垂线段最短，见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页））：

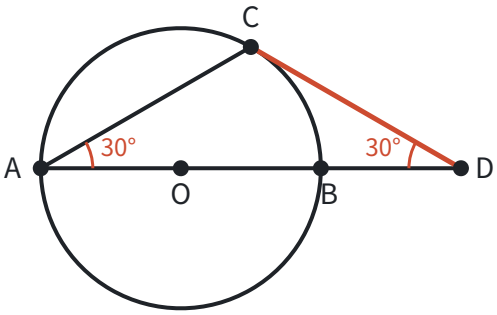
切线的性质定理：圆的切线垂直于经过切点的半径。

两个定理的条件和结论互换，是一对互逆的真命题（见第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页））。要证明一条直线是切线，按已知条件分两种思路：

已知条件	思路	要证明的
直线和圆有公共点	连接圆心和公共点，得到一条半径	这条半径和直线垂直
不知道直线和圆有没有公共点	过圆心作直线的垂线	垂线段的长等于半径

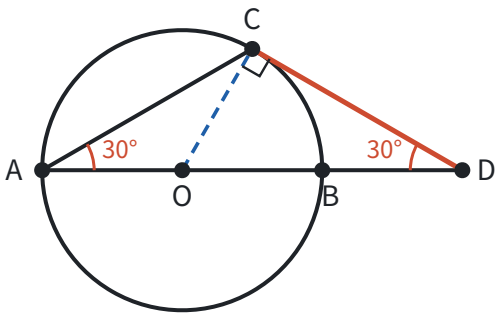
例 1 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上，点 D 在 AB 的延长线上，$\angle A=\angle D=30°$。

1. 求证：DC 是 $\odot O$ 的切线；
2. 若 $\odot O$ 的半径为 2，求 CD 的长。



思路： DC 和圆有公共点 C，所以连接 OC，证明 $OC\perp DC$，也就是 $\angle OCD=90°$。$\angle OCD$ 在 $\triangle OCD$ 里，已知 $\angle D=30°$，只差 $\angle COD$。$OA=OC$ 组成等腰三角形，$\angle COD$ 是它的外角，可以从 $\angle A$ 求出来。

证明： （1）连接 OC。



因为 $OA=OC$，所以 $\angle OCA=\angle A=30°$，于是

$$\angle COD=\angle A+\angle OCA=60°.$$

在 $\triangle OCD$ 中，$\angle OCD=180°-60°-30°=90°$，即 $OC\perp DC$。DC 经过半径 OC 的外端 C，并且垂直于 OC，所以 DC 是 $\odot O$ 的切线。

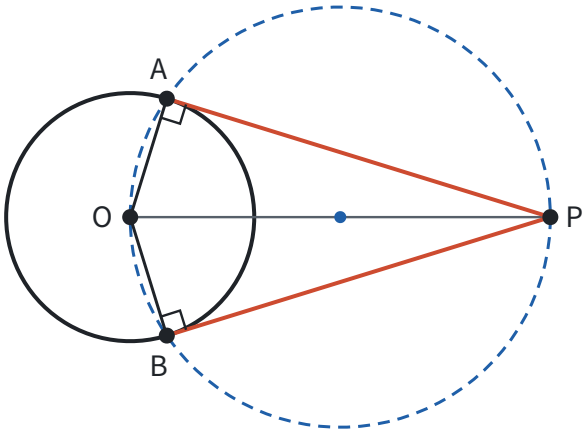
解： （2）在 Rt$\triangle OCD$ 中，$\angle D=30°$，$OC=2$，所以 $OD=2OC=4$（$30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半），

$$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

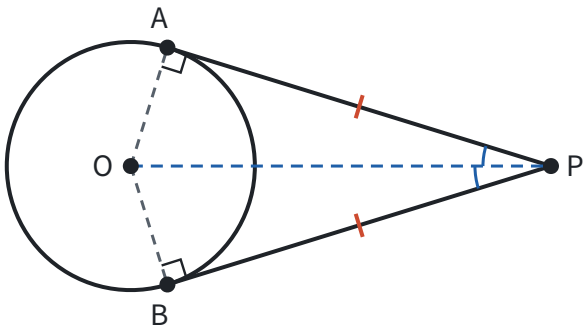
想一想： $\angle COD=60°$ 也可以用圆周角定理得到：$\angle A$ 是弧 BC 所对的圆周角，$\angle COD$ 就是弧 BC 所对的圆心角，所以 $\angle COD=2\angle A=60°$。两种算法本质相同，圆周角定理情况 ① 的证明，用的正是这个等腰三角形的外角：圆心在圆周角的一边上时，两条半径组成等腰三角形，圆心角是它的外角，等于两个相等的底角之和，也就是圆周角的 2 倍（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。

切线长定理

从圆外一点 P 能作几条切线？设切点为 A，由切线的性质，$\angle OAP=90°$。$\angle OAP$ 是直角，A 就在以 OP 为直径的圆上（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。以 OP 为直径的圆经过圆内的点 O 和圆外的点 P，和 $\odot O$ 交于两点，所以从圆外一点可以作圆的两条切线。



经过圆外一点的切线上，这一点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的**切线长**。切线是直线，不能量长度；切线长是一条线段的长。



连接 OA、OB、OP。由切线的性质，$OA \perp PA$，$OB \perp PB$；又 $OA = OB$，OP 是公共边，所以 Rt△OAP ≌ Rt△OBP（HL），得 $PA = PB$，$\angle APO = \angle BPO$。

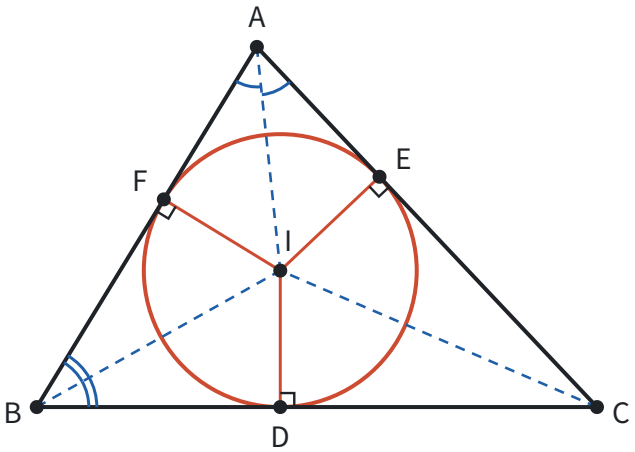
切线长定理：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

从对称的角度看更直接：整个图形关于直线 OP 对称，A 和 B 是一对对称点。

三角形的内切圆

和三角形三条边都相切的圆叫三角形的**内切圆**，内切圆的圆心叫三角形的**内心**。

内心在哪里？内切圆和三边都相切，圆心到三边的距离都等于半径。到 AB、AC 两边距离相等的点在 $\angle A$ 的平分线上，到 BA、BC 两边距离相等的点在 $\angle B$ 的平分线上（见第五部分“全等三角形”（第 136 页））。所以内心是三角形角平分线的交点，内切圆的半径就是内心到任意一边的距离。

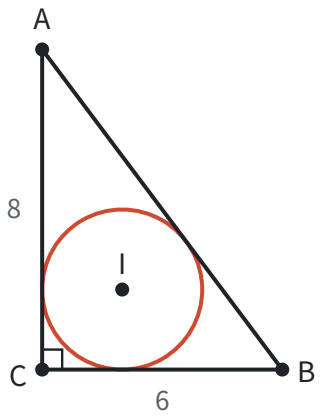


外心和内心放在一起比较：

比较	外心	内心
是哪个圆的圆心	外接圆（经过三个顶点）	内切圆（和三条边都相切）
怎样找到	三边垂直平分线的交点	三条角平分线的交点

比较	外心	内心
到什么的距离相等	到三个顶点，等于外接圆半径	到三条边，等于内切圆半径
位置	锐角三角形在内部，直角三角形在斜边中点，钝角三角形在外部	总在三角形内部
依据	线段垂直平分线的性质	角平分线的性质

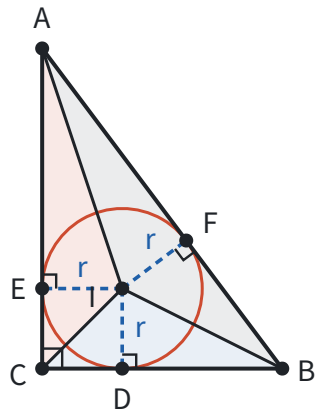
例 2　在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=6$，$AC=8$。求它的内切圆半径 r。



思路： 内切圆半径是内心到三边的距离，可以从两个角度去找它：一是面积，连接内心和三个顶点，把三角形分成三块，每块的高都是 r；二是切线长，从每个顶点引出的两条切线长相等，三条边被切点分成的六段两两相等。

先由勾股定理，$AB=\sqrt{(6^2+8^2)}=10$。设内切圆的圆心为 I，与 BC、AC、AB 分别相切于 D、E、F。

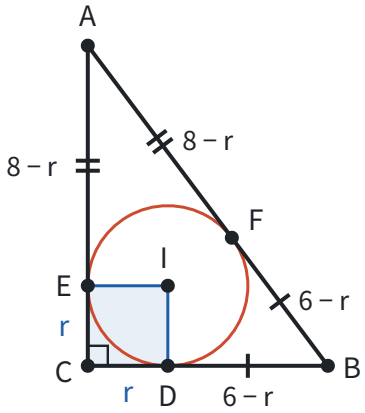
解法一：用面积。 连接 IA、IB、IC，把 $\triangle ABC$ 分成 $\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$，它们的高都是 r：



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r\cdot BC+\frac{1}{2}r\cdot CA+\frac{1}{2}r\cdot AB=\frac{1}{2}r(6+8+10)=12r.$$

又 $S_{\triangle ABC}=1/2\times 6\times 8=24$，所以 $12r=24$，$r=2$。

解法二：用切线长。 连接 ID、IE，则 $ID\perp BC$，$IE\perp AC$，又 $\angle C=90°$，所以四边形 $IDCE$ 是矩形；再加上 $ID=IE=r$，它是正方形，$CD=CE=r$。由切线长定理，从同一个顶点引的两条切线长相等：



$$BF = BD = 6 - r, \quad AF = AE = 8 - r.$$

而 $AF + BF = AB$，所以 $(8 - r) + (6 - r) = 10$，得 $r = 2$。

想一想： 两种解法都可以推广：

比较	解法一：面积	解法二：切线长
用到什么	内切圆半径是三个小三角形的高	从一个顶点引的两条切线长相等
推广到一般	任何三角形：r 等于面积的 2 倍除以周长	直角三角形：r 等于两直角边的和减去斜边，再除以 2

对直角三角形（直角边为 a、b，斜边为 c），解法一得到

$$r = \frac{ab}{a + b + c},$$

解法二得到

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

两个结果总是相等：交叉相乘，$(a + b - c)(a + b + c) = (a + b)^2 - c^2 = 2ab$，最后一步用了勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$。

易错点

- **判定切线只用了一个条件。** “经过半径的外端”和“垂直于这条半径”缺一不可：经过半径外端的直线不一定垂直于半径，垂直于半径的直线也不一定经过外端。
- **已知切线，却不连半径。** 要用“切线垂直于经过切点的半径”，先要把圆心和切点连起来，垂直关系才会出现在图上。
- **把切线长当成切线。** 切线是直线，切线长是圆外一点到切点的线段的长。
- **用“只有一个公共点”判断线段、射线和圆相切。** 相切的定义是对直线说的。一条线段和圆只有一个公共点，它所在的直线仍可能和圆相交，只是另一个交点落在线段外面。
- **外心、内心混淆。** 外心到三个顶点距离相等，是垂直平分线的交点；内心到三条边距离相等，是角平分线的交点。外心可能在三角形外部，内心一定在内部。
- **过三点作圆忘了“不在同一直线上”。** 同一直线上的三个点不能确定一个圆。
- **点和圆的位置不分情况。** 只说“点 P 到圆心的距离不大于半径”，点可能在圆内，也可能在圆上。

联系

- **有理数：** 点和圆的位置关系，是数轴上“绝对值和定长比大小”在平面上的推广。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **一元二次方程：** 直线和圆的公共点个数，就是方程 $t^2 = r^2 - d^2$ 的解的个数；和判别式决定根的个数是同一个想法。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **二次函数：** 抛物线和 x 轴有几个交点、直线和圆有几个公共点，都是“图形的交点个数就是方程的解的个数”。见第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **相交线与平行线：** 切线的性质来自“垂线段最短”。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **轴对称与等腰三角形：** 外心是三边垂直平分线的交点；切线长定理的图形关于 OP 对称。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **全等三角形：** 内心在角平分线上，依据是角平分线的性质；切线长定理用 HL 证明。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **圆的有关性质：** 外心的位置和过圆外一点作切线，都要用圆周角定理。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。
- **尺规作图：** 作三角形的外接圆就是作两边的垂直平分线，作内切圆就是作两个角的平分线。见第五部分“尺规作图”（第 169 页）。
- **与圆有关的计算：** 正多边形的外接圆和内切圆是同心圆，半径分别是正多边形的半径和边心距。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **分类讨论：** 点和圆、直线和圆的位置各有三种情况，题目没说清是哪一种时要分别讨论。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2026 年第 10 题（第 357 页）、2025 年第 14 题（第 372 页）、2024 年第 15 题（第 386 页）、2023 年第 14 题（第 400 页）、2022 年第 22 题（第 418 页）。

与圆有关的计算 ★

> 对应人教版九年级上册 29.3 节、30.3 节。

弧长和扇形面积，都是把整圆的周长和面积按圆心角占 360° 的比例取出一部分；圆锥的侧面展开是一个扇形，侧面积就是这个扇形的面积。 整圆的周长和面积本身，则是用圆内接正多边形一步步逼近得到的。

正多边形与圆

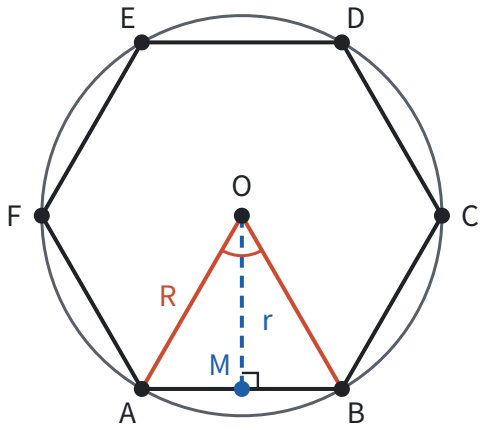
各边相等、各角也相等的多边形叫正多边形。 两个条件缺一不可：菱形各边相等，但各角不一定相等；矩形各角相等，但各边不一定相等。

正多边形可以从圆里得到。**把圆 n 等分（$n \geqslant 3$），依次连接各分点，就得到圆的内接正 n 边形。** 理由是：

- 各段弧相等，在同一个圆中等弧所对的弦相等，所以各边相等；
- 每个内角都是圆周角，所对的弧都由 $n-2$ 段相等的小弧组成，同弧或等弧所对的圆周角相等，所以各角相等（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。

反过来，任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，两个圆是同心圆。围绕这个共同的圆心，有下面几个名称：

名称	意思
中心	外接圆的圆心
半径 R	外接圆的半径，即中心到顶点的距离
中心角	每条边所对的外接圆的圆心角，正 n 边形的中心角是 $360°/n$
边心距 r	中心到一边的距离，也就是内切圆的半径



所有计算都集中在一个直角三角形里。作边心距 $OM\perp AB$，由垂径定理，M 是 AB 的中点，OM 平分中心角。在 Rt$\triangle OAM$ 中，斜边是半径 R，一条直角边是边心距 r，另一条直角边是边长 a 的一半，$\angle AOM$ 是中心角的一半：

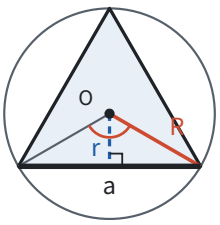
$$\angle AOM=\frac{180^\circ}{n},\qquad \frac{a}{2}=R\sin\frac{180^\circ}{n},\qquad r=R\cos\frac{180^\circ}{n},\qquad R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

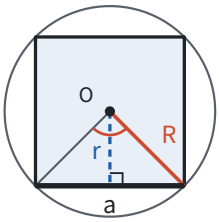
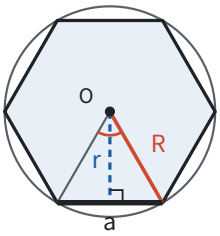
连接中心和各顶点，正 n 边形被分成 n 个全等的等腰三角形，底是边长 a，高是边心距 r，所以

$$S=n\times\frac{1}{2}ar=\frac{1}{2}Cr,$$

其中 $C=na$ 是正多边形的周长。

最常用的三种正多边形，用半径 R 表示：

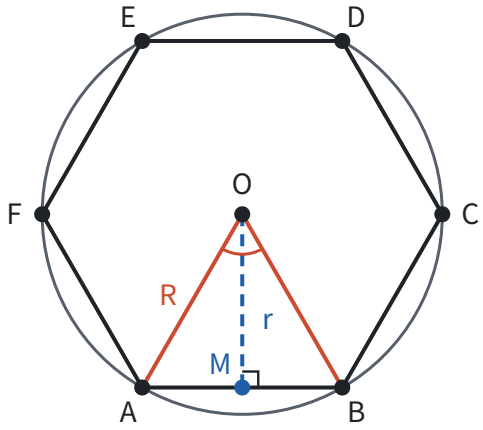
正多边形	图	中心角	边长 a	边心距 r	面积 S
正三角形		$120°$	$(\sqrt{}3)R$	$R/2$	$3(\sqrt{}3)R^2/4$

正多边形	图	中心角	边长 a	边心距 r	面积 S
正方形		$90°$	$(\sqrt{2})R$	$(\sqrt{2})R/2$	$2R^2$
正六边形		$60°$	R	$(\sqrt{3})R/2$	$3(\sqrt{3})R^2/2$

正六边形最特别：中心角是 $60°$，$OA=OB$，所以 $\triangle OAB$ 是等边三角形，**正六边形的边长等于半径**。用圆规在圆上以半径为距离依次截取，正好截 6 次回到起点，就把圆 6 等分了（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。

例 1　一个正六边形的边心距是 $2\sqrt{3}$ cm，求它的边长、周长和面积。

还是前面那张正六边形的图：中心 O，半径 OA，边心距 $OM\perp AB$，M 是 AB 的中点。



思路： 已知边心距，在 Rt$\triangle OAM$ 中，$\angle AOM=30°$，由边心距可以求出半边长；也可以直接用“正六边形的边长等于半径”和勾股定理。

解： 在 Rt$\triangle OAM$ 中，$\angle AOM=1/2\times 60°=30°$，$OM=2\sqrt{3}$，所以

$$AM=OM\cdot\tan 30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2.$$

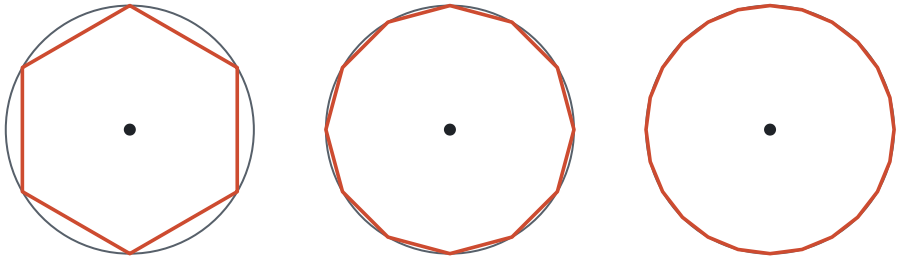
边长 $a=2AM=4$ cm，周长 $C=6a=24$ cm，面积

$$S=\frac{1}{2}Cr=\frac{1}{2}\times 24\times 2\sqrt{3}=24\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2).$$

检验： 正六边形的边长等于半径，$R=4$，由勾股定理，边心距 $r=\sqrt{(4^2-2^2)}=2\sqrt{3}$，和已知一致。

圆周率 π

圆的周长和直径的比，对所有的圆都一样吗？任意两个圆，一个都可以看成另一个按比例放大或缩小得到的；在两个圆里各作内接正 n 边形，这两个正多边形相似，相似比就是两个圆的半径之比，所以它们的“周长 ÷ 直径”相等（见第八部分“相似”（第 230 页））。边数越多，正多边形越贴近圆，所以**圆的周长和直径的比是一个常数**，这个常数叫圆周率，记作 π。



正 6 边形　　正 12 边形　　正 24 边形

拓展： 怎样算出 π？三国时期的刘徽用的就是上图的办法，叫**割圆术**：从圆内接正六边形开始，边数一次次加倍，用正多边形的周长逼近圆的周长。直径为 d 时，正 n 边形的周长除以直径等于 $n\sin 180°/n$：

边数	6	12	24	48	96
周长 ÷ 直径	3	3.1058	3.1326	3.1394	3.1410

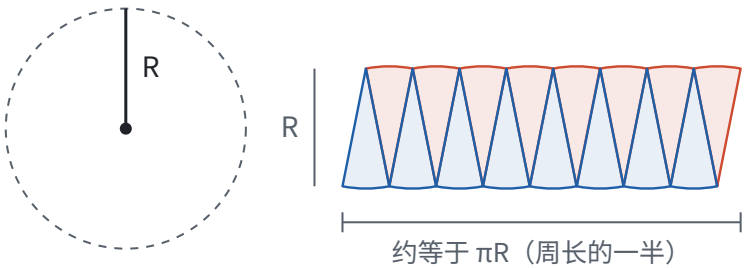
正六边形的边长等于半径，周长是 $6R=3d$，所以 $\pi>3$。边数越多，比值越大，越来越接近 π。南北朝的祖冲之算出 $3.1415926<\pi<3.1415927$。后来人们证明了 π 是无理数（见第二部分“实数”（第 47 页）），计算时通常取近似值 3.14，或者在结果里保留 π。

于是，半径为 R 的圆，周长 $C=2\pi R$。

圆的面积。 正 n 边形的面积是 $(1/2)Cr$。边数越来越多时，周长越来越接近圆的周长 $2\pi R$，边心距越来越接近半径 R，所以圆的面积是

$$S=\frac{1}{2}\times 2\pi R\times R=\pi R^2.$$

同样的道理也可以用剪拼来看：把圆平均分成很多个小扇形，一正一反拼起来，接近一个平行四边形，底是周长的一半 πR，高是 R。



两种说法都是 $S=1/2\times$ 周长 $\times$ 半径，和三角形面积 $1/2\times$ 底 $\times$ 高 是一个样子：圆可以看成很多个以圆心为顶点、高为 R 的细长三角形拼成的。

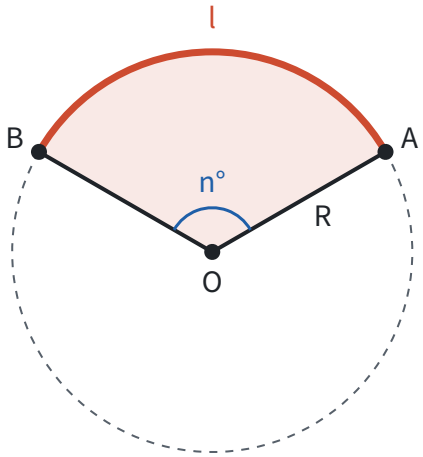
弧长和扇形面积

整圆的圆心角是 360°。1° 的圆心角所对的弧长是整个周长的 1/360，$n°$ 的圆心角所对的弧长就是周长的 $n/360$：

$$l = \frac{n}{360} \times 2\pi R = \frac{n\pi R}{180}.$$

由两条半径和它们所夹的弧围成的图形叫**扇形**。圆心角为 $n°$ 的扇形，面积是整个圆面积的 $n/360$：

$$S_{扇形} = \frac{n}{360} \times \pi R^2 = \frac{n\pi R^2}{360}.$$



把两个公式放在一起看：$n\pi R^2/360 = 1/2 \times n\pi R/180 \times R$，所以

$$S_{扇形} = \frac{1}{2}lR.$$

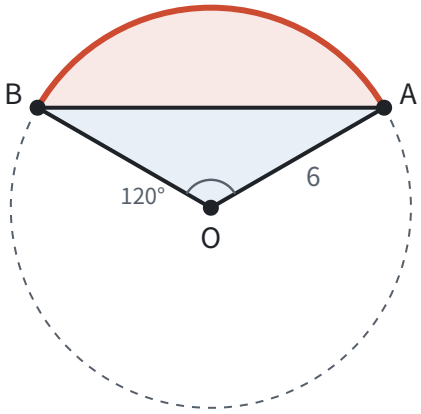
这又是“1/2 × 底 × 高”：把弧长 l 看成底，半径 R 看成高，扇形就像一个“曲边三角形”。整圆也符合这个式子，$1/2 \times 2\pi R \times R = \pi R^2$。

整圆	圆心角为 $n°$ 的部分	两者的比
周长 $2\pi R$	弧长 $n\pi R/180$	$n/360$
面积 πR^2	扇形面积 $n\pi R^2/360$，或 $(1/2)lR$	$n/360$

扇形统计图里，每个扇形的圆心角等于这一部分所占的百分比乘 360°，用的是同一个比例（见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页））。

例 2　如图，扇形 OAB 的半径为 6，圆心角 $\angle AOB = 120°$。

1. 求弧 AB 的长和扇形 OAB 的面积；
2. 求弦 AB 和弧 AB 围成的图形（图中红色部分）的面积。



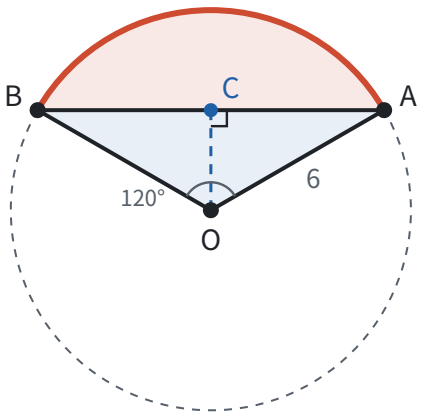
思路： 第 1 问直接代公式。第 2 问的图形叫弓形，它不是扇形，也不是三角形，但它是扇形 OAB 去掉 $\triangle OAB$ 剩下的部分，用“割补”转化成会算的图形。$\triangle OAB$ 是等腰三角形，作 $OC\perp AB$，底和高都能从 Rt$\triangle OAC$ 求出来。

解： （1）弧 AB 的长 $l=(120\times\pi\times6)/180=4\pi$，扇形面积

$$S_{\text{扇形}}=\frac{120\times\pi\times6^2}{360}=12\pi.$$

也可以用 $S_{\text{扇形}}=(1/2)lR=1/2\times4\pi\times6=12\pi$ 检验。

（2）作 $OC\perp AB$，垂足为 C。$OA=OB$，由“三线合一”，OC 平分 $\angle AOB$，$\angle AOC=60°$，C 是 AB 的中点。



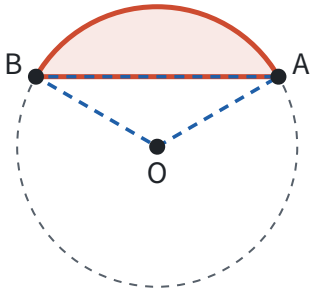
在 Rt$\triangle OAC$ 中，

$$OC=OA\cdot\cos60°=3,\qquad AC=OA\cdot\sin60°=3\sqrt{3},$$

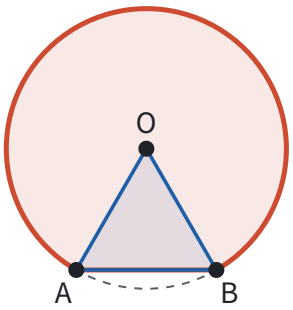
所以 $AB=2AC=6\sqrt{3}$，$S_{\triangle OAB}=1/2\times6\sqrt{3}\times3=9\sqrt{3}$。弓形的面积是

$$S_{\text{扇形}}-S_{\triangle OAB}=12\pi-9\sqrt{3}.$$

回顾： 弓形所对的圆心角小于 180° 时，弓形面积是扇形面积减去三角形面积；圆心角大于 180° 时，弓形包含圆心，面积是扇形面积加上三角形面积：



弓形 = 扇形 − 三角形



弓形 = 扇形 + 三角形

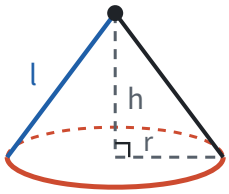
先看清图形由哪些会算的图形拼成或割成，再算。

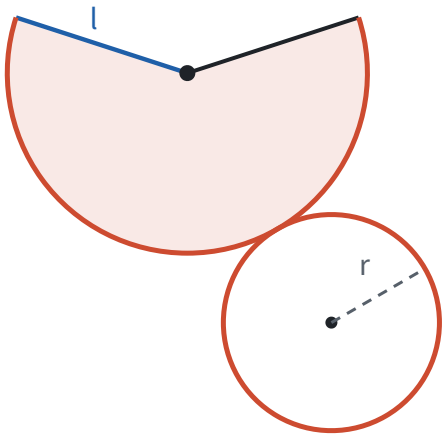
圆锥的侧面积和全面积

圆锥由一个底面和一个侧面围成。连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫圆锥的**母线**，长记作 l；底面半径记作 r，高记作 h。高、底面半径、母线组成直角三角形，所以

$$l^2 = h^2 + r^2.$$

把圆锥的侧面沿一条母线剪开、展平，得到一个扇形（见第五部分“几何图形初步”（第 113 页））：





展开前后有两个对应：

- 扇形的**半径**是圆锥的**母线** l；
- 扇形的**弧长**是圆锥**底面圆的周长** $2\pi r$。

由 $S_{\text{扇形}} = (1/2)lR$，这里弧长是 $2\pi r$，半径是 l，所以

$$\text{圆锥的侧面积} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi r l,$$

$$\text{圆锥的全面积} = \pi r l + \pi r^2.$$

展开图的圆心角 n° 也能求：由弧长 $n\pi l/180 = 2\pi r$，得 $n = 360r/l$。也就是说，扇形占整个圆的比例 $n/360$，正好等于 r/l。

例 3 一个圆锥的底面半径是 3 cm，高是 4 cm。求它的侧面积、全面积，以及侧面展开图的圆心角。

思路： 侧面积要用母线，不是高，所以先用勾股定理求母线。

解： 母线 $l=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$ cm。

侧面积 $\pi rl=\pi\times3\times5=15\pi$（$\text{cm}^2$），全面积 $15\pi+\pi\times3^2=24\pi$（cm^2）。

展开图的圆心角 $n=(360\times3)/5=216$，即 $216°$。

例 4 用一张半径为 12 cm、圆心角为 $120°$ 的扇形纸片，围成一个圆锥的侧面（接缝不计）。求这个圆锥的底面半径和高。

思路： 这次反过来，从展开图还原圆锥，用的仍然是那两个对应：扇形的半径 12 cm 是母线，扇形的弧长是底面周长。

解： 扇形的弧长 $(120\times\pi\times12)/180=8\pi$，它等于底面周长，所以 $2\pi r=8\pi$，$r=4$ cm。母线 $l=12$ cm，所以高

$$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\ (\text{cm}).$$

检验： 由 $n/360=r/l$，$120/360=4/12$，两边都是 $1/3$。

易错点

- **弧长公式里的 R 用错。** R 是弧所在圆的半径。圆锥展开图里，扇形的半径是母线 l，不是底面半径 r。
- **侧面积用了高。** 圆锥的侧面积是 πrl，l 是母线。只知道高时，先用 $l^2=h^2+r^2$ 求母线。
- **全面积忘了加底面。** 全面积是侧面积加上底面积。
- **把弧的度数和弧长混为一谈。** 弧的度数只由圆心角决定；弧长还和半径有关。度数相同的两条弧，半径大的更长。
- **弓形面积一律用“扇形减三角形”。** 圆心角大于 $180°$ 时，要用扇形面积加三角形面积。
- **正多边形的半径和边心距搞混。** 半径是中心到顶点的距离，边心距是中心到边的距离，边心距更短。
- **题目要求保留 π，却代入了 3.14。** 没有特别说明时，结果里保留 π 更精确。

联系

- **圆的有关性质：** 弧的度数等于圆心角的度数，弧长和扇形面积才能按圆心角的比例计算；正多边形各边、各角相等，依据是等弧对等弦、同弧所对的圆周角相等。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。
- **与圆有关的位置关系：** 正多边形的外接圆和内切圆是同心圆，半径和边心距分别是这两个圆的半径。见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **相似：** 所有的圆都相似，所以周长和直径的比是常数 π。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **锐角三角函数：** 正多边形的边长、边心距和割圆术的计算，都在中心角一半所在的直角三角形里完成。见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）。
- **勾股定理：** 正多边形中 $R^2=r^2+(a/2)^2$，圆锥中 $l^2=h^2+r^2$。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **实数：** π 是无理数，结果可以保留 π；要得到具体数值时，才用 3.14 这样的近似值去算。见第二部分“实数”（第 47 页）。
- **几何图形初步：** 圆锥的展开图是一个扇形和一个圆，圆柱的展开图是一个长方形和两个圆。见第五部分“几

何图形初步”（第 113 页）。

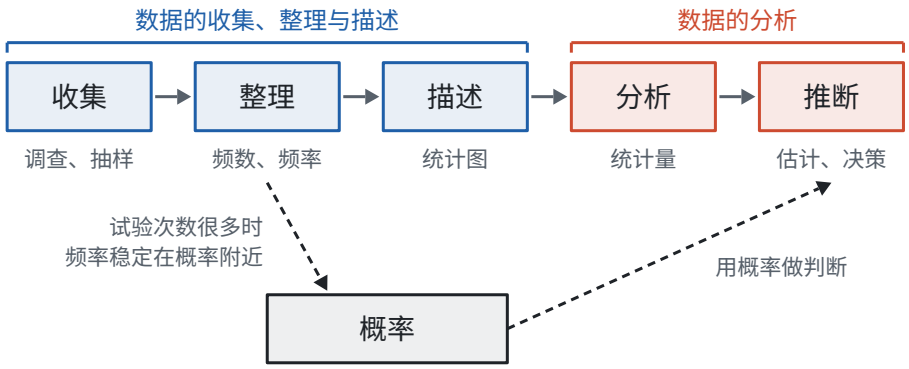
- **投影与视图：** 圆锥的主视图是一个等腰三角形，腰是母线，底是底面直径，高是圆锥的高。见第八部分“投影与视图”（第 248 页）。
- **数据的收集、整理与描述：** 扇形统计图的圆心角和这里的扇形一样，按所占的比例乘 360°。见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）。

真题： 2026 年第 10 题（第 357 页）、2025 年第 2 题（第 368 页）、2025 年第 14 题（第 372 页）、2024 年第 9 题（第 384 页）、2022 年第 14 题（第 413 页）。

总览：从数据到决策

这一部分的主线是：从一部分数据出发，经过收集、整理、描述、分析，对全体作出估计和判断；概率则给“不确定”配上一个数，它和统计通过“频率”连在一起。

一条流程



步骤	做什么	用到的工具	页面
收集	确定调查谁、调查多少	全面调查、抽样调查；总体、个体、样本、样本容量	数据的收集、整理与描述
整理	把杂乱的数据数清楚	划记、频数、频率；分组、频数分布表	数据的收集、整理与描述
描述	让数据一眼看懂	条形图、扇形图、折线图、直方图	数据的收集、整理与描述
分析	用几个数概括一组数据	平均数、中位数、众数；极差、方差；四分位数和箱线图	数据的分析
推断	从样本说到总体，作出决策	用样本的频率、平均数、方差估计总体	数据的分析

统计图用在哪里

统计图	回答的问题	例子
条形图	各类各有多少	最喜欢各项运动的人数
扇形图	各部分占整体的百分之几	各项运动所占的百分比
折线图	随时间怎样变化	一天中气温的变化
频数分布直方图	数值型数据落在各个范围里的有多少	跳绳次数在各个范围里的人数
箱线图	数据的中间一半在哪里，几组数据怎样比较	两个班测验成绩的比较

统计量用在哪里

刻画什么	统计量	看的是	特点
集中趋势（一般水平）	平均数	全部数据的大小	用到每个数据，受极端值影响
	中位数	排序后中间的位置	不受极端值影响
	众数	出现的次数	反映最常见的取值
离散程度（稳定性）	极差	最大值和最小值	简单，只用了两个数
	方差、标准差	每个数据离平均数多远	用到每个数据，越小越稳定
	四分位数	中间一半数据的范围	不受极端值影响，适合画箱线图比较

统计和概率的关系

统计从**数据**出发：做了调查、做了试验，得到频率、平均数，再去估计总体。概率从**可能性**出发：还没做试验，就能根据等可能的结果算出事件发生的机会有多大。

两者在“频率”这里接上：试验次数越多，事件发生的频率越稳定在它的概率附近。所以结果等可能时，可以直接算概率；结果不等可能时（比如种子发芽、树苗成活），就用大量试验的频率来估计概率。这和用样本估计总体是同一个想法：**用看得见的一部分，推断看不见的全体。**

学习顺序

按页面顺序学：

1. **数据的收集、整理与描述：** 先学会抽样的道理，会算频率、读懂和画出四种统计图（见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页））；
2. **数据的分析：** 重点是平均数（含加权平均数）、中位数、众数和方差，会根据问题选择合适的统计量，会读箱线图（见第十部分“数据的分析”（第 294 页））；
3. **概率：** 重点是用列表法和树状图列出所有等可能的结果，以及用频率估计概率（见第十部分“概率”（第 302 页））。

这一部分用到的计算不难，难在**选对工具、说清理由**：为什么这次调查要随机抽样，为什么这组数据用中位数比平均数好，为什么这几种结果是等可能的。每一个答案都要能从定义讲出道理。

数据的收集、整理与描述

> 对应人教版七年级下册第十二章。

统计先要回答三个问题：数据从哪里来（调查谁、调查多少），怎样把一堆原始数据理清楚（频数和频率），怎样让别人一眼看懂（统计图）。

从哪里来

学校想知道全校 1200 名同学最喜欢哪项运动，好决定多开哪种体育社团。最直接的办法是挨个问，可是 1200 份问卷要发、要收、要统计，花的工夫很大。能不能只问一部分人，就大致知道全校的情况？问哪些人才算数？问回来的答案又怎样整理、怎样展示？

这一页按做统计的先后顺序，把这几件事一件一件讲清楚：**收集**（调查谁）→ **整理**（数一数，算比例）→ **描述**（画成图）。后面的“分析”和“推断”见第十部分“数据的分析”（第 294 页）。

收集：全面调查和抽样调查

全面调查是对所有对象都做调查，比如人口普查、全班同学的体检。**抽样调查**是只抽取一部分对象做调查，再用这一部分的情况去估计全体的情况。

描述抽样调查，要分清四个词：

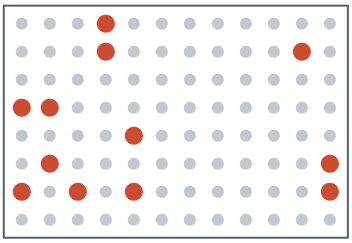
名称	意思	在“1200 名同学最喜欢的运动”里
总体	要考察的全体对象	1200 名同学最喜欢的运动
个体	组成总体的每一个考察对象	每名同学最喜欢的运动
样本	从总体中抽取的那一部分个体	被抽到的 40 名同学最喜欢的运动
样本容量	样本中个体的数目	40

注意“考察对象”指的是我们关心的那个**数据**，不是人本身。调查睡眠时间，总体就是“所有同学的睡眠时间”；调查身高，总体就是“所有同学的身高”。同一群人，关心的数据不同，总体也就不同。

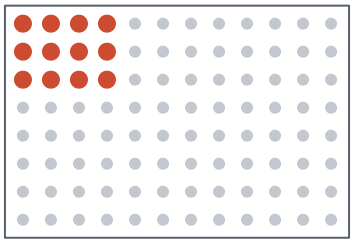
什么时候用哪一种？

适合	情况	原因
全面调查	对象少、容易调查，比如全班同学的视力	工作量不大，结果准确
	要求绝对准确、事关安全，比如乘飞机前的安检、航天器零件的检查	漏掉一个都不行
抽样调查	对象很多，比如全省初中生的睡眠时间	全面调查费时费力
	调查有破坏性，比如灯泡的使用寿命、一批烟花的燃放效果	全部检查完，产品也就全毁了

样本要有代表性。 抽样调查的结果能不能代表总体，关键看样本是怎样抽的。下图左边的样本在总体中**随机**抽取，每个个体被抽到的机会相同，抽到的个体分散在各处；右边只抽了一个角落，如果这个角落恰好都是同一个年级、同一个班的同学，结果就会偏向这一小群人：



随机抽取：分散在各处



只抽一个角落

所以抽样要做到两点：一是**随机**，不挑不选，每个个体被抽到的机会相同；二是样本容量**不能太小**，只问 3 个人，偶然性太大。

整理：频数和频率

问回来的是 40 个杂乱的答案。先数一数每一类各有多少个：用“正”字划记，一笔代表一个。

运动	划记	频数	频率
篮球	正正丅	12	0.3
乒乓球	正正	10	0.25
足球	正下	8	0.2
跳绳	正一	6	0.15
其他	止	4	0.1
合计		40	1

- **频数：** 每一类出现的次数。所有频数加起来等于数据的总个数。
- **频率：** 频数与数据总数的比，即

$$\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}.$$

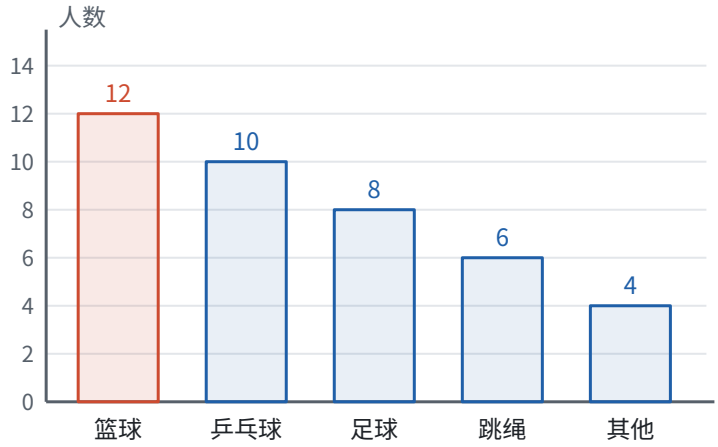
频率就是“这一类占全体的几分之几”，是一个比例，所以**所有频率加起来等于 1**。频率也常写成百分数：篮球的频率 0.3，就是 30%。

为什么除了频数还要算频率？频数只说明“有多少个”，频率说明“占多大比例”。两个样本容量不同的调查，比频数没有意义，比频率才公平。后面用样本估计总体、用频率估计概率，用的都是频率。

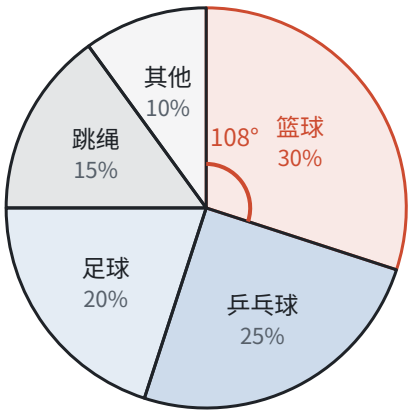
描述：把数据画成图

同一组数据可以画成不同的统计图，每种图擅长说明的事不同。

条形图：各类有多少。 每一类画一个长条，长条的高度就是频数。哪一类最多、各类相差多少，一眼就能比出来：



扇形图：各部分占整体的百分比。 用整个圆代表全体，每一类用一个扇形表示，扇形的大小表示这一类占的百分比：

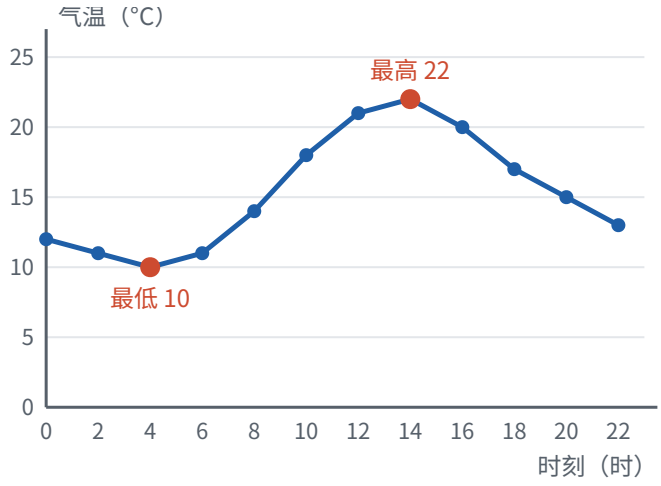


扇形的大小怎样确定？整个圆的圆心角是 $360°$，代表全体（100%）。某一类占全体的百分之几，它的扇形就占整个圆的百分之几，圆心角也就是 $360°$ 的百分之几：

$$\text{扇形的圆心角} = 360^\circ \times \text{这一类所占的百分比}.$$

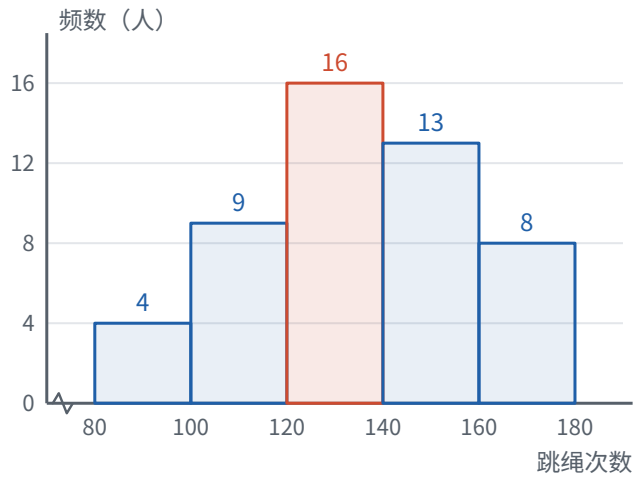
篮球占 30%，圆心角是 $360° \times 30\% = 108°$；其他占 10%，圆心角是 $36°$。所有扇形的圆心角加起来正好是 $360°$，因为所有百分比加起来是 100%。

折线图：随时间怎样变化。 横轴是时间，把每个时刻的数据描成点，再依次连成折线。折线上升表示增加，下降表示减少，越陡变化越快。用折线图表示数据随时间变化的趋势，这样的图也叫趋势图：



从图上能读出：这一天 4 时气温最低，14 时最高；4 时到 14 时气温上升，其中 8 时到 10 时上升得最快（折线最陡，2 小时升高 4 °C）。

频数分布直方图：数值型数据落在各个范围的有多少。 跳绳次数、身高、成绩这样的数据，几乎每个人都不一样，直接一个一个数没有意义。要先把数据按大小**分组**，再数每一组有多少个，画成直方图（画法见下一节）：



直方图和条形图看上去很像，区别在横轴：条形图的横轴是一个个**类别**（篮球、足球……），类别之间没有先后，所以长条之间留空；直方图的横轴是**数轴**，各组是一段一段首尾相接的区间，所以长方形紧挨在一起，中间没有缝。

四种统计图对照：

统计图	擅长说明	从图上读什么
条形图	各类的具体数量	长条的高度
扇形图	各部分占整体的百分比	扇形的圆心角或百分比
折线图	数据随时间的变化趋势	折线的升降和陡缓
频数分布直方图	数值型数据在各个范围内的分布	各组长方形的高度，哪一组最多，数据集中在哪里

画直方图：先分组再数

50 名同学 1 分钟跳绳的次数，最少 83 次，最多 176 次。画直方图分四步：

1. **算最大值与最小值的差：** $176 - 83 = 93$，说明数据分布在 93 次的范围里。
2. **定组距和组数：** 组距是每一组的宽度。取组距为 20，$93 \div 20 = 4.65$，要分 5 组才能把所有数据装下。为了好看好算，从 80 开始分：$80 \leqslant x < 100$，$100 \leqslant x < 120$，……，$160 \leqslant x < 180$。
3. **列频数分布表：** 数一数每组有多少个数据。

次数 x	$80 \leqslant x < 100$	$100 \leqslant x < 120$	$120 \leqslant x < 140$	$140 \leqslant x < 160$	$160 \leqslant x < 180$
频数	4	9	16	13	8
频率	0.08	0.18	0.32	0.26	0.16

4. **画直方图：** 横轴标出各组的端点，每组画一个长方形，高度等于这一组的频数。

每组都写成“$a \leqslant x < b$”：左端点算在这一组里，右端点算在下一组里。这样每个数据**恰好落在一组**，不会被数两次，也不会漏掉。比如 120 次算在“$120 \leqslant x < 140$”这一组，不算在前一组。

组数不宜太多也不宜太少：组太少，所有数据挤在一两组里，看不出分布；组太多，每组只有一两个数据，又回到了一个一个看。数据在 100 个以内时，一般分 5～12 组。

例题

例 1　为了解某校 1200 名学生每天的睡眠时间，从中随机抽取 100 名学生进行调查。

（1）这次调查的总体、个体、样本、样本容量各是什么？

（2）如果只抽取九年级的 100 名学生，这样的样本合适吗？

思路： 先找出“考察对象”：这次关心的是睡眠时间，所以总体、个体、样本都要落在“睡眠时间”上，而不是“学生”上。

解：（1）总体是这 1200 名学生每天的睡眠时间；个体是每名学生每天的睡眠时间；样本是抽取的 100 名学生每天的睡眠时间；样本容量是 100。

（2）不合适。九年级学生学习任务重，学习时间往往更长，睡眠时间和七、八年级不同。只抽九年级，样本不能代表全校，得到的平均睡眠时间会偏少。应该在全校学生中随机抽取。

例 2　随机抽取部分学生调查最喜欢的运动，画条形图和扇形图时只记下了部分数据：最喜欢篮球的有 12 人，在扇形图中占 30%；“足球”对应扇形的圆心角是 $72°$。

（1）一共调查了多少名学生？最喜欢足球的有多少人？

（2）全校有 1200 名学生，估计最喜欢篮球的有多少人？

思路： 条形图给数量，扇形图给比例，两张图要靠“数量 = 总数 × 百分比”连起来。已知篮球的数量和百分比，就能求出总数；有了总数，别的类只要知道百分比或圆心角，就能求出数量。

解：（1）调查的总人数是 $12 \div 30\% = 40$（人）。

足球的圆心角是 $72°$，占全体的 $72° \div 360° = 20\%$，所以最喜欢足球的有 $40 \times 20\% = 8$（人）。

（2）样本中最喜欢篮球的占 30%，用样本估计总体，全校最喜欢篮球的约有 $1200 \times 30\% = 360$（人）。

回顾： 第（2）问用的是样本的**频率**，不是样本的频数。样本里 12 人喜欢篮球，不能说全校也是 12 人；能搬到总体上的，是“占 30%”这个比例。

例 3　前面画直方图时，50 名同学 1 分钟跳绳次数的频数分布表是：

次数 x	$80 \leqslant x < 100$	$100 \leqslant x < 120$	$120 \leqslant x < 140$	$140 \leqslant x < 160$	$160 \leqslant x < 180$
频数	4	9	16	13	8
频率	0.08	0.18	0.32	0.26	0.16

根据这张表回答：

（1）哪一组的人数最多？

（2）1 分钟跳绳 140 次及以上为优秀。全校有 800 名学生，估计有多少人达到优秀？

思路： “140 次及以上”包括最后两组：$140 \leqslant x < 160$ 和 $160 \leqslant x < 180$。先算这两组在样本中的频率，再乘全校人数。

解： （1）$120 \leqslant x < 140$ 这一组人数最多，有 16 人。

（2）样本中达到优秀的有 $13 + 8 = 21$（人），频率是 $21 \div 50 = 0.42$。估计全校达到优秀的约有 $800 \times 0.42 = 336$（人）。

想一想： 这个“336 人”是准确的吗？不是。换一批 50 人来抽，频率可能是 0.40，也可能是 0.44。用样本估计总体，得到的是**估计值**，所以答案要写“约有”。样本越大、抽得越随机，估计值通常越接近真实值。

易错点

- **把样本说成“学生”。** 例 1 的样本是“100 名学生每天的睡眠时间”，不是“100 名学生”。统计考察的是数据。
- **样本容量带单位。** 样本容量是个数，写“100”，不写“100 名”。
- **样本没有代表性。** 在网上调查“大家每天上网多长时间”、只在篮球场调查“最喜欢的运动”，样本都偏向了一部分人，结论不能推到全体。
- **用扇形图比较两个群体的数量。** 甲班扇形图里篮球占 30%，乙班占 40%，不能说乙班喜欢篮球的人多：扇形图只反映比例，两个班人数不同，数量要用“总数 × 百分比”算出来再比。
- **分组时端点重复或遗漏。** 写成“$80 \backsim 100$，$100 \backsim 120$”，100 就不知道算哪一组。每组要写清楚是否包含端点。
- **把直方图当成条形图画。** 直方图的长方形之间不留空，横轴标的是各组的端点，不是类别名称。
- **频率之和不等于 1。** 百分数算完后加一加，不是 100% 就说明有一类算错了；扇形的圆心角加起来也要正好 $360°$。

联系

- **数据的分析：** 数据整理好以后，要用平均数、中位数、方差等数来刻画它；直方图的分组数据也能估计平均数。见第十部分“数据的分析”（第 294 页）。
- **概率：** 频率是统计里的比例，做大量重复试验时，频率会稳定在概率附近。见第十部分“概率”（第 302 页）。
- **与圆有关的计算：** 扇形的圆心角占 $360°$ 的几分之几，扇形的面积就占整个圆面积的几分之几，扇形图正是用这个比例来表示百分比。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **函数：** 气温随时刻变化，每个时刻对应一个气温，这就是函数关系；折线图就是把测得的点描出来再连起来，和画函数图象的方法一样。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **有理数的运算：** 频率、百分比的计算，就是分数和比例的计算。见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。

真题： 2026 年第 3 题（第 355 页）、2025 年第 17 题（第 373 页）、2023 年第 13 题（第 400 页）、2022 年第 7 题（第 410 页）。

数据的分析 ★

> 对应人教版八年级下册第二十四章。

分析一组数据，主要看两件事：数据集中在哪里（平均数、中位数、众数），数据分散得多开（极差、方差、四分位数）。

从哪里来

甲、乙两名射击队员各打 5 枪，成绩（环）如下：

队员	第 1 枪	第 2 枪	第 3 枪	第 4 枪	第 5 枪
甲	7	8	8	8	9
乙	6	7	8	9	10

谁打得好？先算总环数：两人都是 40 环，平均每枪都是 8 环。只看“平均打几环”，两人一样好。可是一眼就能看出两人不一样：甲每枪都在 8 环上下，很稳定；乙时好时坏，忽高忽低。

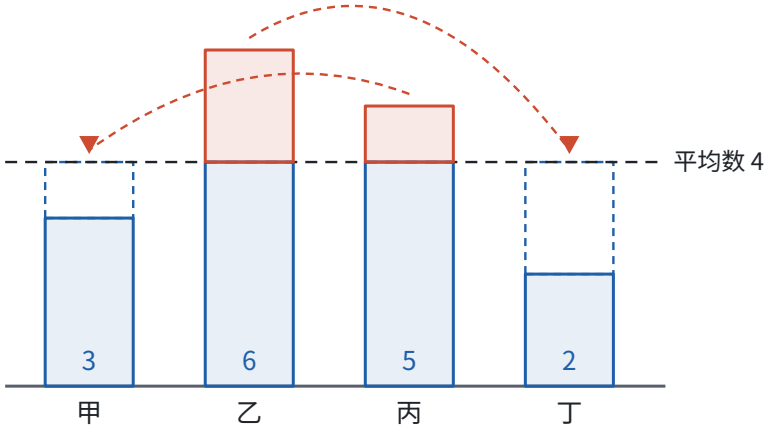
这说明一组数据至少要用两类数来描述：一类说明数据的**集中趋势**，也就是“一般水平”在哪里；另一类说明数据的**离散程度**，也就是数据分散得开不开、稳定不稳定。这一页先讲第一类，再讲第二类。

平均数：移多补少

一组数据的总和除以数据的个数，叫这组数据的平均数， 记作 $\bar{x}$（读作“x 拔”）：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

平均数的意思是“匀一匀”：把多的移给少的，让每个数据都变得一样多，这个一样多的数就是平均数。比如甲、乙、丙、丁四人上个月分别读了 3、6、5、2 本书，总共 16 本，平均每人 4 本。下图中，乙比平均数多的 2 本移给丁，丙多的 1 本移给甲，四个长条就一样高了：

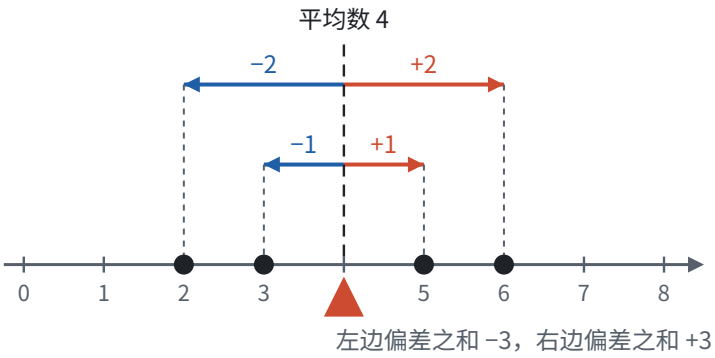


比平均数多出来的总量，正好等于比平均数少的总量。 每个数据与平均数的差 $x_i-\bar{x}$ 叫这个数据的**偏差**，多的是正的，少的是负的。偏差加起来总是 0：

$$\begin{aligned}(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x}) &= (x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\bar{x}\\ &= n\bar{x}-n\bar{x}=0.\end{aligned}$$

第二步用的是平均数的定义：总和等于 $n\bar{x}$。把数据画在数轴上，平均数就像跷跷板的支点：左边的偏差加

起来是 −3，右边的加起来是 +3，正好平衡：



这个事实后面算方差时还要用到。

加权平均数：每个数据的分量不一样

数据重复出现时。 甲的 5 枪成绩 7、8、8、8、9 中，8 出现了 3 次，可以把 3 个 8 合起来算：

$$\bar{x}=\frac{7\times 1+8\times 3+9\times 1}{1+3+1}=\frac{40}{5}=8.$$

一般地，数据 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 分别出现 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 次，平均数是

$$\bar{x}=\frac{x_1 f_1+x_2 f_2+\cdots+x_k f_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}.$$

这里的 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 叫**权**，这样算出的平均数叫**加权平均数**。“权”就是秤砣，出现次数多的数据，在平均数里的分量就重。

数据的重要程度不一样时。 权不一定是次数，也可以是人为规定的重要程度。

例 1 公司招聘，笔试和面试成绩如下。按笔试和面试 6 : 4 的比例计算总分，谁被录取？如果改成 4 : 6 呢？

应聘者	笔试	面试
A	90	75
B	78	88

思路： “按 6 : 4 计算”就是笔试的权是 6，面试的权是 4，用加权平均数。

解： 按 6 : 4 计算：

$$\bar{x}_A=\frac{90\times 6+75\times 4}{6+4}=84,\qquad \bar{x}_B=\frac{78\times 6+88\times 4}{6+4}=82.$$

A 的总分高，录取 A。

按 4 : 6 计算：

$$\bar{x}_A=\frac{90\times 4+75\times 6}{4+6}=81,\qquad \bar{x}_B=\frac{78\times 4+88\times 6}{4+6}=84.$$

B 的总分高，录取 B。

回顾： 同样的成绩，权变了，结果就反过来。重视笔试，笔试好的 A 占优；重视面试，面试好的 B 占优。权反

映的正是“看重什么”。如果不加权（相当于权都是 1），A 是 82.5 分，B 是 83 分。

分组数据的平均数。 数据已经分组、不知道每个数据的具体值时，用每组两个端点的平均数，也就是**组中值**，代表这一组的数据，再按各组的频数加权。第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）里 50 名同学的跳绳次数，5 组的组中值是 90、110、130、150、170，频数是 4、9、16、13、8：

$$\bar{x} \approx \frac{90\times 4+110\times 9+130\times 16+150\times 13+170\times 8}{50}=\frac{6740}{50}=134.8.$$

这是估计值，因为每组里的数据不一定正好都等于组中值。

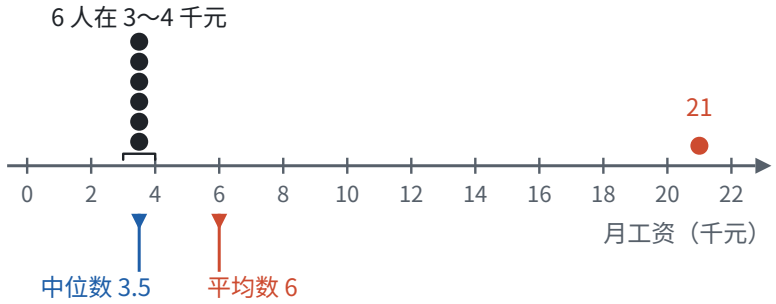
中位数和众数：不怕极端值

把一组数据从小到大排列，处在最中间的数叫中位数； 数据个数是偶数时，中间有两个数，取它们的平均数。**一组数据中出现次数最多的数叫众数。**

有了平均数，为什么还要中位数？看一个例子：某小店 7 名员工的月工资（元）是

3000，3200，3500，3500，3800，4000，21000。

最后一个 21000 是店长的工资。平均数是 $42000\div 7=6000$（元），可是 7 个人里有 6 个人的工资不超过 4000 元，远低于 6000 元。平均数被一个特别大的数拉高了：



中位数是排在第 4 位的 3500 元，众数也是 3500 元，它们更能代表“一般员工”的工资。原因在于：平均数用到了每个数据的**大小**，一个数据变大，平均数就跟着变大；中位数只看数据的**排列位置**，把 21000 换成 100000，它仍然排在最后，中位数不变。

三个数各有长处：

统计量	怎样得到	长处	短处	适合
平均数	总和 ÷ 个数	用到了全部数据，能算总量	受极端值影响大	数据比较均匀时的一般水平；要估计总量时
中位数	排序后取中间	不受极端值影响	只用到了中间的一两个数	有特别大或特别小的数据时，比如工资、房价
众数	数出现的次数	反映“最多的是哪个”	可能不止一个，也可能每个数都只出现一次，意义不大	关心最常见的取值时，比如鞋店进哪个尺码最多

离散程度：极差和方差

回到射击的例子。甲 5 枪的成绩是 7、8、8、8、9，乙是 6、7、8、9、10，平均数都是 8，要比的是“离 8 远不远”。

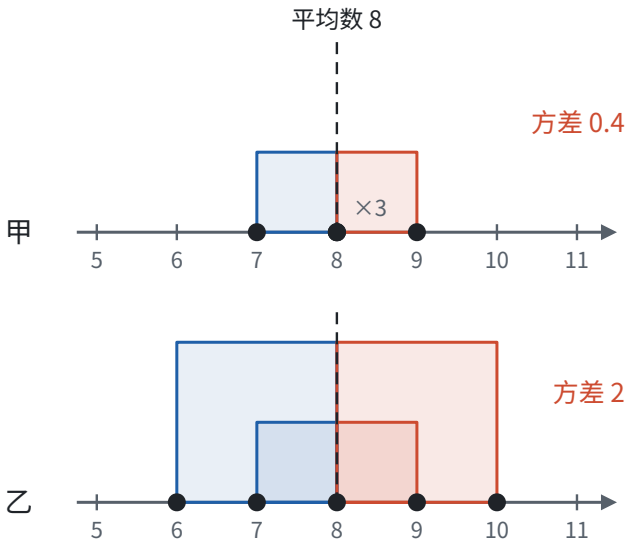
极差：最大值减最小值。 甲的极差是 $9-7=2$，乙的是 $10-6=4$。极差简单，但只用了最大和最小两个数，中间的数据怎样分布，它一概不管。

方差：把每个数据离平均数有多远都算进来。 自然的想法是看偏差 $x_i-\bar{x}$。可是前面已经证明，偏差加起来总是 0，正的负的互相抵消，取平均也是 0，没法用。要让偏差不再抵消，就把它们**平方**，全变成非负数，再取平均：

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}.$$

s^2 叫这组数据的方差。 方差越大，数据越分散，波动越大；方差越小，数据越集中，越稳定。

偏差的平方有一个几何的样子：以数据点到平均数的线段为边画正方形，偏差的平方就是这个正方形的面积。方差就是这些正方形面积的平均数。乙的数据离 8 更远，正方形又多又大：



算一算：

$$s_{甲}^2=\frac{(7-8)^2+3\times(8-8)^2+(9-8)^2}{5}=\frac{2}{5}=0.4,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

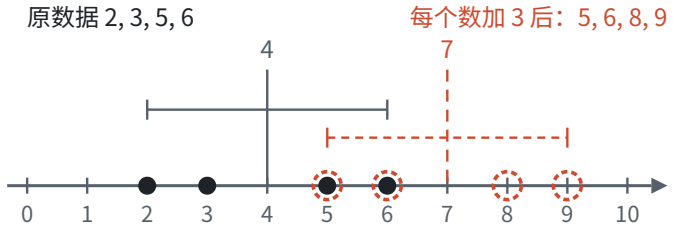
s^2甲 $<$ s^2乙，甲的成绩更稳定。

方差的单位是原数据单位的平方（环^2），用起来不方便。把方差开平方，得到的 s 叫**标准差**，单位和原数据相同，意义和方差一样。

想一想： 甲、乙谁该去参加比赛？如果比的是稳定，选方差小的甲；如果对手很强，要打出 9 环以上才有希望赢，乙 5 枪里有 2 枪达到 9 环以上，甲只有 1 枪，这时选乙也有道理。统计量给出的是依据，怎样决策还要看目标。

数据整体加减、整体放大后

每个数据都加上同一个数 a，平均数也加 a，方差不变。 在数轴上看，每个点都向右平移 a 个单位，平衡点也跟着平移，但点与点之间的距离、各点到平衡点的距离都没变：



用式子说明：新数据是 x_i+a，新的平均数是 $\bar{x}+a$，新的偏差是

$$(x_i+a)-(\bar{x}+a)=x_i-\bar{x},$$

和原来的偏差完全一样，所以方差不变。

每个数据都乘同一个数 k，平均数也乘 k，方差乘 k^2。 新的偏差是 $kx_i-k\bar{x}=k(x_i-\bar{x})$，平方后是 $k^2(x_i-\bar{x})^2$，每一项都乘了 k^2，平均后方差也乘 k^2。比如 2、3、5、6 的方差是 2.5，每个数乘 2 得 4、6、10、12，方差是 $2.5\times4=10$。

这两条性质可以简化计算：算甲的方差时，先把 7、8、8、8、9 每个数都减 8，得到 $-1,0,0,0,1$，这组数的方差和原来一样，平均数是 0，方差是 $(1+0+0+0+1)\div5=0.4$。

四分位数和箱线图

中位数把排好序的数据分成个数相等的两半。**前一半数据的中位数叫第一四分位数，后一半数据的中位数叫第三四分位数。** 数据个数是偶数时，正好分成个数相同的前后两半；是奇数时，正中间的那个数（中位数）怎样处理有两种做法，见例 3。第一四分位数、中位数、第三四分位数三个数，把数据分成了个数大致相等的四段，“四分位数”由此得名。

例 2　12 名同学数学测验的成绩从小到大排列如下，求这组数据的中位数和两个四分位数。

52，60，65，68，70，72，75，78，80，85，88，96

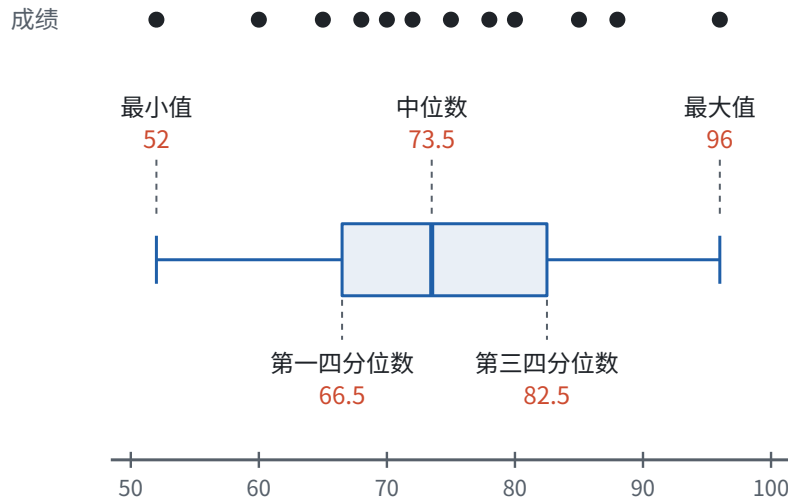
思路： 一共 12 个数，先找中位数，把数据分成前 6 个和后 6 个两半，再分别找两半的中位数。

解： 中位数是第 6、7 个数的平均数：$(72+75)/2=73.5$。

前一半是 52，60，65，68，70，72，它的中位数是 $(65+68)/2=66.5$，这是第一四分位数。

后一半是 75，78，80，85，88，96，它的中位数是 $(80+85)/2=82.5$，这是第三四分位数。

把最小值、第一四分位数、中位数、第三四分位数、最大值这五个数画在数轴上方，就得到箱线图： 两个四分位数之间画一个“箱子”，箱子里用一条竖线标出中位数，箱子两端各引一条线，一直延伸到最小值和最大值。



箱线图的每一段都包含大约四分之一的数据。所以：

- **箱子**里装着中间的一半数据，箱子越短，中间一半的数据越集中；
- **竖线**的位置是中位数，说明一般水平；
- **两条线**伸得多长，说明最高、最低的那几个数离中间有多远。

箱子的长度，也就是第三四分位数减第一四分位数，也是衡量离散程度的一个数。它和极差不同：极差只看两个最极端的数，箱子的长度只看中间一半，个别特别高或特别低的数据影响不到它。

例 3 9 个数据从小到大排列如下，求两个四分位数。

3，5，6，8，10，12，13，15，20

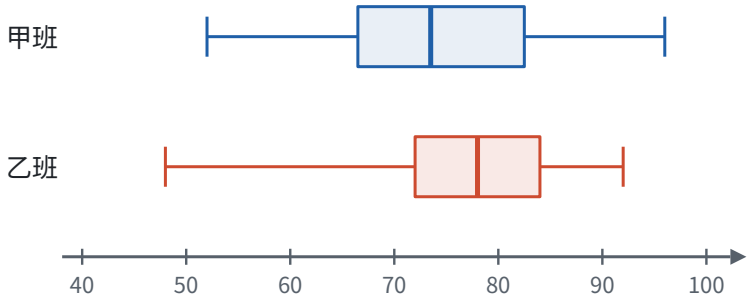
思路： 一共 9 个数，中位数是第 5 个数 10。难点在于：分前后两半时，10 算不算进去？两种做法都有人用。

解法一：中位数不放进两半。 前一半是 3，5，6，8，第一四分位数是 $(5+6)/2=5.5$；后一半是 12，13，15，20，第三四分位数是 $(13+15)/2=14$。

解法二：中位数两半都放。 前一半是 3，5，6，8，10，第一四分位数是 6；后一半是 10，12，13，15，20，第三四分位数是 13。

想一想： 两种做法的差别只在“正中间那个数归不归两边”，所以只有数据个数是奇数时才会不同；个数是偶数时（比如例 2 的 12 个成绩，正好分成前 6 个和后 6 个），两种做法的结果完全一样。两种结果相差不大，都把数据分成了个数大致相等的四段，箱线图的样子也差不多。做题时用哪一种，看课本和题目的约定；同一次比较里，几组数据要用同一种做法。

箱线图最适合**比较几组数据**。把例 2 的 12 个成绩看作甲班的成绩（五个数是 52，66.5，73.5，82.5，96），再和乙班的成绩画在同一条数轴上：



比较	甲班	乙班	说明
中位数	73.5	78	乙班的一般水平更高，至少一半同学不低于 78 分
箱子的长度	$82.5-66.5=16$	$84-72=12$	乙班中间一半同学的成绩更集中
极差	$96-52=44$	$92-48=44$	两班一样，只看极差分不出差别

用样本估计总体

实际问题中，总体往往太大，没法一个一个量。这时用样本的平均数估计总体的平均数，用样本的方差估计总体的方差。和用样本频率估计总体频率一样，前提是样本随机、容量足够大（见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页））。

例 4　果园里有 100 棵苹果树。随机选 5 棵，产量（千克）分别是 48，52，50，47，53。估计这个果园苹果的总产量。

思路： 总产量 = 每棵的平均产量 × 棵数。每棵的平均产量不知道，用样本的平均数来估计。

解： 样本平均数是

$$\bar{x}=\frac{48+52+50+47+53}{5}=\frac{250}{5}=50\ (\text{千克}).$$

估计总产量约为 $50\times100=5000$（千克）。

想一想： 这里为什么用平均数，不用中位数或众数？因为要估计的是**总量**，而平均数正好是“总量 ÷ 个数”，乘回个数就得到总量。中位数和众数没有这个性质。

易错点

- **求中位数忘了排序。** 中位数是排好序以后的中间数，不是原始顺序里的中间数。
- **数据个数是偶数时，中位数只取一个。** 偶数个数据中间有两个数，要取它们的平均数，中位数不一定是原数据中的数（例 2 的 73.5 就不是）。
- **众数写成了次数。** 众数是出现次数最多的那个**数据**，不是它出现的次数。甲的成绩里 8 出现 3 次，众数是 8，不是 3。
- **加权平均数除错了数。** 分母是权的和，不是数据的种类数。例 1 按 6 : 4 算，分母是 10，不是 2。
- **以为方差大就是成绩差。** 方差说的是稳不稳定，不是高低。乙的方差大，平均成绩和甲一样。
- **数据加减一个数，以为方差也变。** 平移不改变分散程度，方差不变；乘 k 时方差乘的是 k^2，不是 k。
- **样本估计的结果写成等号。** 用样本估计总体，得到的是近似值，要写“约”。

联系

- **数据的收集、整理与描述：** 这一页的数据从调查和整理来；直方图的分组数据可以用组中值估计平均数。见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）。
- **有理数：** 偏差有正有负，是数轴上相对于平均数的位置；平均数是数轴上的平衡点。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **平移、轴对称与旋转：** 每个数据都加 a，就是把数轴上所有的点平移 a 个单位，距离不变，所以方差不变。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **整式的加减：** 偏差之和为 0、数据变化后平均数和方差怎样变，都是用字母表示数、再合并同类项推出来的。见第三部分“整式的加减”（第 59 页）。
- **概率：** 样本越大，样本的频率越接近概率，样本的平均数也越接近总体的平均数。见第十部分“概率”（第 302 页）。

真题： 2026 年第 17 题（第 360 页）、2025 年第 12 题（第 372 页）、2025 年第 17 题（第 373 页）、2024 年第 12 题（第 385 页）、2024 年第 17 题（第 387 页）。

概率 ★

> 对应人教版九年级“概率初步”一章。

概率是给“可能性有多大”配上的一个 0 到 1 之间的数：同一个试验重复做很多次，事件发生的频率会稳定在这个数附近。

从哪里来

掷一枚骰子，结果可能是 1 到 6 点中的任何一个，掷之前说不准。但“说不准”也有程度之分：

- “掷出的点数不超过 6”，每次都一定发生，叫**必然事件**；
- “掷出 7 点”，每次都一定不发生，叫**不可能事件**；
- “掷出 6 点”“掷出偶数点”，可能发生也可能不发生，叫**随机事件**。

同样是随机事件，“掷出偶数点”显然比“掷出 6 点”更容易发生：偶数点有 2、4、6 三种，6 点只有一种。能不能用一个数把“更容易”说准确？这个数就是概率。

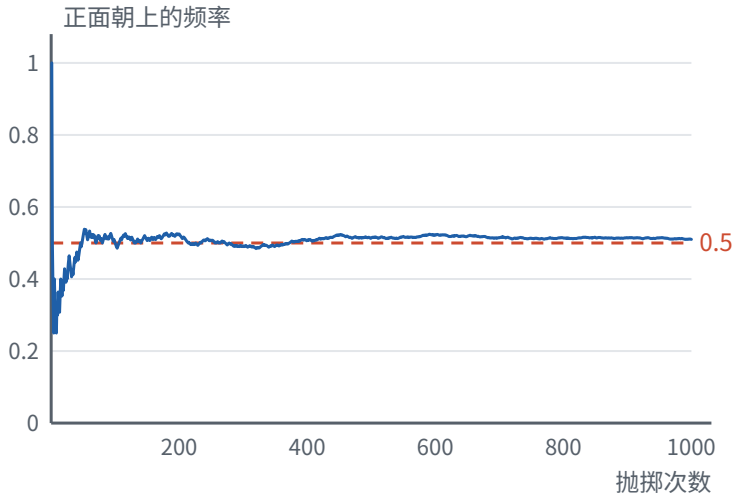
事件 A 发生的概率记作 $P(A)$。必然事件每次都发生，概率规定为 1；不可能事件从不发生，概率规定为 0；随机事件的概率在 0 和 1 之间：

$$0 < P(\text{随机事件}) < 1.$$



概率的意义：频率会稳定下来

抛一枚硬币，正面朝上的可能性有多大？抛几次看不出规律：抛 10 次可能 7 次正面，也可能 3 次。但抛的次数越多，正面朝上的**频率**越稳定。下图是用计算机模拟抛一枚硬币 1000 次，每抛一次算一下到目前为止正面朝上的频率：



开始时频率上下乱跳，抛到几百次以后，就在 0.5 附近很小的范围里摆动了。历史上有人真的做过这个试验：

试验者	抛掷次数	正面朝上的次数	频率
布丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

在大量重复试验中，事件发生的频率会稳定在某个常数附近，这个常数就是事件的概率。 硬币正面朝上的概率是 $1/2$。

概率说的是“大量重复时的规律”，不是“每一次的结果”。概率是 $1/2$，不等于抛 2 次必有 1 次正面，也不等于抛 100 次正好 50 次正面。单独一次试验的结果仍然是随机的。

等可能的结果：直接算

每求一个概率都去做几千次试验，太费事。有一类试验可以直接算出概率：

1. 试验的结果只有**有限个**；
2. 每个结果出现的可能性**相等**。

掷一枚质地均匀的骰子就是这样：只有 6 种结果，骰子六个面一模一样，没有哪一面更容易朝上。6 种结果可能性相同，合起来是必然事件，概率是 1，所以每种结果的概率都是 1/6。“掷出偶数点”包含 2、4、6 三种结果，它的概率就是 3 个 1/6：

$$P(\text{掷出偶数点}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

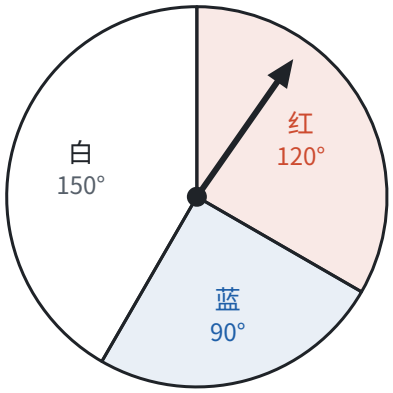
一般地，**一次试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 种，那么**

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

因为 $0 \leqslant m \leqslant n$，所以 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；$m = n$ 时 A 是必然事件，$m = 0$ 时 A 是不可能事件，和前面的规定（必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0）一致。

结果无穷多时，用面积或角度来比。 转动一个转盘，指针可能停在任何位置，结果有无穷多种，没法一个一个数。但转盘是均匀的，指针停在哪里的机会都一样，所以停在某个区域的概率，就等于这个区域占整个转盘的比例。

例 1 如图，转盘被分成三个扇形，红色扇形的圆心角是 120°，蓝色是 90°，白色是 150°。自由转动转盘，求指针停在红色区域、蓝色区域的概率，以及停在白色以外区域的概率。



思路： 指针停在各处的机会均等，停在某个扇形里的概率，就是这个扇形占整个圆的比例，也就是圆心角占 360° 的比例。

解：

$$P(\text{红}) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}, \qquad P(\text{蓝}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}.$$

白色以外的区域就是红色和蓝色合起来，圆心角是 120° + 90° = 210°：

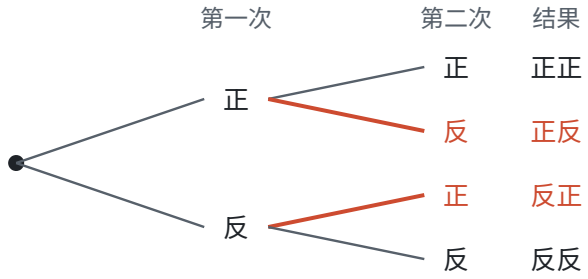
$$P(\text{不是白色}) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}.$$

回顾： 也可以先求 $P(\text{白}) = 150/360 = 5/12$，再用 $1 - 5/12 = 7/12$。“停在白色”和“不停在白色”必有一个发生、又不会同时发生，两个概率加起来是 1。

两步试验：列表法和树状图

同时抛两枚硬币，“一枚正面、一枚反面”的概率是多少？

结果看上去有三种：两正、两反、一正一反，于是很容易答 1/3。可是这三种结果并不是等可能的。把两枚硬币分成第一枚和第二枚，一步一步地画出所有可能：



第一枚有正、反两种，每一种后面第二枚又有正、反两种，一共 $2\times 2=4$ 种结果，这 4 种才是等可能的。“一正一反”包含“正反”和“反正”两种，所以

$$P(\text{一正一反})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

这样一层一层分叉列出所有结果的图叫**树状图**。试验分两步完成时，也可以列一个表，第一步的结果做行，第二步的结果做列，这叫**列表法**。两种方法做的是同一件事：**不重不漏地列出所有等可能的结果**，然后数一数事件包含其中几种。

掷两枚骰子，点数之和的所有结果列成表（行是第一枚，列是第二枚）：

第一枚＼第二枚	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

一共 $6\times 6=36$ 种等可能的结果。和为 7 的有 6 种，排在一条斜线上，所以 $P(\text{和为 }7)=6/36=1/6$，和为 7 是所有和里最容易出现的；和为 2 或 12 都只有 1 种，概率都是 1/36。

三步及以上用树状图，两步用哪个都行。 表只有行和列两个方向，适合恰好两步的试验；三步及以上（比如抛三枚硬币），用树状图一层一层往下画更方便。

例 2　不透明的袋子里有 2 个红球和 1 个白球，除颜色外都相同。从中摸出一个球，记下颜色；再摸一个球。

（1）第一次摸出的球放回袋子、摇匀后再摸，求两次都摸到红球的概率；

（2）第一次摸出的球不放回，直接再摸，求两次都摸到红球的概率。

思路： 两个红球虽然颜色相同，却是两个不同的球，要把它们编号成红 1、红 2 区分开，这样每个球被摸到的可能性才相同。再看放回和不放回的差别：放回时第二次还是从 3 个球里摸，不放回时第二次只能从剩下的 2 个球里摸。

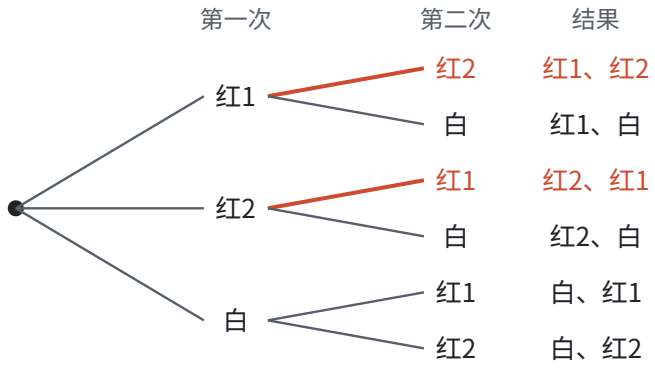
解：（1）放回时，每次都有 3 种等可能的结果，列表：

第一次＼第二次	红 1	红 2	白
红 1	红 1、红 1	红 1、红 2	红 1、白
红 2	红 2、红 1	红 2、红 2	红 2、白
白	白、红 1	白、红 2	白、白

共有 $3\times3=9$ 种等可能的结果，两次都是红球的有 4 种（表的左上角），所以

$$P(\text{两次都是红球})=\frac{4}{9}.$$

（2）不放回时，第一次有 3 种结果，第二次只剩 2 种，画树状图：



共有 $3\times2=6$ 种等可能的结果，两次都是红球的有 2 种，所以

$$P(\text{两次都是红球})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

想一想： 两种摸法为什么答案不同？放回时，同一个球可以被摸两次，“红 1、红 1”这样的结果是存在的；不放回时，第二次摸不到第一次摸出的那个球，表格里对角线上的 3 种结果（红 1、红 1，红 2、红 2，白、白）都不会出现，剩下的正是树状图里的 6 种。把（1）的表去掉对角线，就得到（2）的所有结果，两种方法列出的其实是同一批结果。

用频率估计概率

图钉落地时钉尖朝上还是朝下，一粒种子能不能发芽，一棵树苗能不能成活，这些试验的结果**不是等可能的**，没法用 m/n 直接算。这时就回到概率的本来意义：做大量重复试验，用稳定下来的频率作为概率的估计值。

例 3 某林场移栽一种树苗，记录的成活情况如下：

移栽棵数	50	100	200	500	1000	2000
成活棵数	44	89	178	452	901	1802
成活的频率	0.88	0.89	0.89	0.904	0.901	0.901

（1）估计这种树苗成活的概率；

（2）要得到 18000 棵成活的树苗，大约要移栽多少棵？

思路： 树苗成活不是等可能的结果，只能看频率。移栽的棵数越多，频率越稳定，从表中看，频率稳定在 0.9

附近。

解：（1）这种树苗成活的概率约是 0.9。

（2）设大约要移栽 x 棵，则 $0.9x = 18000$，解得 $x = 20000$。大约要移栽 20000 棵。

例 4 不透明的袋子里有 3 个红球和若干个白球，除颜色外都相同。每次摸出一个球，记下颜色后放回摇匀。摸了很多次后发现，摸到红球的频率稳定在 0.25。估计袋中有几个白球。

思路： 这道题把两种求概率的方法接了起来。一方面，大量试验的频率稳定在 0.25，所以摸到红球的概率约是 0.25；另一方面，摸到每个球是等可能的，设白球有 x 个，摸到红球的概率又可以直接算出来。两个结果相等，就得到一个方程。

解： 设袋中有 x 个白球，则摸到红球的概率是 $3/(3+x)$。由题意，

$$\frac{3}{3+x} = 0.25,$$

两边同乘 $4(3+x)$，得 $12 = 3+x$，解得 $x = 9$。经检验，$x = 9$ 是原方程的解。袋中大约有 9 个白球。

易错点

- **把不等可能的结果当成等可能的。** 抛两枚硬币的结果不是“两正、两反、一正一反”三种等可能，而是四种；用 m/n 之前，先确认每种结果的可能性真的相同。
- **相同的东西没有区分。** 两个红球要编号成红 1、红 2，否则“红、红”“红、白”这样的结果可能性并不相同。
- **放回和不放回不分。** 放回时每次都是原来的全部结果；不放回时第二次的结果少了一个。
- **列表或画树状图时有重有漏。** 按顺序一层一层列：先固定第一步，再列第二步的所有可能。“正反”和“反正”是两种不同的结果，不能只算一种。
- **把概率当成“一定”。** 中奖的概率是 $1/100$，买 100 张彩票不一定中奖；概率描述的是大量重复时的规律。
- **试验次数太少就下结论。** 抛 10 次硬币出现 7 次正面，不能说正面朝上的概率是 0.7。频率只有在试验次数很多时才稳定。
- **频率和概率混为一谈。** 频率是做试验得到的，每次做都可能不同；概率是事件本身的一个确定的数，频率在它附近摆动。

联系

- **数据的收集、整理与描述：** 频率就是统计里的比例，概率是频率稳定下来的值；用频率估计概率，和用样本估计总体是同一个想法。见第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）。
- **数据的分析：** 用统计量做判断和用概率做判断，都是在不确定中找依据。见第十部分“数据的分析”（第 294 页）。
- **与圆有关的计算：** 转盘问题里，指针停在某个扇形的概率等于这个扇形的圆心角占 360° 的比例，也等于扇形面积占圆面积的比例。见第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）。
- **有理数的运算：** $P(A) = m/n$ 是一个分数，“部分占整体的几分之几”。见第二部分“有理数的运算”（第 41 页）。
- **分式方程：** 已知概率反求球的个数，列出的往往是分式方程，解完要检验。见第四部分“分式方程”（第 100

页）。

- **一元一次方程：** 已知成活率求要移栽的棵数，就是列一元一次方程。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）。

真题： 2026 年第 14 题（第 359 页）、2025 年第 8 题（第 370 页）、2024 年第 8 题（第 383 页）、2023 年第 8 题（第 398 页）、2022 年第 13 题（第 413 页）。

总览：一体两面

这一部分把全书的数和形收拢到一起：每个代数关系都有一个几何的样子，每个几何关系都能写成数，能在两者之间来回翻译，综合问题就有了思路。

代数和几何对照表

前面十个部分里，同一件事常常以两种面貌出现过：

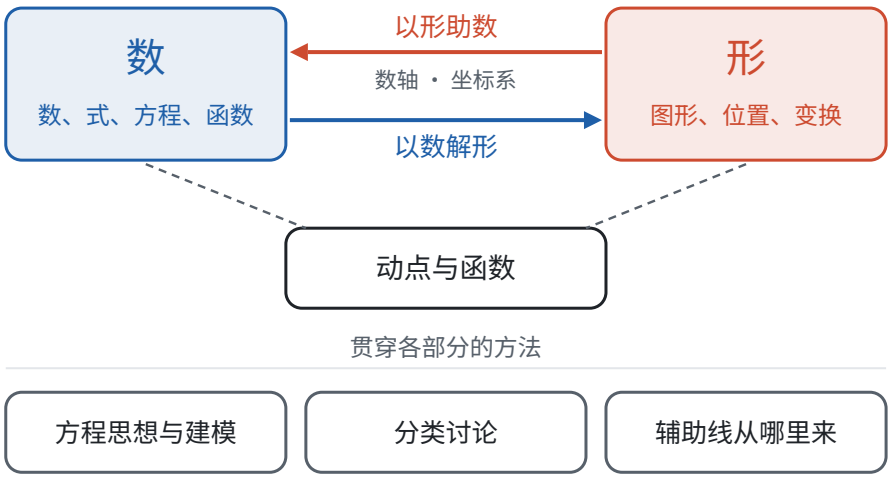
代数的面貌	几何的面貌	在哪里学过
实数	数轴上的点，一一对应	第二部分“实数”（第 47 页）
相反数	关于原点对称的两个点	第二部分“有理数”（第 36 页）
绝对值 $\|a-b\|$	数轴上两点间的距离	第二部分“有理数”（第 36 页）
不等式的解集	数轴上的一段	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	正方形面积的拼图	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
配方	把长方形补成正方形	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
$a^2+b^2=c^2$	直角三角形的三条边	第五部分“勾股定理”（第 149 页）
有序数对 (x,y)	平面上的点	第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）
两点间的距离公式	坐标系里的勾股定理	第三部分“二次根式”（第 79 页）
函数	图象	第七部分“函数”（第 201 页）
一次函数的 k	直线的倾斜程度	第七部分“一次函数”（第 206 页）
二元一次方程组的解	两条直线的交点	第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）
一元二次方程的根	抛物线与 x 轴的交点	第七部分“二次函数”（第 218 页）
判别式的正、零、负	抛物线与 x 轴有两个、一个、没有交点	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
比例、相似比	形状相同、大小不同的图形	第八部分“相似”（第 230 页）
锐角三角函数	直角三角形两条边的比	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
圆心到直线的距离与半径比大小	直线与圆有几个公共点	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）

每一行都是同一件事的两种说法。遇到一个代数问题，可以问“它画出来是什么样子”；遇到一个几何问题，可以问“它写成数是什么式子”。

贯穿全书的几条主线

主线	经过的地方
数轴 → 坐标系 → 函数图象	数轴上的点和距离 → 不等式的解集画在数轴上 → 平面直角坐标系 → 一次、反比例、二次函数的图象
面积模型	乘法公式的拼图 → 因式分解 → 勾股定理的拼图证明 → 配方法
方程是数与形的交点	方程组的解是两直线的交点 → 一元二次方程的根是抛物线与 x 轴的交点 → 判别式与交点个数 → 直线与圆的位置关系
对称	相反数 → 轴对称与等腰三角形 → 坐标系中的对称点 → 抛物线的对称轴 → 圆的对称性和垂径定理
比	比例 → 相似 → 锐角三角函数 → 一次函数的 k
变化与对应	代数式的值 → 函数 → 动点问题

这一部分的六页



页面	要回答的问题	典型的例子
以形助数	代数问题怎样画成图	绝对值之和的最小值；方程在某个范围内的根的个数；比较两个函数的大小
以数解形	几何问题怎样写成数来算	坐标系中判断三角形的形状；平行四边形的第四个顶点；三角形面积的最大值；点的存在性
动点与函数	运动中的量怎样变化	按转折点分段写函数；从图象反推图形；两个动点的面积
方程思想与建模	不知道的量怎样求出来	折叠求线段长；购买方案；拱桥的宽度
分类讨论	条件不确定时怎样不重不漏	等腰三角形的腰；相似的对应关系；平行弦的位置
辅助线从哪里来	条件和结论怎样接上	倍长中线；取中点构造中位线；切线连半径

前两页是同一种翻译的两个方向：第十一部分“以形助数”（第 311 页）把数画成形，第十一部分“以数解

形”（第 318 页）把形写成数。第十一部分“动点与函数”（第 323 页）两个方向都用：从图形里写出函数，再用函数的图象读懂运动。

后三页讲的是贯穿各部分的想法，不局限于数形结合：第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）讲怎样把未知的量设出来、找等量关系；第十一部分“分类讨论”（第 332 页）讲条件没说死时怎样把情况列全；第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）讲几何证明里缺的那座桥怎样补上。这三种想法在前面各部分的例题里已经反复出现，这里把它们单独拿出来看清楚。

学习顺序

这一部分用到前面各部分的知识，适合在相关内容学完以后阅读，也适合总复习时通读：

1. **以形助数、以数解形：** 学完第七部分的三种函数后读，重点是会在数和形之间翻译；
2. **动点与函数：** 学完第七部分“二次函数”（第 218 页）后读；
3. **方程思想与建模：** 学完第四部分的各种方程后就可以读，几何的例子需要第五部分“勾股定理”（第 149 页）；
4. **分类讨论：** 学完第八部分“相似”（第 230 页）和第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）后读，其中等腰三角形、方程的例子可以更早看；
5. **辅助线从哪里来：** 在学第五部分的证明时就可以对照着看，圆的部分学完第九部分再读。

每页的例题都跨了几个部分。读的时候如果某一步看不懂，按页末“联系”里的链接回到原来的页面去补。

以形助数

> 对应人教版七年级上册第一章、七年级下册第十一章、八年级上册第十六章、八年级下册第二十三章、九年级上册第二十五章至第二十七章，综合运用。

以形助数，就是把数、式子、方程画成图，让图告诉我们答案在哪里、有几个、什么时候最大最小，再用计算把答案算准。

从哪里来

代数的计算一步一步往前推，每一步都可靠，但看不到全局；图形一眼就能看到全局，却说不准具体的数。前面各部分里，几乎每个代数对象都有一个几何的样子：

代数的说法	画成图
一个数 a	数轴上的一个点
$\lvert a-b\rvert$	数轴上 a、b 两点间的距离
不等式的解集	数轴上的一段
函数值的大小	图象上点的高低
两个式子相等时 x 的值	两个图象交点的横坐标

代数的说法	画成图
乘积 ab	长 a、宽 b 的长方形面积
$\sqrt{(a^2+b^2)}$	两条直角边为 a、b 的直角三角形的斜边

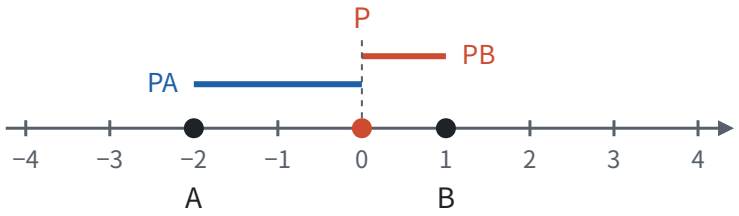
以形助数就是用这张表把题目“翻译”过去：先画图，看出答案的方向（在哪一段、有几个、哪里最小），再回到代数把它算出来。图负责想，式子负责算。

数轴：绝对值是距离

数轴上表示 a 和 b 的两点之间的距离是 $|a-b|$：$a \geqslant b$ 时距离是 $a-b$，$a<b$ 时距离是 $b-a$，两种情况合起来正好是 $|a-b|$（见第二部分“有理数”（第 36 页））。所以 $|x-1|$ 是 x 到 1 的距离，$|x+2|=|x-(-2)|$ 是 x 到 -2 的距离。

例 1　（1）求 $|x-1|+|x+2|$ 的最小值；（2）解方程 $|x-1|+|x+2|=5$。

思路： 在数轴上取点 A 表示 -2，点 B 表示 1，点 P 表示 x。式子 $|x-1|+|x+2|$ 就是 $PB+PA$：点 P 到 A、B 两点的距离之和。



解：（1）$AB=1-(-2)=3$。

- P 在 A、B 之间（含端点）时，$PA+PB=AB=3$；
- P 在 B 的右边时，$PA=AB+PB$，所以 $PA+PB=3+2PB>3$；
- P 在 A 的左边时，同理 $PA+PB=3+2PA>3$。

所以最小值是 3，当 $-2 \leqslant x \leqslant 1$ 时取到。

（2）$5>3$，所以 P 在线段 AB 外面。由（1），P 在 B 的右边时 $PA+PB=3+2PB$，在 A 的左边时 $PA+PB=3+2PA$。

- P 在 B 的右边：$2PB=2$，$PB=1$，$x=1+1=2$；
- P 在 A 的左边：$2PA=2$，$PA=1$，$x=-2-1=-3$。

检验： $|2-1|+|2+2|=1+4=5$，$|-3-1|+|-3+2|=4+1=5$。所以 $x=2$ 或 $x=-3$。

想一想： 不画图也能做：按 $x \geqslant 1$、$-2 \leqslant x<1$、$x<-2$ 三段分别去掉绝对值，在每一段里解方程（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。这三段正是 P 在 B 的右边、在 AB 之间、在 A 的左边三种位置。代数解法的分段要先想到才会分，图上的分段是一眼看出来的；图还顺便说明了为什么中间一段的值都是 3。

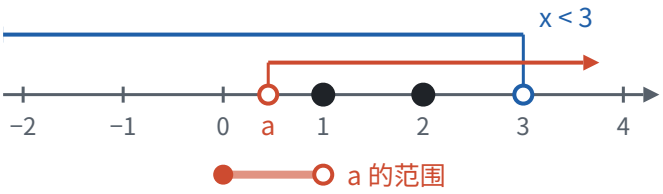
数轴：不等式组的整数解

例 2　关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} x > a, \\ x < 3 \end{cases}$$

恰好有 2 个整数解，求 a 的取值范围。

思路： 解集是 $a < x < 3$。在数轴上从 3 往左数整数：3 不在解集里（空心点），接下来是 2、1。恰好 2 个整数解，就是 2 和 1 在解集里、0 不在。所以 a 要落在 0 和 1 之间。



解： 1 在解集里，要求 $a < 1$；0 不在解集里，要求 $a \geqslant 0$。

端点要单独检验，不能只凭图：

- $a = 0$ 时，解集是 $0 < x < 3$，整数解是 1、2，恰好 2 个，$a = 0$ 可以取；
- $a = 1$ 时，解集是 $1 < x < 3$，整数解只有 2，$a = 1$ 不能取。

所以 $0 \leqslant a < 1$。

图象：方程的解就是交点

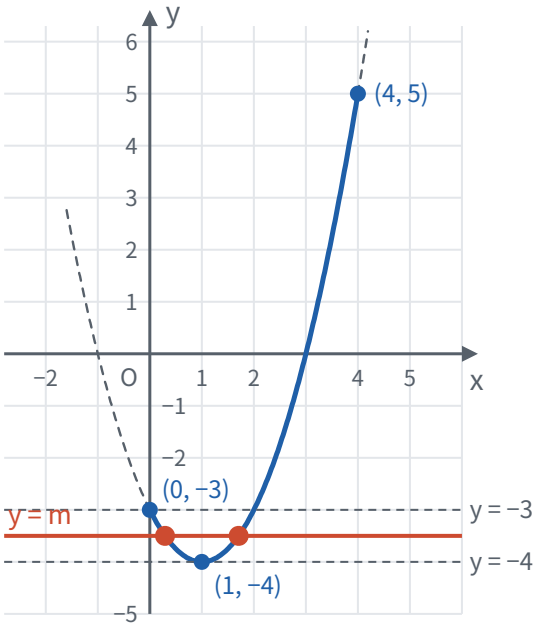
方程 $x^2 - 2x - 3 = m$ 的解，就是抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 和水平直线 $y = m$ 交点的横坐标。m 变化时，直线上下平移，交点的个数跟着变。

例 3　关于 x 的方程 $x^2 - 2x - 3 = m$。

（1）m 取什么值时，方程有两个不相等的实数根？

（2）如果只考虑 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 范围内的解，m 取什么值时，方程在这个范围内恰好有两个解？

思路： 第（1）问可以用判别式，也可以看图；第（2）问限定了 x 的范围，判别式只管有没有根，不管根落在哪里，这时看图最直接。



解：（1）方程化为 $x^2-2x-3-m=0$，

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3-m)=16+4m.$$

$\Delta>0$ 时有两个不相等的实数根，即 $m>-4$。从图上看：$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，顶点是 $(1,-4)$，是图象的最低点。直线 $y=m$ 高于顶点时和抛物线交于两点，正好是 $m>-4$。

（2）只看 $0\leqslant x\leqslant 4$ 的一段（图中实线）。它的两端是 $(0,-3)$ 和 $(4,5)$，最低点是 $(1,-4)$。让直线 $y=m$ 从下往上移动：

m 的范围	交点个数
$m<-4$	0
$m=-4$	1（顶点）
$-4<m\leqslant -3$	2（左边一个在 $0\leqslant x<1$，右边一个在 $1<x\leqslant 2$）
$-3<m\leqslant 5$	1（左边的交点跑到 $x<0$，不算了）
$m>5$	0

所以 $-4<m\leqslant -3$。

检验端点： $m=-3$ 时，方程是 $x^2-2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，都在范围里，确实是两个解。

想一想： 第（2）问如果只用代数，要求两个根都在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 里，得同时考虑判别式、对称轴的位置和端点的函数值，条件多，容易漏。画图后，只要看直线在哪个高度范围内和实线部分交两次，关键高度就是顶点和两个端点的纵坐标。

图象：比较两个函数的大小

例 4　直线 $y=x+1$ 与双曲线 $y=2/x$ 交于 A、B 两点。

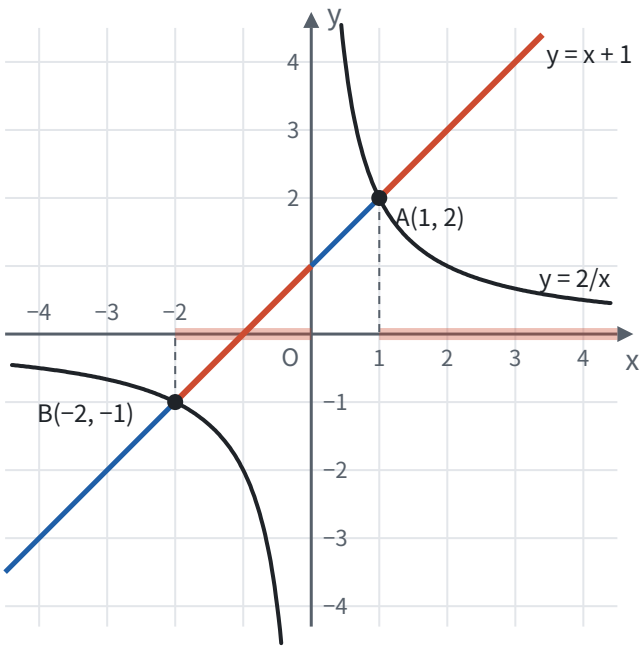
（1）求 A、B 两点的坐标；

（2）x 取什么值时，$x+1>2/x$?

思路： 交点坐标要解方程；比较大小看的是“直线在双曲线上方”的部分。这个不等式里 x 在分母上，两边乘 x 时不知道 x 的正负，代数做法很麻烦，看图就简单了。

解： （1）令 $x+1=2/x$，两边乘 x，得 $x^2+x-2=0$，即 $(x+2)(x-1)=0$，所以 $x=1$ 或 $x=-2$。检验：两个值都不使分母为 0。所以 $A(1,2)$，$B(-2,-1)$。

（2）画出两个图象：

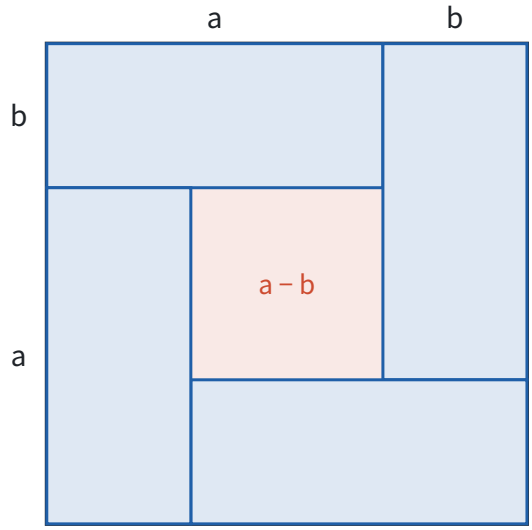


直线在双曲线上方的部分有两段：B 和 y 轴之间的一段（$-2<x<0$），和 A 右边的一段（$x>1$）。所以当 $-2<x<0$ 或 $x>1$ 时，$x+1>2/x$。

$x=0$ 不在答案里：双曲线在 $x=0$ 处断开，$2/x$ 没有意义。$0<x<1$ 时双曲线在直线上方，这一段不满足。

面积：式子的几何样子

把边长为 $a+b$ 的正方形按下图分割（设 $a>b$）：四个角上是四个长 a、宽 b 的长方形，中间剩下一个边长为 $a-b$ 的小正方形。



算两遍面积：

$$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2.$$

用乘法公式展开两边也能验证（见第三部分“整式的乘法”（第 62 页））。中间的小正方形面积 $(a-b)^2 \geqslant 0$，所以 $(a+b)^2 \geqslant 4ab$；只有 $a=b$ 时小正方形消失，等号成立。

例 5　用长 20 m 的篱笆围一个长方形菜园，长和宽各是多少时面积最大？最大面积是多少？

思路： 周长一定，就是长与宽的和一定。把长 a、宽 b 放进上面的图：$a+b$ 不变，大正方形不变；面积 ab 是四个长方形之一，四个长方形越大，中间的空就越小。空消失时 ab 最大。

解： 设长为 a m，宽为 b m，则 $2(a+b)=20$，$a+b=10$。由 $(a+b)^2 \geqslant 4ab$，得 $4ab \leqslant 100$，$ab \leqslant 25$，当 $a=b=5$ 时等号成立。

答：长和宽都是 5 m（围成正方形）时面积最大，最大面积是 25 m²。

想一想： 也可以设长为 x m，写出面积 $S=x(10-x)=-(x-5)^2+25$，用二次函数求最大值（见第七部分“二次函数”（第 218 页）），结果一样。函数的方法算得出最值，图形的方法说得清为什么：两边一样长时，中间的“空”没有了。

距离：把根式看成线段（拓展）

$\sqrt{(a^2+b^2)}$ 是直角边为 a、b 的直角三角形的斜边，在坐标系里就是两点间的距离（见第三部分“二次根式”（第 79 页））。

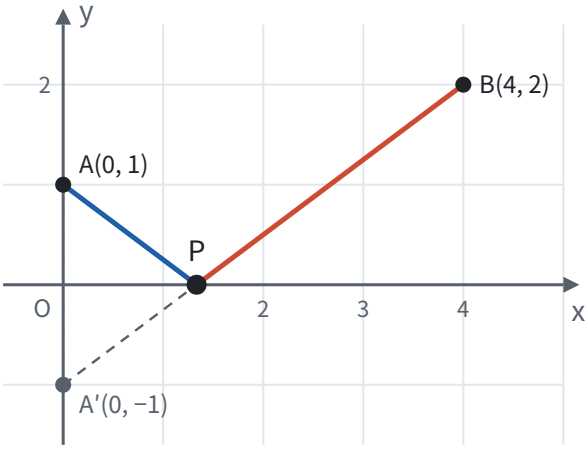
例 6　x 取什么值时，$\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{((x-4)^2+4)}$ 最小？最小值是多少？

思路： 把两个根式都看成两点间的距离。设 $P(x,0)$ 是 x 轴上的动点：

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2} = PA, \quad A(0,1);$$

$$\sqrt{(x-4)^2+4} = \sqrt{(x-4)^2+(0-2)^2} = PB, \quad B(4,2).$$

问题变成：在 x 轴上找一点 P，使 $PA+PB$ 最小。A、B 在 x 轴同侧，这正是最短路径问题（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））：作 A 关于 x 轴的对称点 $A'(0,-1)$，则 $PA=PA'$。



解： $PA+PB=PA'+PB\geqslant A'B$，当 P 在线段 $A'B$ 上时取等号（两点之间，线段最短）。

$$A'B=\sqrt{(4-0)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5.$$

直线 $A'B$ 过 $(0,-1)$ 和 $(4,2)$，用待定系数法得 $y=(3/4)x-1$。令 $y=0$，得 $x=4/3$。

所以 $x=4/3$ 时，原式有最小值 5。

检验： $x=4/3$ 时，$\sqrt{(16/9+1)}=5/3$，$\sqrt{(64/9+4)}=10/3$，和是 5。

易错点

- **$|x+2|$ 当成 x 到 2 的距离。** $|x+2|=|x-(-2)|$，是 x 到 **−2** 的距离。先把式子写成“x 减一个数”的样子，再读出是到哪个点。
- **端点凭图判断。** 图上实心点、空心点容易画错，也容易看错。像例 2 那样，把端点值代回原题检验一次。
- **限定了范围还只用判别式。** 判别式只回答“有没有实数根、有几个”，不回答根在哪里。题目限定了 x 的范围，要看图象在这个范围里的那一段。
- **读图时漏掉一段。** 双曲线有两支，比较大小时 y 轴两侧要分别看；$x=0$ 处函数没有意义，不能算进答案。
- **用图代替计算。** 图只告诉我们答案的方向和个数。交点坐标、最值、范围的端点，都要回到方程和不等式算出来。画得不准的图还会误导，比如两个靠得很近的交点，可能被看成一个。

联系

- **有理数：** 绝对值是数轴上的距离，是以形助数的第一个例子。见第二部分“有理数”（第 36 页）。
- **不等式：** 解集画在数轴上，不等式组的解集是公共部分。见第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）。
- **函数与方程：** 方程的解是图象交点的横坐标，不等式的解集是图象在上方的部分。见第七部分“一次函数”（第 206 页）、第七部分“反比例函数”（第 212 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **判别式：** 判别式的正负对应抛物线与直线交点的个数。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **面积模型：** 乘法公式、配方都能画成正方形的拼图。见第三部分“整式的乘法”（第 62 页）和第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **最短路径：** 两段距离之和最小，用轴对称把折线拉直。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **反方向：** 把几何问题写成数来算，见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。

真题： 2026 年第 16 题（第 360 页）、2026 年第 22 题（第 365 页）、2025 年第 22 题（第 378 页）、2024 年第 5 题（第 383 页）、

2024 年第 10 题（第 384 页）。

以数解形

> 对应人教版七年级下册第九章、八年级下册第二十章、第二十一章和第二十三章，九年级上册第二十六章、第二十九章和第三十章，综合运用。

以数解形，就是给图形装上坐标，把点写成数对、把线写成方程，于是长度、面积、位置关系都能按固定的步骤算出来。

从哪里来

几何证明常常要先想到一条辅助线，想不到就卡住。坐标系给了另一条路：点有了坐标，几何关系就能翻译成式子，接下来只要计算。

几何的说法	用坐标说
点	有序数对 (x, y)
水平线段、竖直线段的长	横坐标之差、纵坐标之差（大减小）
两点间的距离	勾股定理：$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
线段的中点	横、纵坐标分别取平均数
直线	一次函数 $y=kx+b$
两条直线平行	k 相等（b 不等）
点在图象上	点的坐标满足解析式
两条线的交点	两个解析式组成的方程组的解

用坐标解几何题的步骤是：**建坐标系、设坐标 → 把条件翻译成式子 → 计算 → 把结果翻译回几何。** 前后两步是“翻译”，中间一步是代数。

距离：勾股定理的坐标写法

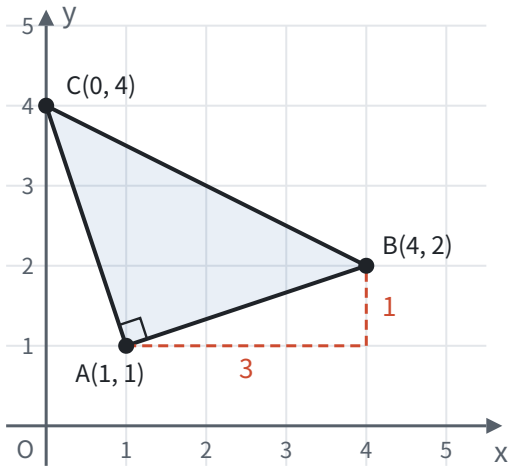
设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$。过 A 画水平线、过 B 画竖直线，交出一个直角三角形：水平直角边长 $|x_1-x_2|$，竖直直角边长 $|y_1-y_2|$，斜边就是 AB。由勾股定理，

$$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

平方以后正负号不影响结果，所以公式里不用写绝对值。

例 1 已知 $A(1,1)$、$B(4,2)$、$C(0,4)$，判断 $\triangle ABC$ 的形状。

思路： 判断形状就是比较边的长短、看有没有直角。三边的平方都能用距离公式算出来；比较平方就够了，不用开方。



解：

$$AB^2 = (4-1)^2 + (2-1)^2 = 10,$$
$$AC^2 = (0-1)^2 + (4-1)^2 = 10,$$
$$BC^2 = (0-4)^2 + (4-2)^2 = 20.$$

$AB = AC$；又 $AB^2 + AC^2 = 20 = BC^2$，由勾股定理的逆定理，$\angle A = 90°$。所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。

中点：平行四边形的第四个顶点

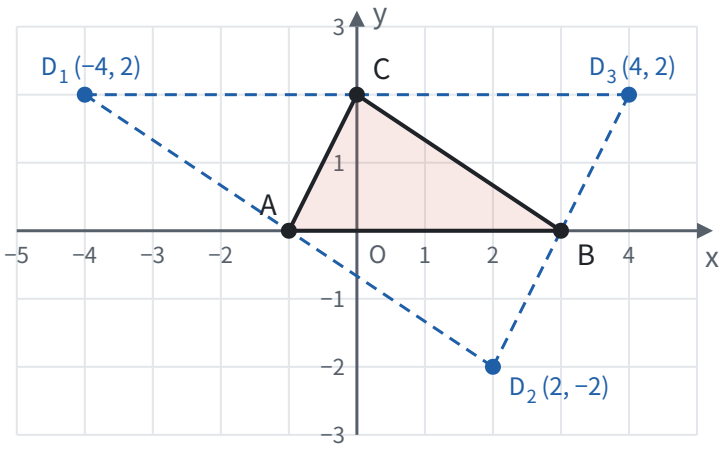
数轴上 a 和 b 的中点是 $(a+b)/2$，它到两端的距离都是 $(|a-b|)/2$。平面上也一样：线段 AB 的中点，横坐标在 x_1、x_2 的正中间，纵坐标在 y_1、y_2 的正中间，所以中点是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

平行四边形的对角线互相平分，也就是两条对角线的中点重合（见第五部分“四边形”（第 157 页））。写成坐标：**平行四边形相对的两个顶点，坐标之和相等。** 比如 $ABCD$ 是平行四边形，AC、BD 是对角线，则 $x_A + x_C = x_B + x_D$，$y_A + y_C = y_B + y_D$。

例 2 已知 $A(-1, 0)$、$B(3, 0)$、$C(0, 2)$。以 A、B、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，求点 D 的坐标。

思路： 题目说“以 A、B、C、D 为顶点”，没有说顶点的顺序，所以不知道 D 和谁相对。D 可以和 A、B、C 中的任何一个相对，要分三种情况（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。每种情况用“相对顶点坐标之和相等”列式。



解： 设 $D(x, y)$。

- D 与 B 相对（AC 是对角线）：$x+3=-1+0$，$y+0=0+2$，得 $D_1(-4, 2)$；
- D 与 C 相对（AB 是对角线）：$x+0=-1+3$，$y+2=0+0$，得 $D_2(2, -2)$；
- D 与 A 相对（BC 是对角线）：$x+(-1)=3+0$，$y+0=0+2$，得 $D_3(4, 2)$。

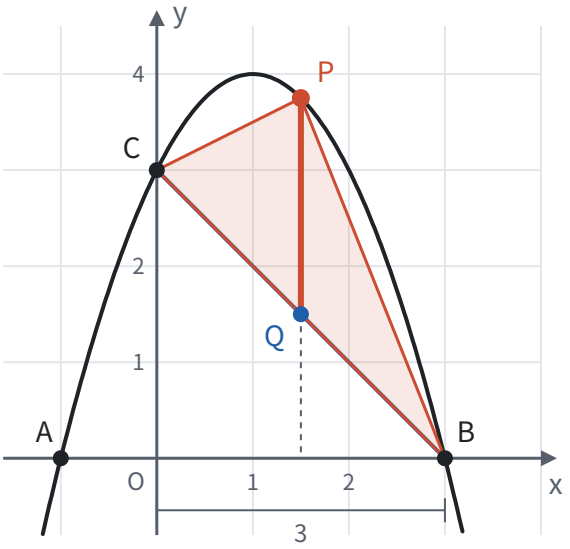
所以点 D 的坐标是 $(-4, 2)$、$(2, -2)$ 或 $(4, 2)$。

面积：竖直的线段最好算

在坐标系里，水平或竖直的线段，长度就是坐标之差；斜着的线段要用距离公式，斜边上的高更难求。所以求面积时，常用一条竖直线把图形分开，让竖直线段当底。

例 3 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（A 在左边），与 y 轴交于点 C。点 P 是直线 BC 上方抛物线上的一个动点。求 $\triangle PBC$ 面积的最大值，以及此时点 P 的坐标。

思路： $\triangle PBC$ 的三条边都是斜的。过 P 作竖直线交 BC 于 Q，把三角形分成 $\triangle PQC$ 和 $\triangle PQB$。两个三角形有公共底 PQ，高分别是 C、B 到直线 PQ 的水平距离，两个高加起来正好是 B、C 的横坐标之差。PQ 是竖直线段，长度就是 P、Q 的纵坐标之差。



解： 令 $y=0$，得 $-x^2+2x+3=0$，$x=-1$ 或 $x=3$，所以 $A(-1, 0)$，$B(3, 0)$；令 $x=0$，得 $C(0, 3)$。

直线 BC 过 $(0,3)$ 和 $(3,0)$，解析式是 $y=-x+3$。

设 $P(t,-t^2+2t+3)$，$0<t<3$，则 $Q(t,-t+3)$。P 在 Q 的上方，

$$PQ=(-t^2+2t+3)-(-t+3)=-t^2+3t.$$

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PQ\cdot t+\frac{1}{2}PQ\cdot(3-t)=\frac{3}{2}PQ$$
$$=-\frac{3}{2}t^2+\frac{9}{2}t=-\frac{3}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}.$$

$-3/2<0$，$t=3/2$ 在 $0<t<3$ 内，所以 $t=3/2$ 时面积最大，最大值是 $27/8$。此时 $-t^2+2t+3=15/4$，点 P 的坐标是 $(3/2,15/4)$。

回顾： 这道题把几何问题（面积）变成了函数问题（二次函数求最值）。“竖直线段的长 = 上面的纵坐标 − 下面的纵坐标”，是坐标系里求面积最常用的一步。

存在性：先设坐标，再列方程

“是否存在一个点，使……”这类问题，做法是：先假设点存在，用一个字母表示它的坐标（点在坐标轴或已知图象上，就只需要一个字母），把条件翻译成方程。方程有解，点就存在，解就是坐标；方程无解，点就不存在。

例 4　已知 $A(1,3)$、$B(5,1)$。在 x 轴上是否存在点 P，使 $\angle APB=90°$？若存在，求出点 P 的坐标。

思路： $\angle APB=90°$，就是 $\triangle APB$ 以 AB 为斜边，三边满足勾股定理。P 在 x 轴上，设 $P(x,0)$，三边的平方都能用 x 表示。

解： 设 $P(x,0)$。

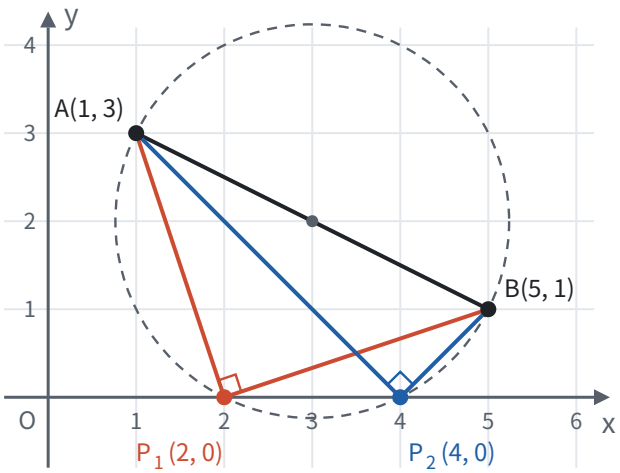
$$PA^2=(x-1)^2+9,\quad PB^2=(x-5)^2+1,\quad AB^2=4^2+2^2=20.$$

由勾股定理及其逆定理，$\angle APB=90°$ 就是 $PA^2+PB^2=AB^2$：

$$(x-1)^2+9+(x-5)^2+1=20.$$

整理得 $2x^2-12x+16=0$，即 $x^2-6x+8=0$，解得 $x=2$ 或 $x=4$。

所以存在，点 P 的坐标是 $(2,0)$ 或 $(4,0)$。



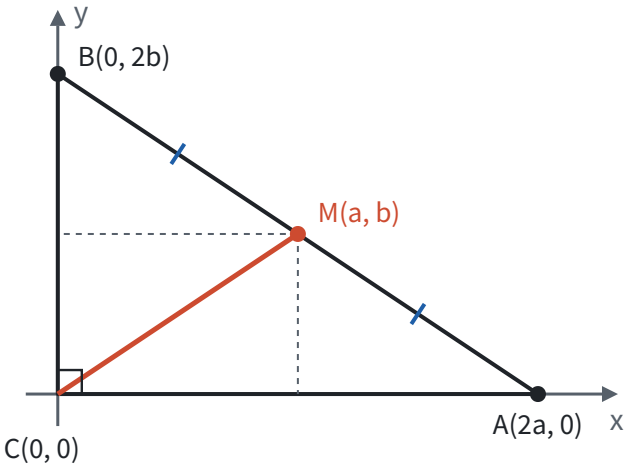
想一想： 为什么恰好两个点？直径所对的圆周角是直角，所以使 $\angle APB=90°$ 的点都在以 AB 为直径的圆上

（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。这个圆的圆心是 AB 的中点 $(3,2)$，半径是 $\sqrt{5}$。圆心到 x 轴的距离 2 小于半径 $\sqrt{5}$，所以圆与 x 轴有两个交点（见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页））。代数这边，方程 $x^2-6x+8=0$ 的判别式 $36-32=4>0$，也是两个根。**交点的个数，和方程根的个数，是同一件事。**

用坐标证明几何结论

例 5　用坐标证明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

思路： 建坐标系要让尽量多的点落在坐标轴上。直角顶点放在原点，两条直角边放在两条坐标轴上。斜边端点的坐标设成 $2a$、$2b$，中点的坐标就不带分数。

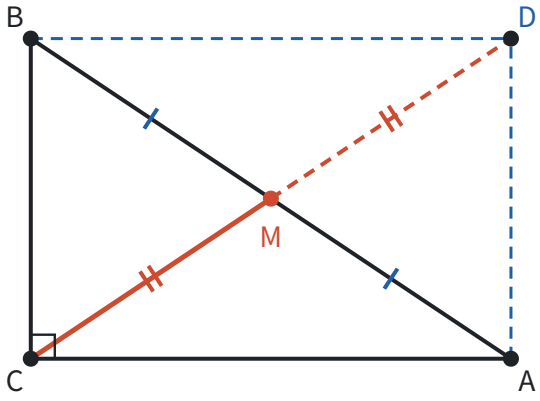


证明： 设 Rt$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$。以 C 为原点，CA、CB 所在直线为 x 轴、y 轴建立坐标系，设 $A(2a,0)$、$B(0,2b)$（$a>0$，$b>0$）。斜边 AB 的中点是 $M(a,b)$。

$$CM=\sqrt{a^2+b^2},\quad AB=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}.$$

所以 $CM=(1/2)AB$。

想一想： 不用坐标的证法是延长 CM 到 D，使 $MD=CM$，证出四边形 $ACBD$ 是矩形，再用矩形的对角线相等（见第五部分“四边形”（第 157 页））。那种证法要先想到辅助线；坐标证法不用想辅助线，但要会选坐标系。两种方法各有长处：几何证法说明了为什么（这个三角形是矩形的一半），坐标证法步骤固定、不容易卡住。



易错点

- **由坐标求长度时带上了负号。** 点 $(2,-3)$ 到 x 轴的距离是 3，不是 −3。竖直线段的长是“上面的纵坐标减下面的纵坐标”，不确定上下时加绝对值。
- **距离公式漏了平方或开方。** AB 不是 $(x_1-x_2)+(y_1-y_2)$；它是直角三角形的斜边，要用勾股定理。
- **只按一种顶点顺序找平行四边形。** “以 A、B、C、D 为顶点”没有规定顺序，三种情况都要算；如果题目写的是“平行四边形 $ABCD$”，顺序已经定了，只有一种。
- **动点坐标用了两个字母。** 点在已知图象上时，纵坐标用横坐标表示，如 $P(t,-t^2+2t+3)$，只留一个未知数。
- **忘了动点的范围。** 例 3 中 P 在 BC 上方，所以 $0<t<3$；求出的最值点要检验是否在范围内。

联系

- **平面直角坐标系：** 点的坐标、坐标和距离是这一页的基础。见第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）。
- **勾股定理：** 距离公式就是坐标系里的勾股定理。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）和第三部分“二次根式”（第 79 页）。
- **四边形：** 平行四边形对角线互相平分，写成坐标就是中点重合。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **函数：** 直线用一次函数表示，面积的最大值用二次函数求。见第七部分“一次函数”（第 206 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **圆：** 直径所对的圆周角是直角；圆与直线交点的个数对应方程根的个数。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）和第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **分类讨论：** 平行四边形的第四个顶点、存在性问题常常要分情况。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。
- **反方向：** 把代数问题画成图来想，见第十一部分“以形助数”（第 311 页）。

真题： 2026 年第 15 题（第 359 页）、2025 年第 18 题（第 374 页）、2025 年第 21 题（第 377 页）、2024 年第 14 题（第 386 页）、2024 年第 18 题（第 388 页）。

动点与函数 ★

> 对应人教版八年级下册第二十二章和第二十三章、九年级上册第二十六章，以及各册几何章节中的动点问题。

点在图形上运动时，和它有关的长度、面积也跟着变化：把运动的时间或路程当作自变量，把要求的量当作函数，动点问题就变成了函数问题。

从哪里来

函数讲的是“一个量变，另一个量跟着变，而且每个值只对应一个结果”（见第七部分“函数”（第 201 页））。动点正是这样：每一时刻，点只有一个位置；点的位置定了，和它有关的线段长、三角形面积也就定了。

所以解动点问题，先回答三个问题：

1. **自变量是什么，范围多大？** 通常是运动时间 t 或走过的路程 x，从出发到停止。
2. **关系在哪里改变？** 点拐过图形的顶点、两个动点中有一个停下，关系式就可能换一个。这些时刻叫**转折点**，要在这里分段。
3. **每一段是什么函数？** 看要求的量怎样由变化的长度算出来。

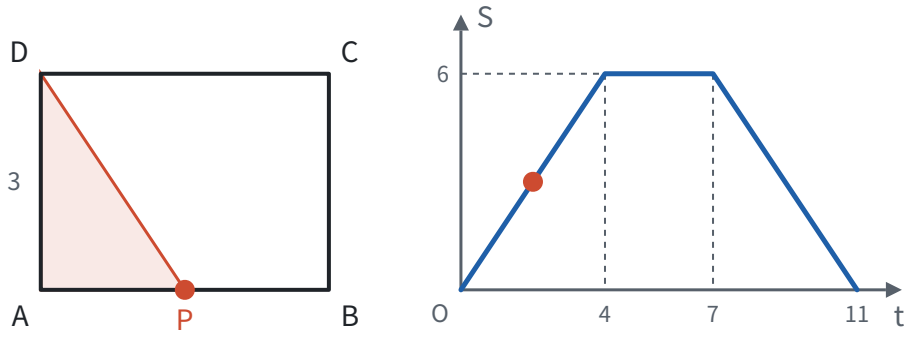
运动的情况	常见的量	函数的类型
一个点沿直线匀速运动，另一条边不变	以不变的边为底的三角形面积、到定点的水平或竖直距离	一次函数，每一段是一条线段
两个点同时运动，两条边都在变	两条变化的边围成的面积	二次函数
一条直线平移，扫过一个图形	扫过部分的面积	分段的二次函数

写关系：按转折点分段

例 1 矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$。点 P 从 A 出发，沿 $A\to B\to C\to D$ 以每秒 1 个单位的速度运动，到 D 停止。设运动时间为 t 秒，$\triangle APD$ 的面积为 S。写出 S 与 t 的函数关系式，并画出图象。

思路： $\triangle APD$ 的边 $AD=BC=3$ 不变，把它当作底，高就是点 P 到 AD 的距离。P 在三条边上时，这个距离的算法不同，所以按 P 到达 B、C 的时刻分段：

- P 到 B 用时 $4\div 1=4$（秒），到 C 再用 3 秒（共 7 秒），到 D 再用 4 秒（共 11 秒）。



解：

- P 在 AB 上（$0<t\leqslant 4$）：高 $=AP=t$，$S=1/2\times 3\times t=(3/2)t$；
- P 在 BC 上（$4<t\leqslant 7$）：高 $=AB=4$，$S=1/2\times 3\times 4=6$；
- P 在 CD 上（$7<t<11$）：高 $=DP=4-(t-7)=11-t$，$S=(3/2)(11-t)$。

$$S=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0<t\leq 4,\\ 6, & 4<t\leq 7,\\ \frac{3}{2}(11-t), & 7<t<11.\end{cases}$$

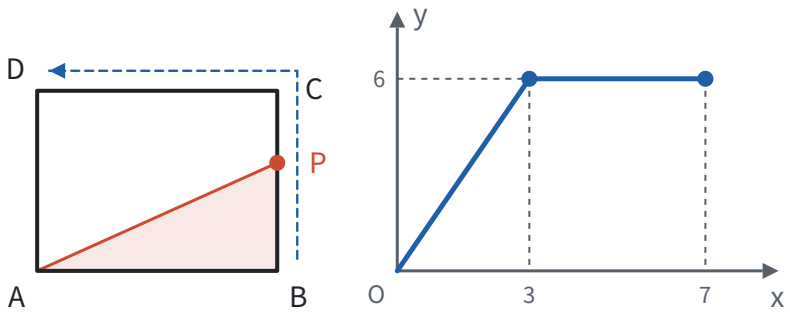
$t=0$ 和 $t=11$ 时 P 与 A 或 D 重合，三角形不存在，所以不取端点。

图象是三段线段组成的折线（上图右边）。每一段的样子都能从运动看出来：P 离 AD 越来越远，面积上升；P 在 BC 上时离 AD 的距离不变，面积不变，图象是平的；P 回头靠近 AD，面积下降。

读图：从图象反推运动

反过来，给出图象，也能读出图形的尺寸。

例 2　矩形 $ABCD$ 中，点 P 从 B 出发，沿 $B\to C\to D$ 运动。设 P 走过的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 y，y 与 x 的函数图象如下图右边所示。求 AB、BC 的长和矩形 $ABCD$ 的面积。



思路： 图象的转折点对应 P 经过矩形的顶点。先把图象的每一段翻译成运动：

- $0\leqslant x\leqslant 3$，y 从 0 均匀增大到 6：P 在 BC 上，$\triangle ABP$ 的底 AB 不变，高 $BP=x$ 在增大；
- $3\leqslant x\leqslant 7$，y 保持 6 不变：P 在 CD 上，到 AB 的距离始终是 BC，面积不变。

解： 由转折点，P 走到 C 时 $x=3$，所以 $BC=3$；从 C 到 D 走了 $7-3=4$，所以 $CD=4$，$AB=CD=4$。矩形的面积是 $4\times 3=12$。

检验： P 在 C 时，$y=(1/2)AB\cdot BC=1/2\times 4\times 3=6$，和图象上的最高值一致。

判断一个动点问题的图象对不对，也按同样的顺序看：

1. **找转折点：** 图象在哪里拐弯，是否正好对应动点到达顶点的时刻；
2. **看每段的类型：** 是平的、斜的直线，还是曲线（二次函数）；曲线向上弯还是向下弯；
3. **看特殊点的值：** 起点、终点、转折点的函数值对不对。

两个动点：面积是二次函数

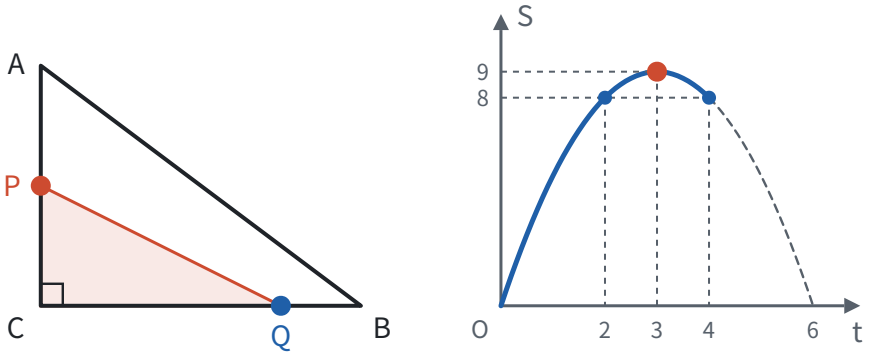
例 3　在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm。点 P 从 A 出发沿 AC 向 C 以 1 cm/s 的速度运动，同时点 Q 从 C 出发沿 CB 向 B 以 2 cm/s 的速度运动，其中一点到达终点时，另一点也停止。设运动时间为 t s，$\triangle PCQ$ 的面积为 S cm^2。

（1）求 S 与 t 的函数关系式，写出 t 的取值范围；

（2）t 为何值时，S 最大？最大是多少？

（3）t 为何值时，$S=8$？

思路： $\triangle PCQ$ 是直角三角形，两条直角边 PC、CQ 都随 t 变化，每条都是 t 的一次式，相乘就是二次函数。取值范围由先到终点的那个点决定。



解： （1）$PC=6-t$，$CQ=2t$。P 到 C 要 6 s，Q 到 B 要 $8\div 2=4$（s），所以运动 4 s 后停止，$0<t\leqslant 4$。

$$S=\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=-t^2+6t\quad(0<t\leq 4).$$

（2）配方，$S=-(t-3)^2+9$。$t=3$ 在 $0<t\leqslant 4$ 内，所以 $t=3$ 时 S 最大，最大值是 9。

（3）令 $-t^2+6t=8$，即 $t^2-6t+8=0$，解得 $t=2$ 或 $t=4$。两个值都在 $0<t\leqslant 4$ 内，所以 $t=2$ 或 $t=4$。

检验： $t=4$ 时，$PC=2$，$CQ=8$（Q 正好到达 B），$S=1/2\times 2\times 8=8$。

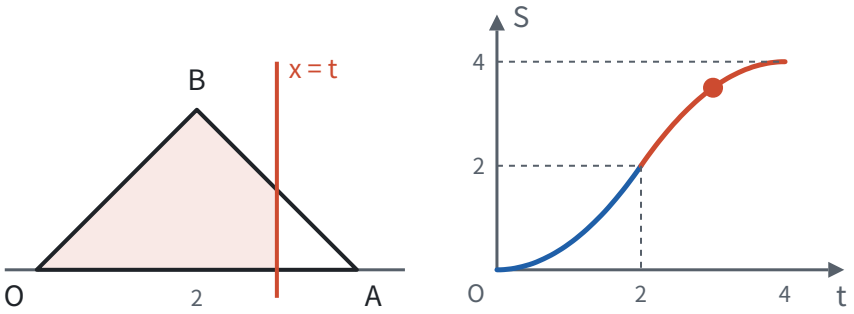
想一想： 如果把 BC 改成 6 cm，Q 到 B 只要 3 s，取值范围变成 $0<t\leqslant 3$。关系式没变，第（3）问解方程仍得 $t=2$ 或 $t=4$，但 $t=4$ 时 Q 已经停了，只能取 $t=2$。上图中 $t>4$ 的虚线部分也是这样：解析式还能算，但点已经不动了，没有意义。**解析式来自图形，取值范围也来自图形，两样都要写。**

动线：扫过的面积

动的不一定是点，也可以是一条线。道理一样：找到转折点，分段写关系。

例 4 在平面直角坐标系中，$O(0,0)$、$A(4,0)$、$B(2,2)$。直线 $x=t$（$0\leqslant t\leqslant 4$）从左向右平移，$\triangle OAB$ 在这条直线左侧部分的面积为 S。求 S 与 t 的函数关系式。

思路： 直线经过 B（$t=2$）时，左侧部分的形状从三角形变成四边形，这是转折点。OB 所在直线是 $y=x$，AB 所在直线是 $y=-x+4$，直线 $x=t$ 与它们的交点都能用 t 表示。



解： $\triangle OAB$ 的面积是 $1/2\times 4\times 2=4$。

- $0\leqslant t\leqslant 2$：左侧是直角三角形，两条直角边都是 t（交点是 (t,t)），$S=(1/2)t^2$；
- $2<t\leqslant 4$：右侧剩下一个直角三角形，两条直角边都是 $4-t$（交点是 $(t,4-t)$），$S=4-(1/2)(4-t)^2$。

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\le t\le 2,\\ 4-\frac{1}{2}(4-t)^2, & 2<t\le 4.\end{cases}$$

检验： $t=2$ 时两个式子都等于 2，图象在这里连起来；$t=4$ 时 $S=4$，正好是整个三角形。

图象由两段抛物线组成，先越来越陡，过了 $t=2$ 又越来越平。原因在图形里：直线在三角形内截出的线段越长，每移动一点扫过的面积就越多；这条线段在 $t=2$ 时最长，所以 S 在这里增加得最快。

易错点

- **不分段。** 动点拐过顶点、某个点停下，关系式就可能改变。写关系式前先把转折点的时刻全部算出来。
- **取值范围写错。** 两个点同时出发时，先到终点的那个决定停止时间；三角形退化成线段的时刻（面积为 0）要看题意决定取不取。
- **把速度忘了。** 速度是 2 时，t 秒走过的路程是 $2t$，不是 t。
- **求出 t 不检验。** 解方程得到的 t 要落在取值范围内，否则舍去。
- **判断图象只看升降。** 同样是上升，直线和抛物线不一样；抛物线向上弯还是向下弯也不一样。还要核对起点、转折点的函数值。

联系

- **函数：** 动点问题是“变量与对应”最直观的例子。见第七部分“函数”（第 201 页）。
- **一次函数、二次函数：** 一个量在变，得到一次函数；两个量同时变再相乘，得到二次函数；最值用配方求。见第七部分“一次函数”（第 206 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **一元二次方程：** “面积等于某个值”就是解方程，解出来要检验范围。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **四边形、勾股定理：** 动点经过的图形，边长、高由图形的性质决定。见第五部分“四边形”（第 157 页）和第五部分“勾股定理”（第 149 页）。
- **以数解形：** 在坐标系里设动点的坐标，用竖直线段求面积。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。
- **以形助数：** 水平直线 $y=m$ 上下移动，看它和图象有几个交点，也是一种“动线”。见第十一部分“以形助数”（第 311 页）。
- **分类讨论：** 分段本身就是按点的位置分类。见第十一部分“分类讨论”（第 332 页）。

真题： 2026 年第 20 题（第 362 页）、2023 年第 10 题（第 399 页）。

方程思想与建模

> 对应人教版七年级上册第五章、七年级下册第十章和第十一章、八年级上册第十八章 18.5 节、八年级下册第二十三章、九年级上册第二十五章和第二十六章中的实际问题。

方程思想，就是把不知道的量先设出来，让它和已知的量一样参与运算，再找出同一个量的两种表示，让它们相等。 把这种想法推广到不等关系和变化关系，就是建立数学模型：把实际问题翻译成方程、不等式或函数，算完再翻译回去。

从哪里来

小学解应用题用算术方法：要求的量不能参与运算，只能从已知的量出发，一步一步凑出它，每一步都要想好先算什么。方程换了一个方向：**把要求的量设成 x，当作已经知道，顺着题目的意思往下写**，写到同一个量出现两种表示时，就得到了方程（见第四部分“一元一次方程”（第 87 页））。

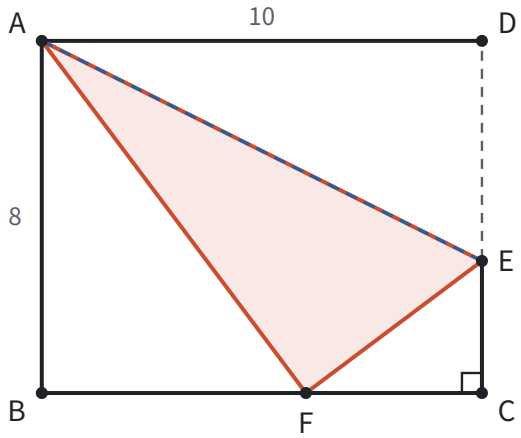
这个想法不只用在应用题里。几何里求一条线段的长，找不到直接算的办法时，也可以把它设成 x，再用勾股定理、相似、面积找出一个等量关系。

实际问题里的数量关系有三种，对应三种模型：

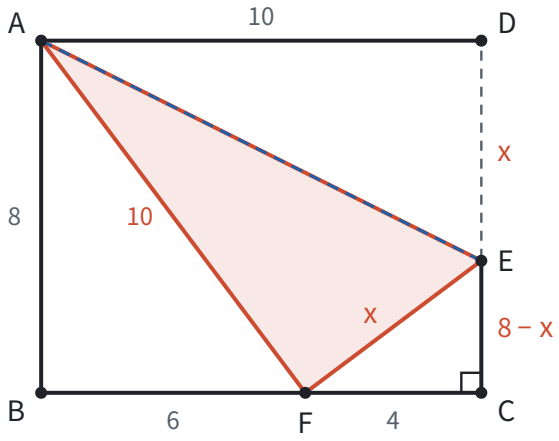
题目里的说法	数量关系	模型	得到什么
相等、恰好、共、是……的几倍	等量关系	方程（组）	确定的值
至少、不超过、不低于、多于	不等关系	不等式（组）	一个范围
随着……变化、怎样最省、何时最大	两个变量的对应关系	函数	变化规律、最大值和最小值、方案比较

几何里的方程思想

例 1 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=10$。沿 AE 折叠，使点 D 落在 BC 边上的点 F 处，折痕 AE 的端点 E 在 CD 上。求 DE 的长。



思路： 折叠就是轴对称，折叠前后的图形全等：$\triangle AFE \cong \triangle ADE$，所以 $AF=AD$，$EF=DE$。要求的 DE 没有直接的算法，把它设成 x，那么 EF、EC 都能用 x 表示，它们都在直角三角形 ECF 里，勾股定理正好给出一个方程。还缺 FC：先在直角三角形 ABF 里算出 BF。



解： 由折叠，$AF=AD=BC=10$，$EF=DE$。

在 Rt$\triangle ABF$ 中，$BF=\sqrt{(AF^2-AB^2)}=\sqrt{(100-64)}=6$，所以 $FC=BC-BF=4$。

设 $DE=x$，则 $EF=x$，$EC=CD-DE=8-x$。在 Rt$\triangle ECF$ 中，由勾股定理，

$$(8-x)^2+4^2=x^2.$$

展开得 $64-16x+x^2+16=x^2$，即 $16x=80$，$x=5$。所以 $DE=5$。

回顾： 勾股定理是直角三角形三条边之间的一个等式。三条边里只要能都用同一个未知数表示，它就是一个方程。几何里常用来列方程的等量关系还有：相似三角形的对应边成比例、同一个图形的面积用两种方法算、角的和（如三角形内角和）。

方程组、不等式、函数：一步接一步

例 2　学校计划购买甲、乙两种树苗。买 3 棵甲种和 2 棵乙种共需 170 元，买 2 棵甲种和 3 棵乙种共需 180 元。

（1）两种树苗的单价各是多少元？

（2）学校要购买两种树苗共 50 棵，总费用不超过 1800 元，并且甲种树苗的数量不超过乙种的 2 倍。有几种购买方案？哪种方案的费用最低？

思路： 三种关系依次出现：第（1）问有两个未知的单价、两个“共需”的等量关系，列方程组；第（2）问“不超过”是不等关系，列不等式组求出甲种树苗数量的范围；“费用最低”是在这个范围里比较，总费用随甲种树苗的数量变化，写成函数。

解：（1）设甲种树苗每棵 x 元，乙种每棵 y 元。

$$\begin{cases}3x+2y=170,\\2x+3y=180.\end{cases}$$

两式相加得 $5x+5y=350$，即 $x+y=70$；第二式减第一式得 $-x+y=10$。解得 $x=30$，$y=40$。

答：甲种树苗每棵 30 元，乙种每棵 40 元。

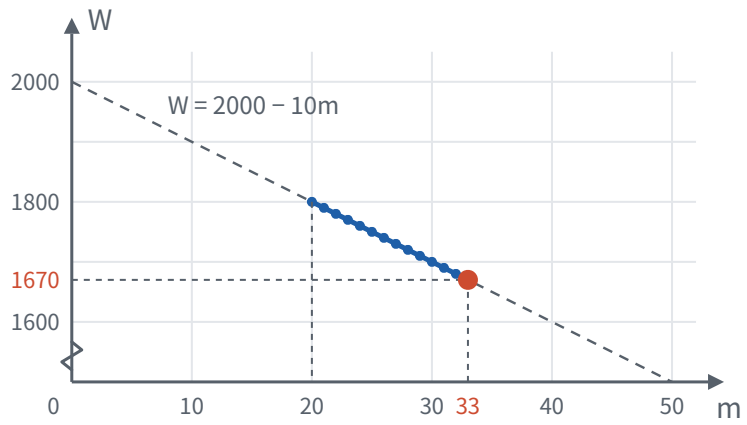
（2）设购买甲种树苗 m 棵，则乙种 $(50-m)$ 棵。

$$\begin{cases}30m+40(50-m)\le 1800,\\m\le 2(50-m).\end{cases}$$

由第一个不等式，$2000-10m\leqslant 1800$，得 $m\geqslant 20$；由第二个不等式，$3m\leqslant 100$，得 $m\leqslant 331/3$。m 是整数，所以 $20\leqslant m\leqslant 33$，共有 14 种方案。

总费用 $W=30m+40(50-m)=2000-10m$。W 是 m 的一次函数，$k=-10<0$，W 随 m 的增大而减小，所以 $m=33$ 时 W 最小，$W=2000-330=1670$。

答：共有 14 种购买方案；购买甲种 33 棵、乙种 17 棵时费用最低，为 1670 元。



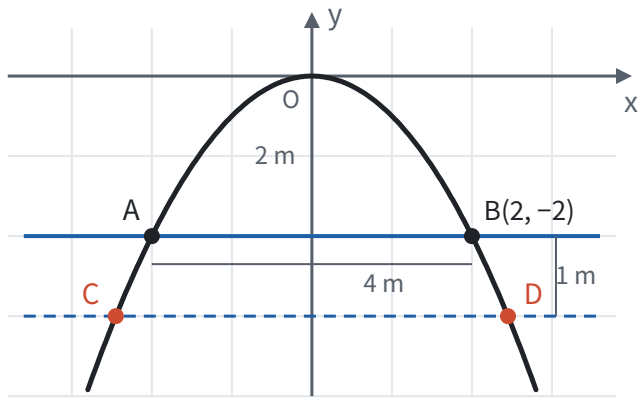
回顾： 一道题里用了三种模型，各管一件事：方程组求出确定的单价，不等式组划出可行的范围，函数在范围里挑出最好的方案。函数的图象是一条下降的直线，可行的方案只是其中一段上的 14 个整数点，最低点在这一段的右端。

函数模型：先建坐标系

实际问题里的曲线（拱桥、抛物线的轨迹）要写出解析式，得先放进坐标系。坐标系可以自己选，选得好，解析式就简单。

例 3　一座拱桥的桥洞是抛物线形。水面宽 4 m 时，拱顶离水面 2 m。水面下降 1 m 后，水面宽多少米？（精确到 0.1 m。参考数据：$\sqrt{6}\approx 2.45$）

思路： 以拱顶为原点、对称轴为 y 轴建立坐标系，抛物线的顶点在原点，解析式可以设成最简单的 $y=ax^2$，只有一个待定系数。水面在拱顶下方，所以水面上的点纵坐标是负数。

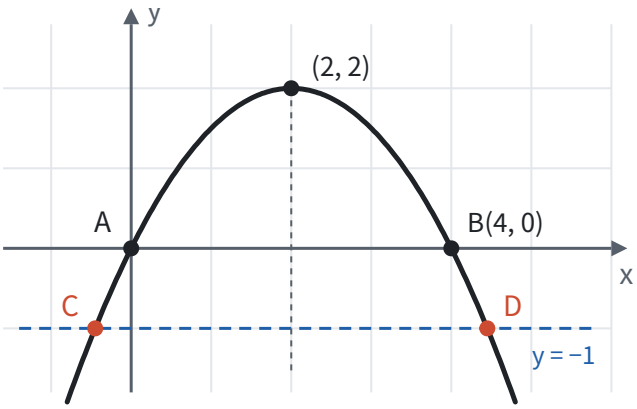


解： 建立如图所示的坐标系，设抛物线为 $y=ax^2$。水面宽 4 m、拱顶离水面 2 m，所以点 $B(2,-2)$ 在抛物线上：$-2=4a$，$a=-1/2$，抛物线为 $y=-(1/2)x^2$。

水面下降 1 m 后，水面上的点纵坐标是 −3。令 $-(1/2)x^2=-3$，得 $x^2=6$，$x=\pm\sqrt{6}$。所以水面宽 $CD=2\sqrt{6}\approx 2\times 2.45=4.9$（m）。

答：水面宽 $2\sqrt{6}$ m，约 4.9 m。

想一想： 如果以水面 AB 的左端 A 为原点、水面为 x 轴，顶点是 $(2,2)$，解析式是 $y=-(1/2)(x-2)^2+2$，水面下降后令 $y=-1$，得 $(x-2)^2=6$，两个交点的距离仍是 $2\sqrt{6}$。坐标系是我们加上去的，换一种放法，解析式变了，答案不变；选顶点为原点，只是让计算最省事。



建模的步骤

1. **审题：** 找出已知量、未知量，圈出表示关系的词（“共”“恰好”“不超过”“最多”）。
2. **选模型：** 等量关系列方程，不等关系列不等式，问变化和最值写函数；有图形的，先想图形里有什么等量关系，需要时建坐标系。
3. **设未知数：** 可以直接设要求的量，也可以设中间的量；设得不同，列出的方程类型也可能不同（见第四部分“分式方程”（第 100 页））。
4. **列式：** 同一个量的两种表示相等，或者满足不等关系，或者写出函数关系式和自变量的范围。
5. **求解。**
6. **检验并作答：** 一查是不是方程（不等式）的解；二查是否符合实际，比如数量是正整数、长度是正数、在题目给的范围里。

易错点

- **单位不统一。** 分钟和小时、厘米和米混在一起列式。列式前先把单位统一。
- **关系词翻译错。** “不超过”是 $\leqslant$，“少于”是 $<$，“至少”是 $\geqslant$。
- **取整数时方向错。** $m\leqslant 331/3$ 的整数解是 $m\leqslant 33$；$m\geqslant 19.5$ 的整数解是 $m\geqslant 20$。在数轴上看一下往哪边取。
- **函数最值只看顶点或只看单调性。** 最值要在自变量的范围里找：一次函数看范围的端点，二次函数先看顶点在不在范围里。
- **建坐标系后点的坐标符号写错。** 例 3 以拱顶为原点，水面在拱顶下方，纵坐标是负数，水面宽 4 m 的右端点是 $B(2,-2)$；写成 $(2,2)$ 会得到开口向上的抛物线。
- **不检验实际意义。** 算出的棵数不是整数、长度是负数、时间超出范围，都要舍去或调整。

联系

- **方程和不等式：** 各类方程、不等式的列法和解法。见第四部分“一元一次方程”（第 87 页）、第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第四部分“分式方程”（第 100 页）和第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **函数：** 方案比较用一次函数，最大值、最小值常用二次函数。见第七部分“一次函数”（第 206 页）和第七部分“二次函数”（第 218 页）。
- **勾股定理、相似：** 几何里列方程最常用的等量关系。见第五部分“勾股定理”（第 149 页）和第八部分“相似”（第 230 页）。
- **翻折：** 折叠是轴对称，折叠前后图形全等。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **以数解形：** 给实际物体建立坐标系，就是用数来描述形。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。
- **动点与函数：** 动点问题也是建模：从图形里找出变量之间的关系。见第十一部分“动点与函数”（第 323 页）。

真题： 2026 年第 18 题（第 361 页）、2023 年第 21 题（第 404 页）。

分类讨论 ★

> 对应人教版七年级上册第一章、八年级上册第十五章、九年级上册第二十五章和第二十九章、九年级下册“相似”一章等，散见各册。

题目的条件不能唯一确定图形的位置、对应关系或式子的符号时，要把所有可能的情况都列出来，一种一种地求解、检验，最后合在一起作答，这就是分类讨论。

从哪里来

分类讨论不是一种题型，而是条件“没说死”时的必然结果。需要分类的原因主要有三种：

原因	例子
概念本身分情况	绝对值：$a \geqslant 0$ 时 $\lvert a\rvert = a$，$a < 0$ 时 $\lvert a\rvert = -a$；方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中 a 是否为 0，决定它是不是一元二次方程
对应关系没有说明	等腰三角形哪条边是腰；两个三角形相似，哪个角和哪个角对应；平行四边形哪两个顶点相对
图形的位置不确定	点在线段上还是在延长线上；两条弦在圆心同侧还是两侧；三角形的高在形内还是形外

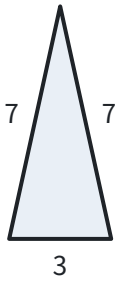
分类时守住三条：

1. **标准统一：** 按同一个标准分，比如都按“哪个点是顶角的顶点”分，不要一会儿按边、一会儿按位置。
2. **不重不漏：** 各种情况合起来是全部可能，彼此不重叠。
3. **逐一检验：** 每种情况算出的结果，都要代回去看是否真的成立。

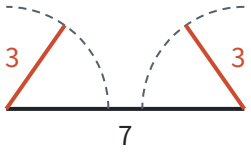
等腰三角形：哪条边是腰

例 1　等腰三角形的两条边长分别是 3 和 7，求它的周长。

思路： 没说哪条是腰，分两种情况。等腰三角形的三边里有两条相等，还要满足三边关系：任意两边之和大于第三边（见第五部分“三角形”（第 128 页））。



腰 7，底 3



腰 3，底 7：围不成三角形

解：

- 腰长为 3：三边是 3、3、7。$3+3=6<7$，围不成三角形，舍去。
- 腰长为 7：三边是 7、7、3。$7+3>7$，能围成三角形，周长是 $7+7+3=17$。

所以周长是 17。

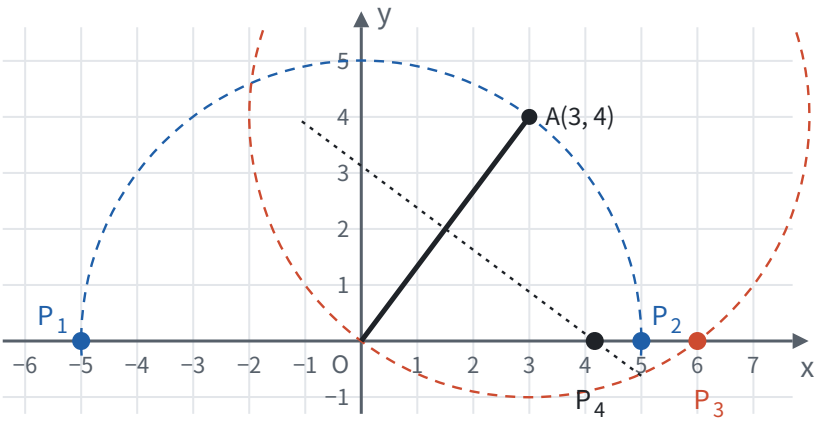
同样的道理，“等腰三角形有一个角是 40°”也要分两种：40° 是顶角时，底角是 70°；40° 是底角时，顶角是 100°。两种都成立。

例 2　在平面直角坐标系中，O 是原点，点 $A(3,4)$。点 P 在 x 轴上，且 $\triangle OAP$ 是等腰三角形。求点 P 的坐标。

思路： 按“哪个点是顶角的顶点”分三种：O、A 或 P。每种情况对应一个几何图形：

- O 是顶点，$OP=OA$：P 在以 O 为圆心、OA 为半径的圆上；
- A 是顶点，$AP=AO$：P 在以 A 为圆心、AO 为半径的圆上；
- P 是顶点，$PO=PA$：P 在 OA 的垂直平分线上（见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页））。

这两个圆和一条直线与 x 轴的交点，就是要找的点。再用坐标算出来。



解： $OA=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$。设 $P(x,0)$，则 $OP=|x|$，$PA^2=(x-3)^2+16$。

- $OP=OA$：$|x|=5$，$x=\pm5$，得 $P_1(-5,0)$、$P_2(5,0)$。
- $AP=AO$：$(x-3)^2+16=25$，$x=0$ 或 $x=6$。$x=0$ 时 P 与 O 重合，不是三角形，舍去；得 $P_3(6,0)$。
- $PO=PA$：$x^2=(x-3)^2+16$，$0=-6x+25$，$x=25/6$，得 $P_4(25/6,0)$。

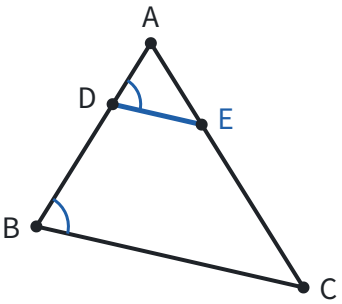
所以点 P 的坐标是 $(-5,0)$、$(5,0)$、$(6,0)$ 或 $(25/6,0)$。

回顾： 按顶点分类，三种情况正好对应“哪两条边相等”，不重也不漏。每种情况先想图形（圆或垂直平分线），就知道大概有几个点、在哪里；再用坐标列方程，把点算准（见第十一部分“以数解形”（第 318 页））。

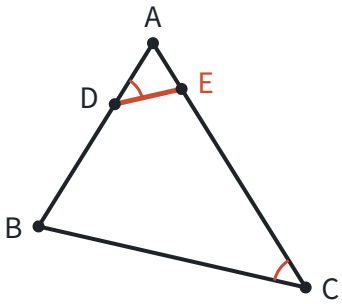
相似：对应关系不唯一

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，点 D 在 AB 上，$AD=2$。点 E 在 AC 上，且以 A、D、E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求 AE 的长。

思路： 两个三角形有公共角 $\angle A$，于是 A 对应 A。剩下 D 可能对应 B，也可能对应 C。两种对应，两组比例式（见第八部分“相似”（第 230 页））。



DE // BC



∠ADE = ∠C

解：

- D 对应 B，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$：$AD/(AB)=AE/(AC)$，即 $2/6=AE/8$，$AE=8/3$。
- D 对应 C，$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$：$AD/(AC)=AE/(AB)$，即 $2/8=AE/6$，$AE=3/2$。

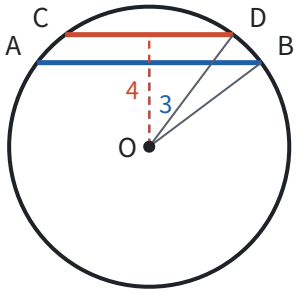
两个值都小于 $AC=8$，E 都在 AC 上。所以 $AE=8/3$ 或 $3/2$。

注意： 如果题目写的是“$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$”，字母顺序已经规定了对应关系，只有第一种情况。要分类的，是“以……为顶点的三角形与……相似”这种没说顺序的说法。

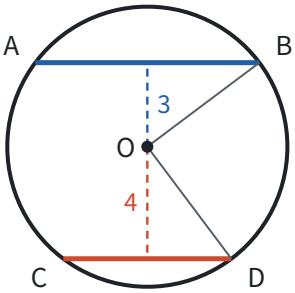
位置不确定：每种位置画一个图

例 4 $\odot O$ 的半径是 5，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦，$AB=8$，$CD=6$。求 AB 与 CD 之间的距离。

思路： 弦长和半径知道了，由垂径定理和勾股定理可以算出圆心到每条弦的距离（见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页））。两条平行弦可能在圆心的同侧，也可能在两侧，两种位置都要画出来。



同侧：$4-3=1$



两侧：$4+3=7$

解： 过 O 作 AB、CD 的垂线。由垂径定理，垂足分别平分 AB、CD，所以圆心到 AB 的距离是 $\sqrt{(5^2-4^2)}=3$，到 CD 的距离是 $\sqrt{(5^2-3^2)}=4$。

- 两弦在圆心同侧：距离是 $4-3=1$；
- 两弦在圆心两侧：距离是 $4+3=7$。

所以 AB 与 CD 之间的距离是 1 或 7。

含字母的式子：按系数分

例 5　关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 有实数根，求 m 的取值范围。

思路： 题目只说“方程”，没说是一元二次方程。二次项系数 $m-1$ 可能是 0，这时方程是一次方程，不能用判别式。按 $m-1$ 是否为 0 分两种情况。

解：

- $m=1$ 时，方程是 $2x+1=0$，有实数根 $x=-1/2$，符合题意。
- $m\neq 1$ 时，方程是一元二次方程，有实数根的条件是 $\Delta=2^2-4(m-1)\times 1=8-4m\geqslant 0$，即 $m\leqslant 2$。结合 $m\neq 1$，得 $m\leqslant 2$ 且 $m\neq 1$。

把两种情况合起来：$m\leqslant 2$。

想一想： 如果题目改成“一元二次方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 有实数根”，就不能取 $m=1$，答案是 $m\leqslant 2$ 且 $m\neq 1$。一个说法的差别，决定了要不要分类。

分完以后怎样合并

分类讨论的结果用“或”连接：每种情况得到的答案，都是整道题的答案，合在一起是它们的全体（例 5 中，$m=1$ 和 $m\leqslant 2$ 且 $m\neq 1$ 合起来是 $m\leqslant 2$）。

要和不等式组区分开：不等式组的几个条件要**同时**满足，取公共部分，用“且”连接。一种情况内部的几个条件用“且”，不同情况之间用“或”。

易错点

- **只画一种图。** 题目的图往往只画了一种位置，但文字条件允许另一种。读完题先问：点的位置、对应关系是不是唯一的？
- **不检验。** 腰长 3、底边 7 围不成三角形；P 和 O 重合就不是三角形。每种情况都要代回原题检查。

- **分类标准不统一，造成重复或遗漏。** 例 2 按“哪个点是顶角的顶点”分，正好三种；如果一会儿按边、一会儿按 P 在左右，容易重复数同一个点。
- **合并时取了公共部分。** 不同情况的结果要合在一起，不是取交集。
- **二次项系数含字母时忘了它可能为 0。** 题目说“方程”时要考虑一次方程的情况；说“一元二次方程”时要加上系数不为 0。

联系

- **绝对值：** 去绝对值要按正负分类，在数轴上就是点在哪一侧。见第二部分“有理数”（第 36 页）和第十一部分“以形助数”（第 311 页）。
- **等腰三角形：** 腰和底、顶角和底角的分类；垂直平分线上的点到两端距离相等。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **三角形的三边关系：** 分类以后检验能否围成三角形。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **相似：** 对应关系决定比例式的写法。见第八部分“相似”（第 230 页）。
- **垂径定理：** 求弦心距。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）。
- **一元二次方程：** 判别式只对一元二次方程适用。见第四部分“一元二次方程”（第 104 页）。
- **以数解形、动点与函数：** 平行四边形的第四个顶点、动点的分段，都是分类讨论。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）和第十一部分“动点与函数”（第 323 页）。

真题： 2026 年第 15 题（第 359 页）、2026 年第 22 题（第 365 页）、2025 年第 15 题（第 373 页）、2023 年第 15 题（第 400 页）、2022 年第 15 题（第 413 页）。

辅助线从哪里来

> 对应人教版八年级上册第十四章和第十五章、八年级下册第二十一章、九年级上册第二十九章和第三十章，散见各册的几何证明。

辅助线不是凭空想出来的：先看结论要用哪个定理，再看这个定理需要什么样的图形，图里缺什么，就添一条线把它补出来。

从哪里来：条件和结论接不上

每个定理都有它的“基本图形”：用全等，要有两个分别包含目标线段或角的三角形；用中位线，要有一个三角形和它两边的中点；用垂径定理，要有半径、弦和弦心距。题目给的图里，条件和结论常常分散在不同的地方，中间缺一座桥，辅助线就是这座桥。

找辅助线，用的是分析法：从结论往回想（见第一部分“怎样证明”（第 29 页））。

1. 要证的结论，通常靠哪个定理得到？
2. 这个定理需要什么图形、什么条件？
3. 图里已经有哪些？还缺什么？
4. 添一条线，把缺的补上。

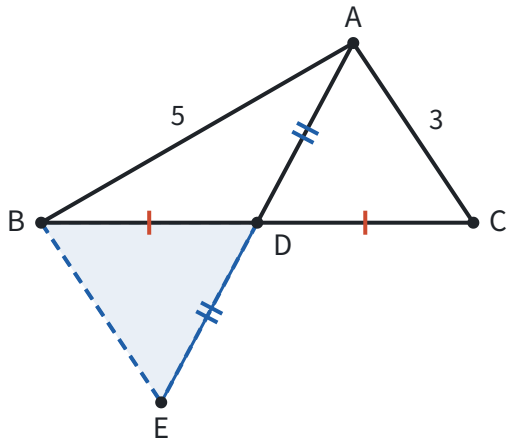
下表是初中几何里最常见的几种情况。表里的每一行都不用背，按上面四步就能想出来：

图中有	想用的结论	常添的线
三角形的中线，要比较边的大小或求范围	全等（SAS）把分散的边移到一个三角形里，再用三边关系	倍长中线
两个中点，或一个中点和一条要求的线段	三角形的中位线	连接两个中点，或再取一条边（对角线）的中点
直角三角形斜边的中点	斜边上的中线等于斜边的一半	连接直角顶点和斜边中点
角平分线	角平分线上的点到角两边的距离相等	从角平分线上的点向两边作垂线
等腰三角形	三线合一	作底边上的高（也是中线、顶角平分线）
两条平行线之间的折线	平行线的性质	过拐点作平行线
直径	直径所对的圆周角是直角	连接直径端点和圆上的点
弦	垂径定理、勾股定理	作弦心距，连接半径
切线	切线垂直于过切点的半径	连接圆心和切点
要求边长或三角函数，但没有直角	勾股定理、锐角三角函数	作高，造出直角三角形

构造全等：倍长中线

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=3$，AD 是 BC 边上的中线。求 AD 的取值范围。

思路： 求一条线段的范围，想到三角形的三边关系。可是 AD、AB、AC 不在同一个三角形里。D 是 BC 的中点，把 $\triangle ADC$ 绕点 D 旋转 $180°$，C 转到 B，A 转到 AD 延长线上的点 E，AC 就被“搬”到了 BE 的位置，和 AB、$AE=2AD$ 围成一个三角形。落到作图上，就是延长 AD 到 E，使 $DE=AD$。



解： 延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 BE。

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

- $CD=BD$（AD 是中线），
- $\angle ADC=\angle EDB$（对顶角相等），

- $AD=ED$（作图），

所以 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$（SAS），$BE=AC=3$。

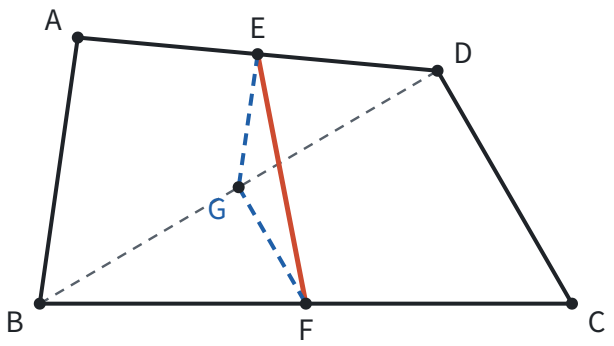
在 $\triangle ABE$ 中，$AB-BE<AE<AB+BE$，即 $2<2AD<8$，所以 $1<AD<4$。

回顾： “倍长中线”不是一个孤立的技巧：中点是旋转 $180°$ 的中心，旋转前后的图形全等（见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页））。图中只要出现中点，又想把中点两侧的边或角移到一起，都可以这样想。

巧用中点：中位线和斜边上的中线

例 2　在四边形 $ABCD$ 中，AB 与 CD 不平行，E、F 分别是 AD、BC 的中点。求证：$EF<(1/2)(AB+CD)$。

思路： 结论里有 $(1/2)AB$ 和 $(1/2)CD$，而“一半”加上“中点”，让人想到三角形的中位线（见第五部分“四边形”（第 157 页））。但 E、F 不在同一个三角形的两边上。连接对角线 BD，取它的中点 G：在 $\triangle ABD$ 里，E、G 是两边中点；在 $\triangle BCD$ 里，G、F 是两边中点。两条中位线分别等于 AB、CD 的一半，再和 EF 围成一个三角形，用三边关系。



证明： 连接 BD，取 BD 的中点 G，连接 EG、GF。

在 $\triangle ABD$ 中，E、G 分别是 AD、BD 的中点，所以 $EG\parallel AB$，$EG=(1/2)AB$。

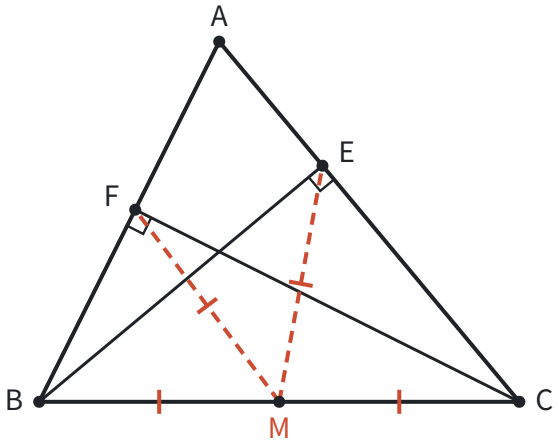
在 $\triangle BCD$ 中，G、F 分别是 BD、BC 的中点，所以 $GF\parallel CD$，$GF=(1/2)CD$。

因为 AB 与 CD 不平行，所以 EG 与 GF 不在同一条直线上，E、G、F 三点构成三角形。由三边关系，

$$EF<EG+GF=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(AB+CD).$$

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，$BE\perp AC$ 于点 E，$CF\perp AB$ 于点 F，M 是 BC 的中点。求证：$ME=MF$。

思路： 图中有两个直角：$\angle BEC=90°$，$\angle BFC=90°$，两个直角三角形 BEC、BFC 共用斜边 BC，而 M 正是斜边的中点。“直角 + 斜边中点”，想到斜边上的中线等于斜边的一半。连接 ME、MF，它们就是两条斜边上的中线。



证明： 连接 ME、MF。

在 Rt$\triangle BEC$ 中，M 是斜边 BC 的中点，所以 $ME=(1/2)BC$。

在 Rt$\triangle BFC$ 中，M 是斜边 BC 的中点，所以 $MF=(1/2)BC$。

所以 $ME=MF$。

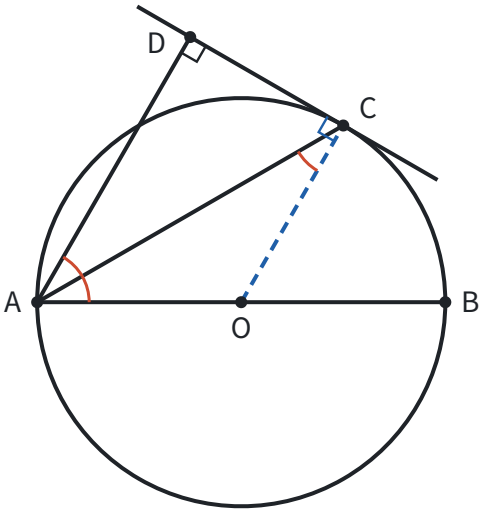
回顾： 例 2、例 3 用的都是“中点”，添的线却不同。区别在于还有什么条件：再找到一个中点，用中位线；有直角，用斜边上的中线；想把边移到一起，倍长中线。

圆中的辅助线

圆的性质几乎都和半径、直径有关，所以圆中的辅助线大多是连半径、作直径、作弦心距。

例 4　AB 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\odot O$ 上一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，AD 垂直于这条切线，垂足为 D。求证：AC 平分 $\angle DAB$。

思路： 有切线，就连接圆心和切点，得到 $OC\perp CD$。又 $AD\perp CD$，两条直线都垂直于 CD，所以 $OC\parallel AD$，平行线带来内错角相等。要证的是 $\angle DAC=\angle CAB$，而 $\angle CAB$ 在等腰三角形 OAC 里（OA、OC 都是半径），两个角可以通过 $\angle ACO$ 联系起来。



证明： 连接 OC。

因为 CD 是 $\odot O$ 的切线，所以 $OC \perp CD$（切线垂直于过切点的半径）。又 $AD \perp CD$，所以 $OC \parallel AD$（垂直于同一条直线的两条直线平行），$\angle DAC = \angle ACO$（两直线平行，内错角相等）。

因为 $OA = OC$，所以 $\angle OAC = \angle ACO$（等边对等角）。

所以 $\angle DAC = \angle OAC$，即 AC 平分 $\angle DAB$。

坐标系里的辅助线

在坐标系里，斜着的线段不好算，常过点作坐标轴的垂线：垂线段的长就是坐标的绝对值，斜线段成了直角三角形的斜边，面积可以用竖直线段分割。求三角形面积时过动点作竖直线，就是这样一条辅助线（见第十一部分“以数解形”（第 318 页））。

易错点

- **辅助线的作法说不清。** 要写成能照着画的话：“延长 AD 到点 E，使 $DE = AD$，连接 BE”。
- **一条辅助线附加了两个条件。** “过 A 作 $AE \perp BC$，交 BC 于中点 E”是错的：过 A 作 BC 的垂线，垂足不一定是中点。过一点作线，只能再附加一个条件（垂直、平行、过另一点……），其余的性质要证明。
- **把添线后“看起来”的关系当成已知。** 例 1 延长中线 AD 到 E、使 $DE = AD$ 以后，图中 $BE \parallel AC$ 看起来很明显，要用它，得先由全等得出 $\angle CAD = \angle BED$，再由内错角相等推出；例 2 中 E、F 是 AD、BC 的中点，G 是对角线 BD 的中点，E、G、F 不共线，是由 AB 与 CD 不平行推出来的。都要有依据，不能从图上看。
- **性质的依据漏写。** 连接 OC 后，$OC \perp CD$ 的理由是“切线垂直于过切点的半径”，要写出来。
- **没有目标地乱添线。** 线越添越多，图越来越乱。先从结论出发，想清楚要用哪个定理，再添。辅助线画成虚线，和原图区分开。

联系

- **怎样证明：** 分析法从结论往回想，是找辅助线的方法。见第一部分“怎样证明”（第 29 页）。
- **全等三角形：** 倍长中线、角平分线作垂线，都是为了构造全等。见第五部分“全等三角形”（第 136 页）。
- **旋转：** 倍长中线就是绕中点旋转 180°。见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）。
- **三角形：** 三边关系、三角形的高。见第五部分“三角形”（第 128 页）。
- **四边形：** 三角形的中位线、直角三角形斜边上的中线。见第五部分“四边形”（第 157 页）。
- **等腰三角形：** 三线合一，作底边上的高。见第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）。
- **平行线：** 拐角问题过拐点作平行线。见第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）。
- **圆：** 连半径、作弦心距、直径所对的圆周角、切线的性质。见第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）和第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）。
- **以数解形：** 坐标法把“想辅助线”换成了“选坐标系、列式计算”，两种方法可以对照着用。见第十一部分“以数解形”（第 318 页）。

真题： 2026 年第 10 题（第 357 页）、2026 年第 21 题（第 364 页）、2025 年第 15 题（第 373 页）、2025 年第 21 题（第 377 页）、2025 年第 23 题（第 379 页）。

学习建议

平时跟着课本的进度读对应的页面，复习时按部分通读；每天的练习重在弄懂和接上联系，而不是多做同一类题。

学习顺序

每页开头都注明了对应人教版教材的哪一章。按年级排，各册对应的页面是：

年级	上册	下册
七年级	第二部分“有理数”（第 36 页）、第二部分“有理数的运算”（第 41 页）、第三部分“代数式”（第 54 页）、第三部分“整式的加减”（第 59 页）、第四部分“一元一次方程”（第 87 页）、第五部分“几何图形初步”（第 113 页）	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第二部分“实数”（第 47 页）、第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）、第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）
八年级	第五部分“三角形”（第 128 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第三部分“整式的乘法”（第 62 页）、第三部分“因式分解”（第 69 页）、第三部分“分式”（第 74 页）、第四部分“分式方程”（第 100 页）	第三部分“二次根式”（第 79 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第七部分“函数”（第 201 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第十部分“数据的分析”（第 294 页）
九年级	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）、第七部分“二次函数”（第 218 页）、第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）、第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）、第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）	第八部分“相似”（第 230 页）、第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第八部分“投影与视图”（第 248 页）、第十部分“概率”（第 302 页）

表里没有列出的页面这样安排：

- **各部分的总览页：** 第一次进入一个部分时先读一遍，看清本部分各页的关系；学完这一部分再读一遍，把各页串起来。
- **第五部分“尺规作图”**（第 169 页）**：** 散在各册，学到哪种作图就读哪一节，学完全等三角形和轴对称后再集中读一遍。
- **数形结合的各页：** 学完相关的内容后读，每页开头注明了用到哪些章节；九年级总复习时再从第十一部分“总览：一体两面”（第 309 页）开始通读一遍。

复习时反过来，按部分的顺序读：同一部分的页面在课本里可能隔着一两个学期，放在一起读，才看得出它们是一条线上的。

第一部分怎样穿插着学

第一部分讲数学的语言与推理，是全书都要用的方法，学到用得上的时候读对应的那一节：

学到	读
用字母表示数、列代数式	第一部分“三种数学语言”（第 12 页）
几何图形初步	第一部分“基本事实”（第 22 页）中的直线和线段
相交线与平行线，第一次写推理	第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）；第一部分“基本事实”（第 22 页）中的垂线和平行线
三角形、全等三角形	第一部分“怎样证明”（第 29 页）；第一部分“基本事实”（第 22 页）中的三角形全等
整式的乘法	第一部分“怎样证明”（第 29 页）中的代数推理
相似	第一部分“基本事实”（第 22 页）中的平行线分线段成比例

更细的对照见第一部分“总览：数学怎样说话、怎样讲理”（第 11 页）。第一部分读过一遍以后，做几何题卡住时再回去看：卡住的地方，往往是分不清条件和结论、不知道推理从哪里开始，或者把图上“看出来”的关系当成了依据。

每天怎么练

- **先读懂，再做题。** 读完一页，合上书，把“从哪里来”和推导自己说一遍。说得出来，再做题；说不出来，回到书上找卡住的那一步。
- **题不在多，每道题做完问三个问题：** 这道题用了哪个定义或定理？为什么想到用它？换一种方法能不能做，比如画个图、设个未知数、建个坐标系？一道题想透，比做五道同样的题更有用。
- **做错了，找到错在哪个概念上。** 不要只把答案改对。是漏了“$k \neq 0$”，是忘了检验增根，还是把性质和判定用反了？每页的“易错点”就是按概念整理的，对照着看。
- **计算要天天练。** 有理数的运算、整式的化简、解方程是后面所有内容的基础，每天做几道，要做到又准又快。算完用另一种方法验算，或者代回去检验。
- **多画图。** 代数题画成数轴、图象、面积图，几何题画出一般的图形，不要只画特殊的情况。
- **每周把学过的接到主线上。** 学完一周，翻一翻这周读过的各页末尾的“联系”，再对照导读（第 7 页）里的几条主线，想一想这周的内容是哪条线上的哪一站，和以前学过的哪一页是同一件事。
- **定期用汇总自测。** 打开附录公式与定理汇总（第 342 页），遮住“内容”一列，看着名称说出结论和它的来由，说不出来的回到原页去看。

公式与定理汇总

这里按部分列出全书的公式、性质和判定定理，每一条后面都链接回推导它的页面。 汇总只写结论，结论从哪里来、为什么成立、什么时候用，要回到原页去看。复习时，试着先不看原页，自己把每一条的来由说出来。

第一部分：数学的语言与推理

名称	内容	出处
基本事实 1	两点确定一条直线	第一部分“基本事实”（第 22 页）

名称	内容	出处
基本事实 2	两点之间，线段最短	第一部分“基本事实”（第 22 页）
基本事实 3	同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直	第一部分“基本事实”（第 22 页）
基本事实 4（平行公理）	过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行	第一部分“基本事实”（第 22 页）
基本事实 5	两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行	第一部分“基本事实”（第 22 页）
基本事实 6～8	两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（SAS）；两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（ASA）；三边分别相等的两个三角形全等（SSS）	第一部分“基本事实”（第 22 页）
基本事实 9	两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例	第一部分“基本事实”（第 22 页）
平行公理的推论	平行于同一条直线的两条直线互相平行	第一部分“基本事实”（第 22 页）
逆命题	把命题的条件和结论互换得到逆命题；原命题是真命题，逆命题不一定是真命题	第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）
反证法	假设结论不成立，推出矛盾，说明假设不成立，所以结论成立	第一部分“怎样证明”（第 29 页）

第二部分：数

名称	内容	出处
有理数	整数和分数统称有理数，都能写成 p/q（p、q 是整数，$q \neq 0$）；也就是有限小数和无限循环小数	第二部分“有理数”（第 36 页）
相反数	只有符号不同的两个数互为相反数，a 的相反数是 $-a$；在数轴上关于原点对称	第二部分“有理数”（第 36 页）
绝对值	数轴上表示 a 的点与原点的距离；$a>0$ 时 $\lvert a\rvert=a$，$a=0$ 时 $\lvert a\rvert=0$，$a<0$ 时 $\lvert a\rvert=-a$	第二部分“有理数”（第 36 页）
绝对值的性质	$\lvert a\rvert \geqslant 0$；$\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert$	第二部分“有理数”（第 36 页）
大小比较	数轴上右边的点表示的数总比左边的大；两个负数，绝对值大的反而小	第二部分“有理数”（第 36 页）
加法法则	同号相加，取相同的符号，绝对值相加；异号相加，取绝对值较大的数的符号，用较大的绝对值减去较小的绝对值；$a+(-a)=0$，$a+0=a$	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
减法法则	$a-b=a+(-b)$	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
数轴上两点的距离	表示 a、b 的两点之间的距离是 $\lvert a-b\rvert$	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

名称	内容	出处
乘法法则	同号得正，异号得负，绝对值相乘；任何数与 0 相乘得 0；几个不为 0 的数相乘，负因数有奇数个时积为负，有偶数个时积为正	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
除法法则	$a \div b = a \times 1/b$（$b \neq 0$）；乘积是 1 的两个数互为倒数，0 没有倒数	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
乘方的符号	正数的任何次幂是正数；负数的偶数次幂是正数，奇数次幂是负数；0 的任何正整数次幂是 0	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
运算律	$a+b=b+a$，$(a+b)+c=a+(b+c)$，$ab=ba$，$(ab)c=a(bc)$，$a(b+c)=ab+ac$	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
运算顺序	先乘方，再乘除，最后加减；同级运算从左到右；有括号先算括号里面的	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
科学记数法	$a \times 10^n$，$1 \leqslant \lvert a \rvert < 10$；绝对值大于或等于 10 的数，$n$ 等于整数位数减 1	第二部分“有理数的运算”（第 41 页）
平方根	$x^2 = a$ 时，x 是 a 的平方根；正数有两个平方根 $\pm\sqrt{a}$，0 的平方根是 0，负数没有平方根	第二部分“实数”（第 47 页）
算术平方根	$\sqrt{a}$ 中 $a \geqslant 0$，且 $\sqrt{a} \geqslant 0$；$(\sqrt{a})^2 = a$（$a \geqslant 0$）	第二部分“实数”（第 47 页）
立方根	每个数有且只有一个立方根；$\sqrt[3]{(-a)} = -\sqrt[3]{a}$	第二部分“实数”（第 47 页）
无理数	无限不循环小数叫无理数；$\sqrt{2}$ 不是有理数	第二部分“实数”（第 47 页）
实数与数轴	实数和数轴上的点一一对应	第二部分“实数”（第 47 页）
估算	对正数，$a < b$ 与 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 同时成立，用平方夹紧	第二部分“实数”（第 47 页）

第三部分：式

名称	内容	出处
单项式的次数	所有字母的指数的和	第三部分“整式的加减”（第 59 页）
合并同类项	系数相加，字母和字母的指数不变：$ma+na=(m+n)a$	第三部分“整式的加减”（第 59 页）
去括号	$+(a-b)=a-b$，$-(a-b)=-a+b$；括号前的数乘括号里的每一项	第三部分“整式的加减”（第 59 页）
同底数幂相乘	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
幂的乘方	$(a^m)^n = a^{mn}$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
积的乘方	$(ab)^n = a^n b^n$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）

名称	内容	出处
同底数幂相除	$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$）	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
零指数幂	$a^0 = 1$（$a \neq 0$）	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
负整数指数幂	$a^{-n} = 1/(a^n)$（$a \neq 0$，n 是正整数）	第三部分“分式”（第 74 页）
单项式乘多项式	$m(a+b+c) = ma + mb + mc$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
多项式乘多项式	$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
平方差公式	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
完全平方公式	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
多项式除以单项式	$(am + bm) \div m = a + b$	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
立方展开（拓展）	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$；$(a+b)^n$ 的系数排成杨辉三角	第三部分“整式的乘法”（第 62 页）
提公因式法	$ma + mb + mc = m(a+b+c)$	第三部分“因式分解”（第 69 页）
公式法	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$；$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$	第三部分“因式分解”（第 69 页）
十字相乘（拓展）	$x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$	第三部分“因式分解”（第 69 页）
分式有意义、值为 0	A/B 有意义：$B \neq 0$；值为 0：$A = 0$ 且 $B \neq 0$	第三部分“分式”（第 74 页）
分式的基本性质	$A/B = (A \cdot C)/(B \cdot C) = (A \div C)/(B \div C)$（$C \neq 0$）	第三部分“分式”（第 74 页）
分式的符号	$(-a)/(-b) = a/b$；$-a/b = (-a)/b = a/(-b)$	第三部分“分式”（第 74 页）
分式的乘除和乘方	$a/b \cdot c/d = ac/(bd)$；$a/b \div c/d = a/b \cdot d/c$；$(a/b)^n = a^n/(b^n)$	第三部分“分式”（第 74 页）
分式的加减	$a/c \pm b/c = (a \pm b)/c$；异分母先通分	第三部分“分式”（第 74 页）
科学记数法（小数）	绝对值小于 1 的数写成 $a \times 10^{-n}$，$1 \leqslant \lvert a \rvert < 10$	第三部分“分式”（第 74 页）
二次根式的性质	$(\sqrt{a})^2 = a$（$a \geqslant 0$）；$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	第三部分“二次根式”（第 79 页）
二次根式的乘除	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$（$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$）；$\sqrt{a}/(\sqrt{b}) = \sqrt{(a/b)}$（$a \geqslant 0$，$b > 0$）	第三部分“二次根式”（第 79 页）
最简二次根式	被开方数不含分母，不含能开得尽方的因数或因式	第三部分“二次根式”（第 79 页）
二次根式的加减	化成最简二次根式后，被开方数相同的合并：$m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$	第三部分“二次根式”（第 79 页）

第四部分：方程与不等式

名称	内容	出处
等式的性质 1	如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$	第四部分“一元一次方程”（第 87 页）
等式的性质 2	如果 $a=b$，那么 $ac=bc$；如果 $a=b$，$c\neq 0$，那么 $a/c=b/c$	第四部分“一元一次方程”（第 87 页）
等量代换	如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$	第四部分“一元一次方程”（第 87 页）
一元一次方程	总能整理成 $ax+b=0$（$a\neq 0$）；步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1	第四部分“一元一次方程”（第 87 页）
消元的依据	代入消元：等量代换；加减消元：如果 $a=b$，$c=d$，那么 $a\pm c=b\pm d$	第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）
方程组解的情况	两条直线相交：唯一解；平行：无解；重合：无数个解	第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）
比较大小	$a>b\text{iff}a-b>0$	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
不等式的性质 1	两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
不等式的性质 2	两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
不等式的性质 3	两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
传递性	如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
不等式组的解集	设 $a<b$：$x>a$，$x>b$ 的解集是 $x>b$；$x<a$，$x<b$ 的解集是 $x<a$；$x>a$，$x<b$ 的解集是 $a<x<b$；$x<a$，$x>b$ 无解	第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）
分式方程的检验	两边乘最简公分母化成整式方程；解出的值使最简公分母为 0 时是增根，要舍去	第四部分“分式方程”（第 100 页）
一元二次方程的一般形式	$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
直接开平方	$x^2=p$（$p\geqslant 0$）时，$x=\pm\sqrt{p}$	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
配方	$x^2+2mx+m^2=(x+m)^2$：加上一次项系数一半的平方	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
求根公式	$x=(-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)})/(2a)$（$b^2-4ac\geqslant 0$）	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

名称	内容	出处
因式分解法	如果 $ab=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
判别式	$\Delta=b^2-4ac$：$\Delta>0$ 时有两个不相等的实数根，$\Delta=0$ 时有两个相等的实数根，$\Delta<0$ 时没有实数根	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
根与系数的关系	$x_1+x_2=-b/a$，$x_1x_2=c/a$	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）
黄金分割数（拓展）	$x^2+x-1=0$ 的正根 $(\sqrt{5}-1)/2\approx 0.618$	第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

第五部分：图形与推理

名称	内容	出处
两点间的距离	连接两点的线段的长度	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）
线段的中点	M 是 AB 的中点：$AM=MB=(1/2)AB$	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）
角的平分线	OC 平分 $\angle AOB$：$\angle AOC=\angle COB=1/2\angle AOB$	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）
角的单位	周角 $360°$，平角 $180°$，直角 $90°$；$1°=60'$，$1'=60''$	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）
余角和补角	$\angle\alpha$ 的余角是 $90°-\angle\alpha$，补角是 $180°-\angle\alpha$；同角（或等角）的余角相等，同角（或等角）的补角相等	第五部分“几何图形初步”（第 113 页）
对顶角	对顶角相等	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
垂线	同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；垂线段最短	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
点到直线的距离	直线外一点到这条直线的垂线段的长度	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
平行线的判定	同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行；同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
平行线的性质	两直线平行，同位角相等；两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补	第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）
三边关系	三角形两边的和大于第三边，两边的差小于第三边：$\lvert a-b\rvert<c<a+b$	第五部分“三角形”（第 128 页）
三角形的中线	中线把三角形分成面积相等的两部分；三条中线交于一点（重心）	第五部分“三角形”（第 128 页）
三角形的稳定性	三条边的长度确定了，三角形的形状和大小就确定了	第五部分“三角形”（第 128 页）
内角和	三角形的内角和等于 $180°$；直角三角形的两个锐角互余	第五部分“三角形”（第 128 页）

名称	内容	出处
外角	三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和，大于任何一个与它不相邻的内角	第五部分“三角形”（第 128 页）
多边形的内角和	n 边形的内角和是 $(n-2)\cdot 180°$；共有 $(n(n-3))/2$ 条对角线	第五部分“三角形”（第 128 页）
多边形的外角和	等于 $360°$；正 n 边形每个外角是 $360°/n$	第五部分“三角形”（第 128 页）
全等三角形的性质	对应边相等，对应角相等	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
全等三角形的判定	SSS，SAS，ASA，AAS；直角三角形还有 HL（斜边和一条直角边分别相等）；SSA、AAA 不能判定	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
角平分线的性质	角平分线上的点到角两边的距离相等	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
角平分线的判定	角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上	第五部分“全等三角形”（第 136 页）
轴对称的性质	对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线；成轴对称的两个图形全等	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
线段垂直平分线的性质	垂直平分线上的点到线段两端的距离相等	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
线段垂直平分线的判定	到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
三边垂直平分线	三角形三条边的垂直平分线交于一点，这一点到三个顶点的距离相等	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
等腰三角形的性质	两个底角相等；顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
等腰三角形的判定	有两个角相等的三角形，这两个角所对的边相等	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
等边三角形	三个内角都等于 $60°$；三个角都相等的三角形、有一个角是 $60°$ 的等腰三角形是等边三角形	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
含 $30°$ 角的直角三角形	$30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
大边对大角（拓展）	在一个三角形中，较大的边所对的角也较大	第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）
勾股定理	直角三角形两直角边为 a、b，斜边为 c，则 $a^2+b^2=c^2$	第五部分“勾股定理”（第 149 页）
勾股定理的逆定理	三角形三边满足 $a^2+b^2=c^2$，则它是直角三角形，边 c 所对的角是直角	第五部分“勾股定理”（第 149 页）
勾股数	能成为直角三角形三边长的三个正整数，如 3、4、5，5、12、13	第五部分“勾股定理”（第 149 页）
平行四边形的性质	两组对边分别平行且相等；两组对角分别相等，邻角互补；对角线互相平分；是中心对称图形	第五部分“四边形”（第 157 页）

名称	内容	出处
平行四边形的判定	两组对边分别平行；两组对边分别相等；一组对边平行且相等；两组对角分别相等；对角线互相平分	第五部分“四边形”（第 157 页）
平行线间的距离	两条平行线之间的距离处处相等	第五部分“四边形”（第 157 页）
三角形的中位线	平行于第三边，并且等于第三边的一半：$DE \parallel BC$，$DE = (1/2)BC$	第五部分“四边形”（第 157 页）
矩形	性质：四个角都是直角，对角线相等；判定：有一个角是直角的平行四边形，有三个角是直角的四边形，对角线相等的平行四边形	第五部分“四边形”（第 157 页）
直角三角形斜边上的中线	等于斜边的一半；反过来，一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形	第五部分“四边形”（第 157 页）
菱形	性质：四条边都相等，对角线互相垂直且每条对角线平分一组对角；判定：有一组邻边相等的平行四边形，四条边都相等的四边形，对角线互相垂直的平行四边形	第五部分“四边形”（第 157 页）
菱形的面积	等于两条对角线乘积的一半：$S = (1/2)ab$（a、b 是两条对角线的长）	第五部分“四边形”（第 157 页）
正方形	兼有矩形和菱形的全部性质；先证矩形再加一组邻边相等，或先证菱形再加一个直角	第五部分“四边形”（第 157 页）
基本作图的依据	作一个角等于已知角、作角的平分线：SSS；作线段的垂直平分线、过一点作垂线：到线段两端距离相等的点在垂直平分线上	第五部分“尺规作图”（第 169 页）

第六部分：坐标与图形的变化

名称	内容	出处
点与坐标	坐标平面内的点和有序实数对一一对应	第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）
象限	第一象限 $(+, +)$，第二象限 $(-, +)$，第三象限 $(-, -)$，第四象限 $(+, -)$；x 轴上的点纵坐标为 0，y 轴上的点横坐标为 0	第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）
点到坐标轴的距离	点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离是 $\lvert b\rvert$，到 y 轴的距离是 $\lvert a\rvert$	第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）
平行于坐标轴的线段	$A(x_1, y)$、$B(x_2, y)$：$AB = \lvert x_1 - x_2\rvert$；$B(x, y_1)$、$C(x, y_2)$：$BC = \lvert y_1 - y_2\rvert$	第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）
平移的性质	对应点所连的线段平行（或在同一条直线上）且相等；对应线段平行且相等；对应角相等	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）
旋转的性质	对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）

名称	内容	出处
中心对称的性质	对应点所连线段都经过对称中心，并且被对称中心平分	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）
正多边形的对称性	正 n 边形有 n 条对称轴；n 是偶数时才是中心对称图形	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）
点的坐标变化	向右平移 a、向上平移 b：$(x+a, y+b)$；关于 x 轴对称：$(x, -y)$；关于 y 轴对称：$(-x, y)$；关于原点对称：$(-x, -y)$	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）
两次翻折	沿互相垂直的两条直线各翻折一次，等于绕交点旋转 $180°$	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）
图象的平移	图象向右平移 h 个单位，解析式中的 x 换成 $x-h$；向上平移 k 个单位，函数值加 k	第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）

第七部分：函数

名称	内容	出处
函数	对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应	第七部分“函数”（第 201 页）
自变量的取值范围	分母不能为 0；被开方数不能是负数；符合实际意义	第七部分“函数”（第 201 页）
函数的图象	图象上每个点的坐标都满足解析式，满足解析式的点都在图象上	第七部分“函数”（第 201 页）
一次函数	$y=kx+b$（$k\neq 0$），图象是直线，与 y 轴交于 $(0, b)$；$b=0$ 时是正比例函数 $y=kx$	第七部分“一次函数”（第 206 页）
一次函数的增减性	$k>0$ 时 y 随 x 的增大而增大；$k<0$ 时 y 随 x 的增大而减小；$\lvert k\rvert$ 越大，直线越陡	第七部分“一次函数”（第 206 页）
一次函数与方程、不等式	$kx+b=0$ 的解是直线与 x 轴交点的横坐标；$kx+b>0$ 的解集是直线在 x 轴上方的部分对应的 x 的范围；方程组的解是两条直线的交点	第七部分“一次函数”（第 206 页）
两条直线平行	k 相等，b 不等	第七部分“一次函数”（第 206 页）
反比例函数	$y=k/x$（$k\neq 0$），即 $xy=k$；$x\neq 0$，$y\neq 0$	第七部分“反比例函数”（第 212 页）
反比例函数的图象和性质	$k>0$ 时在第一、三象限，在每一个象限内 y 随 x 的增大而减小；$k<0$ 时在第二、四象限，在每一个象限内 y 随 x 的增大而增大	第七部分“反比例函数”（第 212 页）
双曲线的对称性	关于原点中心对称；关于直线 $y=x$、$y=-x$ 轴对称	第七部分“反比例函数”（第 212 页）
k 的几何意义	过图象上一点向两坐标轴作垂线，围成的长方形面积是 $\lvert k\rvert$，对应的三角形面积是 $\lvert k\rvert/2$	第七部分“反比例函数”（第 212 页）

名称	内容	出处
二次函数	$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），图象是抛物线	第七部分“二次函数”（第 218 页）
顶点式	$y=a(x-h)^2+k$：由 $y=ax^2$ 向右平移 h、向上平移 k 得到；顶点 (h,k)，对称轴是直线 $x=h$	第七部分“二次函数”（第 218 页）
顶点坐标	$(-b/(2a),(4ac-b^2)/(4a))$，对称轴是直线 $x=-b/(2a)$	第七部分“二次函数”（第 218 页）
二次函数的性质	$a>0$ 时开口向上，顶点是最低点；$a<0$ 时开口向下，顶点是最高点；$\lvert a\rvert$ 越大，开口越小；以对称轴为界，两侧增减性相反	第七部分“二次函数”（第 218 页）
与 y 轴的交点	$(0,c)$	第七部分“二次函数”（第 218 页）
交点式	抛物线与 x 轴交于 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 时，$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	第七部分“二次函数”（第 218 页）
与一元二次方程的关系	$ax^2+bx+c=0$ 的根是抛物线与 x 轴交点的横坐标；$\Delta>0$、$\Delta=0$、$\Delta<0$ 分别对应两个、一个、没有交点	第七部分“二次函数”（第 218 页）
最值	顶点的横坐标在取值范围内时，在顶点取到最大值或最小值	第七部分“二次函数”（第 218 页）

第八部分：相似与锐角三角函数

名称	内容	出处
相似多边形	对应角相等，对应边成比例；相似比为 1 时就是全等	第八部分“相似”（第 230 页）
比例的基本性质	$a/b=c/d$ 可以化成 $ad=bc$	第八部分“相似”（第 230 页）
比例中项	如果 $a/b=b/c$，那么 $b^2=ac$	第八部分“相似”（第 230 页）
合比	$a/b=c/d$ 可以化成 $(a+b)/b=(c+d)/d$	第八部分“相似”（第 230 页）
黄金分割	$AC^2=AB\cdot CB$ 时，点 C 把 AB 黄金分割，$AC=((\sqrt{5}-1)/2)AB\approx 0.618AB$	第八部分“相似”（第 230 页）
平行线分线段成比例的推论	平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例	第八部分“相似”（第 230 页）
相似的起点	平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似	第八部分“相似”（第 230 页）
相似三角形的判定	两角分别相等；两边成比例且夹角相等；三边成比例；直角三角形斜边和一条直角边成比例	第八部分“相似”（第 230 页）
相似三角形的性质	对应高、对应中线、对应角平分线的比都等于相似比；周长比等于相似比 k；面积比等于 k^2	第八部分“相似”（第 230 页）

名称	内容	出处
位似	对应点的连线都经过位似中心，对应边平行（或在同一条直线上）；以原点为位似中心、位似比为 k 时，(x, y) 的对应点是 (kx, ky) 或 $(-kx, -ky)$	第八部分“相似”（第 230 页）
锐角三角函数	$\sin A = a/c$，$\cos A = b/c$，$\tan A = a/b$（a 是对边，b 是邻边，c 是斜边）	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
取值和增减	$0 < \sin A < 1$，$0 < \cos A < 1$；$\sin A$、$\tan A$ 随 $\angle A$ 的增大而增大，$\cos A$ 随 $\angle A$ 的增大而减小	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
三个比值的关系	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$；$\tan A = \sin A/(\cos A)$；$\angle A + \angle B = 90°$ 时，$\sin A = \cos B$，$\cos A = \sin B$	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
特殊角	$\sin 30° = 1/2$，$\cos 30° = \sqrt{3}/2$，$\tan 30° = \sqrt{3}/3$；$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$，$\tan 45° = 1$；$\sin 60° = \sqrt{3}/2$，$\cos 60° = 1/2$，$\tan 60° = \sqrt{3}$	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
解直角三角形	$a^2 + b^2 = c^2$；$\angle A + \angle B = 90°$；边角关系用三角函数；已知两个元素，其中至少有一条边，就能解出其余的	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
坡度	$i = h:l = \tan\alpha$（α 是坡角）	第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）
平行投影	同一时刻，物高与影长的比相等	第八部分“投影与视图”（第 248 页）
正投影	线段平行于投影面时，正投影和它等长；与投影面成 α 角时，正投影长 $AB \cdot \cos\alpha$	第八部分“投影与视图”（第 248 页）
三视图	主视图反映长和高，俯视图反映长和宽，左视图反映宽和高；主视图和俯视图的长对齐，主视图和左视图的高对齐，俯视图和左视图的宽相等	第八部分“投影与视图”（第 248 页）

第九部分：圆

名称	内容	出处
圆	平面内到定点的距离等于定长的所有点组成的图形；直径是最长的弦	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
圆的对称性	圆是中心对称图形，绕圆心旋转任意角度都和自身重合；任何一条直径所在的直线都是对称轴	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
圆心角、弧、弦	在同圆或等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组相等，另外两组也相等	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
弧的度数	圆心角是多少度，它所对的弧就是多少度	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
垂径定理	垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
垂径定理的推论	平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）

名称	内容	出处
半径、弦心距、弦	$r^2=d^2+(a/2)^2$（d 是弦心距，a 是弦长）	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
圆周角定理	一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
圆周角定理的推论	同弧或等弧所对的圆周角相等；半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
圆内接四边形	对角互补；任意一个外角等于它的内对角	第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）
点和圆	$OP<r$：点在圆内；$OP=r$：点在圆上；$OP>r$：点在圆外	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
确定圆的条件	不在同一直线上的三个点确定一个圆；三角形的外心是三边垂直平分线的交点	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
直线和圆	$d<r$：相交；$d=r$：相切；$d>r$：相离（d 是圆心到直线的距离）	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
切线的判定	经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
切线的性质	圆的切线垂直于经过切点的半径	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
切线长定理	从圆外一点引圆的两条切线，切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
内心	三角形的内心是三条角平分线的交点，到三条边的距离相等	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
直角三角形的内切圆半径	$r=(a+b-c)/2=ab/(a+b+c)$（a、b 是直角边，c 是斜边）	第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）
正多边形与圆	把圆 n 等分，依次连接各分点得到正 n 边形；中心角是 $360°/n$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
正多边形的计算	$a/2=R\sin 180°/n$，$r=R\cos 180°/n$，$R^2=r^2+(a/2)^2$，面积 $S=(1/2)Cr$（R 是半径，r 是边心距，a 是边长，C 是周长）	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
正六边形	边长等于半径	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
圆的周长和面积	$C=2\pi R$，$S=\pi R^2$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
弧长	$l=n\pi R/180$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
扇形面积	$S=n\pi R^2/360=(1/2)lR$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）
圆锥	母线 l、高 h、底面半径 r 满足 $l^2=h^2+r^2$；侧面积 πrl，全面积 $\pi rl+\pi r^2$；侧面展开图的圆心角 $n=360r/l$	第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）

第十部分：统计与概率

名称	内容	出处
频数和频率	频率 = 频数 ÷ 数据总数；所有频数的和等于数据总数，所有频率的和等于 1	第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）
扇形图的圆心角	扇形的圆心角 = 360° × 这一部分所占的百分比	第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）
平均数	$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$；各数据与平均数的偏差之和为 0	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
加权平均数	$\bar{x} = (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k)/(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)$	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
中位数和众数	从小到大排列后处在最中间的数（偶数个时取中间两个数的平均数）；出现次数最多的数	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
极差	最大值减最小值	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
方差	$s^2 = ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2)/n$；方差的算术平方根叫标准差	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
数据的变化	每个数据加 a：平均数加 a，方差不变；每个数据乘 k：平均数乘 k，方差乘 k^2	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
四分位数	前一半数据的中位数是第一四分位数，后一半数据的中位数是第三四分位数	第十部分“数据的分析”（第 294 页）
概率的范围	必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0，随机事件的概率在 0 和 1 之间	第十部分“概率”（第 302 页）
等可能的结果	一次试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 种，则 $P(A) = m/n$	第十部分“概率”（第 302 页）
用频率估计概率	大量重复试验中，事件发生的频率稳定在它的概率附近	第十部分“概率”（第 302 页）

第十一部分：数形结合

名称	内容	出处
两点间的距离	$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$：$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$	第十一部分“以数解形”（第 318 页）
中点坐标	线段 AB 的中点是 $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$	第十一部分“以数解形”（第 318 页）
平行四边形的顶点坐标	平行四边形 $ABCD$ 中，$x_A + x_C = x_B + x_D$，$y_A + y_C = y_B + y_D$	第十一部分“以数解形”（第 318 页）
绝对值的几何意义	$\lvert x - a \rvert$ 是数轴上 x 到 a 的距离	第十一部分“以形助数”（第 311 页）

名称	内容	出处
方程的解与交点	方程 $x^2-2x-3=m$ 的解，是抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与直线 $y=m$ 交点的横坐标；一般地，两个式子相等时 x 的值，是两个图象交点的横坐标	第十一部分“以形助数”（第 311 页）
面积与不等式	$(a+b)^2=4ab+(a-b)^2$，所以 $(a+b)^2\geqslant 4ab$，$a=b$ 时取等号	第十一部分“以形助数”（第 311 页）

2026 年河南中考数学

> 河南省 2026 年初中学业水平考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

考点：第二部分“有理数的运算”（第 41 页）、第二部分“有理数”（第 36 页）

某地一天早晨的气温是 −3 ℃，到中午升高了 5 ℃，则中午的气温是

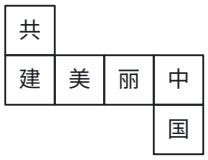
A. −3 ℃　　B. −2 ℃　　C. 2 ℃　　D. 5 ℃

答案： C　　**思路：** “升高”就是加上，中午的气温是 $-3+5=2$（℃）。异号两数相加，取绝对值较大的数的符号，再用较大的绝对值减去较小的绝对值；在数轴上看，就是从 -3 向右走 5 个单位。

第 2 题

考点：第五部分“几何图形初步”（第 113 页）

今年我国六五环境日的主题为“全面绿色转型，共建美丽中国”。将“共建美丽中国”这六个汉字分别写在某正方体的表面上，如图是它的一种展开图，则在原正方体中，与“建”字所在面相对的面上的汉字是



A. 美　　B. 丽　　C. 中　　D. 国

答案： B　　**思路：** 想象把展开图折回正方体。“建、美、丽、中”连成一行，折起来围成一圈侧面，一圈上隔一个面的两个面相对，所以“建”对“丽”，“美”对“中”；剩下的“共”和“国”分别是上、下底面，互相相对。

第 3 题

考点：第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）

下列调查中，适宜用全面调查（普查）的是

A. 检查某载人飞船的零部件质量　　B. 检测一条河流的水质情况

C. 了解某市中学生的课外阅读时间　　D. 调查一批玉米种子的发芽率

答案： A　　**思路：** 选全面调查还是抽样调查，看两件事：结果是否要求绝对可靠，逐个调查是否可行。载人

飞船关系到生命安全，每个零部件都必须检查；河水无法全部检测，全市学生人数太多，测发芽率会把种子用掉，都适合抽样调查。

第 4 题

考点：第四部分“一元二次方程”（第 104 页）、第四部分“一元一次方程”（第 87 页）

已知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx=6$ 的一个根，则 m 的值为

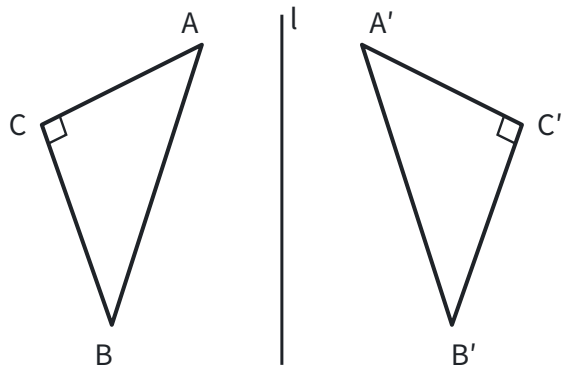
A. 5　　B. −5　　C. 1　　D. −1

答案： D　　**思路：** 方程的根就是使等式成立的数，所以把 $x=2$ 代入：$4-2m=6$，得 $m=-1$。这里不用解一元二次方程，只要用“根”的定义，把问题变成关于 m 的一元一次方程。

第 5 题

考点：第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）

如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，则 $A'B'$ 的长为



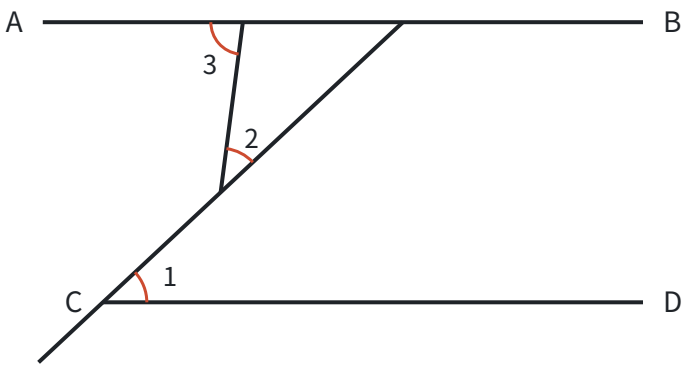
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

答案： C　　**思路：** 轴对称不改变图形的形状和大小，所以 $A'B'=AB$。在直角三角形 ABC 中，由勾股定理，$AB=\sqrt{(8^2+6^2)}=10$。

第 6 题

考点：第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第五部分“三角形”（第 128 页）

如图是高铁线路上某高压线支撑结构的部分示意图，已知 $AB\parallel CD$，$\angle 1=50°$，$\angle 2=30°$，则 $\angle 3$ 的度数为



A. 90°　　B. 80°　　C. 70°　　D. 60°

答案： B　　**思路：** $\angle 1$ 在 CD 上，$\angle 3$ 在 AB 上，要用平行线把 $\angle 1$ 搬到 AB 上。过点 C 的斜线和 AB 相交，由

两直线平行、内错角相等，斜线与 AB 所成的这个角也是 $50°$。$\angle 3$ 是 AB、斜线和短线段围成的小三角形的外角，等于和它不相邻的两个内角之和：$\angle 3 = 50° + 30° = 80°$。

第 7 题

考点：第三部分“整式的乘法”（第 62 页）

下列式子中，运算结果为 $x^2 - 4$ 的是

A. $(x-2)^2$　　B. $(x+2)(2-x)$　　C. $(x+2)(x-2)$　　D. $x(x-4)$

答案： C　　**思路：** $x^2 - 4$ 是两个平方的差，正是平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 的结果。B 看起来也像，但展开是 $4 - x^2$，符号反了；A 是完全平方，会多出中间项 $-4x$。

第 8 题

考点：第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

2026 年 3 月，我国自主研发的 SYT80（T1200 级）超高强度碳纤维发布，这是全世界第一款量产的 T1200 级碳纤维产品。SYT80 超高强度碳纤维拉伸强度突破 8×10^3 兆帕，普通钢材的拉伸强度约为 8×10^2 兆帕。数据“8×10^3”是“8×10^2”的

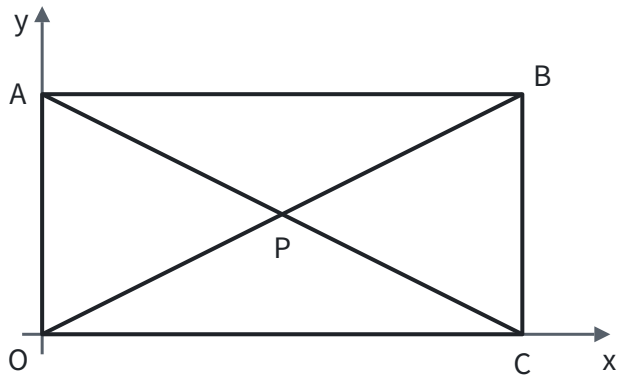
A. 2 倍　　B. 5 倍　　C. 8 倍　　D. 10 倍

答案： D　　**思路：** 求一个数是另一个数的几倍，用除法：$(8 \times 10^3) \div (8 \times 10^2) = 10^3 \div 10^2 = 10$。科学记数法里前面的数相同时，指数每大 1，数就大到 10 倍。

第 9 题

考点：第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）

如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的边 OC 在 x 轴上，对角线 OB，AC 交于点 P，$OA = 2$，$OC = 4$。将矩形 $OABC$ 向左平移，当点 P 的对应点落在 y 轴上时，点 A 的对应点的坐标为



A. $(-2, 2)$　　B. $(-2, 1)$　　C. $(0, 2)$　　D. $(0, 1)$

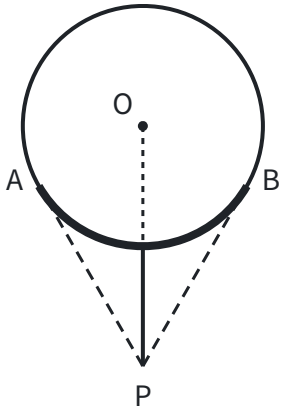
答案： A　　**思路：** 矩形的对角线互相平分，所以 P 是 OB 的中点，$A(0, 2)$、$B(4, 2)$，$P(2, 1)$。P 落到 y 轴上，要向左平移 2 个单位；平移时每个点走的距离相同，所以 A 也向左平移 2 个单位，到 $(-2, 2)$。

第 10 题

考点：第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

团扇始于汉代，盛于唐宋，寓意“团圆友善”。劳动课上，小红想在自己制作的团扇边缘选一段弧进行装饰。

如图，已知扇面边缘为 $\odot O$，扇柄所在直线经过圆心 O，她过扇柄端点 P 作 PA，PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A，B，得到 AB。若 $\odot O$ 的半径为 9 cm，$\angle APB=60°$，则小红想要装饰的 AB 的长为



A. 3π cm　　B. 6π cm　　C. 9π cm　　D. 27π cm

答案： B　　**思路：** 求弧长要知道圆心角，图中没有画出圆心角，就连接 OA，OB 把它补出来。切线垂直于过切点的半径，所以 $\angle OAP=\angle OBP=90°$，四边形 $OAPB$ 的内角和是 $360°$，得 $\angle AOB=360°-90°-90°-60°=120°$。弧长

$$l=\frac{120\pi\times 9}{180}=6\pi\ (\text{cm})\ .$$

第 11 题

考点：第七部分“一次函数”（第 206 页）

请写出一个图象经过第一、三象限的正比例函数表达式 ____。

答案： $y=x$（答案不唯一）　　**思路：** 正比例函数 $y=kx$ 的图象是过原点的直线。$k>0$ 时，x 为正 y 也为正，x 为负 y 也为负，图象经过第一、三象限，所以任取一个正数作 k 都可以。

第 12 题

考点：第四部分“分式方程”（第 100 页）

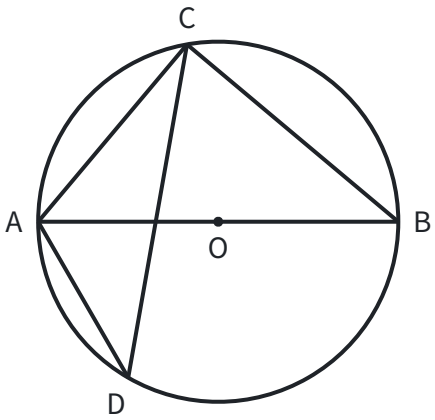
方程 $2/(x+1)=1/x$ 的解为 ____。

答案： $x=1$　　**思路：** 两边同乘最简公分母 $x(x+1)$，化成整式方程 $2x=x+1$，得 $x=1$。去分母时乘的式子可能为 0，所以要检验：$x=1$ 时 $x(x+1)=2\neq 0$，是原方程的解。

第 13 题

考点：第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）

如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C，D 为 $\odot O$ 上两点，$\angle ADC=40°$，则 $\angle CAB$ 的度数为 ____。

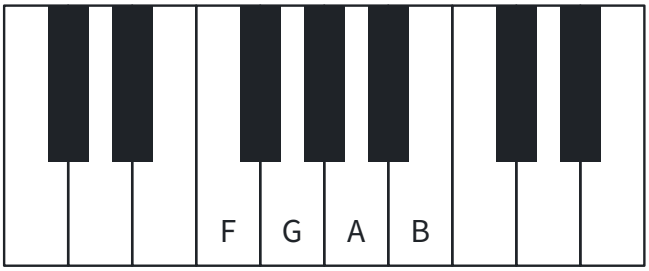


答案： $50°$ **思路：** 见到直径，就想到它所对的圆周角是直角：$\angle ACB=90°$。$\angle ADC$ 和 $\angle ABC$ 都对着 AC，同弧所对的圆周角相等，所以 $\angle ABC=40°$。在直角三角形 ABC 中，$\angle CAB=90°-40°=50°$。

第 14 题

考点：第十部分“概率”（第 302 页）

在钢琴上弹奏不同的琴键，能够发出高低不同的声音，当同时弹奏两个相邻的白色琴键时，发出的声音构成二度音程。如图是钢琴键盘的一部分，从 F，G，A，B 四个白色琴键中随机选两个琴键同时弹奏，发出的声音构成二度音程的概率为 _____。

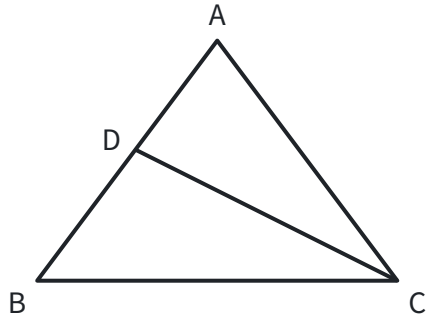


答案： $1/2$ **思路：** 从 4 个琴键里选 2 个，所有可能的结果是 FG、FA、FB、GA、GB、AB，共 6 种，每种可能性相同。相邻的有 FG、GA、AB 这 3 种，所以概率是 $3/6=1/2$。列举时注意“同时弹奏”不分先后，FG 和 GF 是同一种。

第 15 题

考点：第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，CD 是角平分线。点 E 为边 BC 上一点，连接 AE，交 CD 于点 F，连接 BF。若 $AE=2\sqrt{5}$，则 BF 的长为 _____。



答案： $2\sqrt{2}$ 或 $10\sqrt{2}/3$ **思路：** 先定点 E 的位置。作高 AM，等腰三角形三线合一，M 是 BC 的中点，$BM=3$，$AM=\sqrt{(5^2-3^2)}=4$。由 $AE^2=AM^2+ME^2$ 得 $ME=2$，而 E 可以在 M 的左边或右边，所以要分两种情况：$BE=1$ 或 $BE=5$。

再定点 F。以 M 为原点、BC 为 x 轴建立坐标系，$A(0,4)$，$B(-3,0)$，$C(3,0)$。

- $BE=1$ 时，$CE=5=CA$，$\triangle CAE$ 是等腰三角形，顶角的平分线 CF 也是中线，F 是 AE 的中点。$E(-2,0)$，$F(-1,2)$，$BF=\sqrt{(2^2+2^2)}=2\sqrt{2}$。
- $BE=5$ 时，$CE=1$。$\triangle ACF$ 和 $\triangle ECF$ 以 AF、FE 为底时高相同；又因为 F 在 $\angle ACE$ 的平分线上，到 CA、CE 的距离相等，以 CA、CE 为底时高也相同。比较两种算法的面积比，得 $AF{:}FE=CA{:}CE=5{:}1$。$E(2,0)$，F 从 A 出发走 AE 的 $5/6$，$F(5/3,2/3)$，$BF=\sqrt{((14/3)^2+(2/3)^2)}=10\sqrt{2}/3$。

第 16 题

考点：第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第二部分“有理数的运算”（第 41 页）、第二部分“实数”（第 47 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

（1）计算：$(3-\pi)^0-2^{-1}+\sqrt{(1/4)}$。

（2）解不等式组：

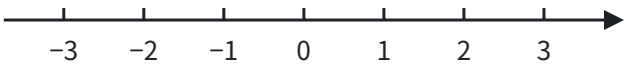
$$\begin{cases}3x-1\le 2, & ①\\ 2x+5\ge x+3. & ②\end{cases}$$

完成以下解答过程。

ⅰ）解不等式 ①，得 _____。

ⅱ）解不等式 ②，得 _____。

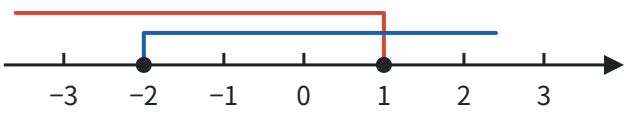
ⅲ）把不等式 ① 和 ② 的解集在数轴上表示出来。



ⅳ）所以，原不等式组的解集是 _____。

答案： （1）原式 $=1-1/2+1/2=1$。

（2）ⅰ）$x\leqslant 1$；ⅱ）$x\geqslant -2$；ⅲ）如图；ⅳ）$-2\leqslant x\leqslant 1$。



思路： （1）三项各用一个定义：非零数的 0 次幂等于 1（$3-\pi\neq 0$），$2^{-1}=1/2$，$1/4$ 的算术平方根是 $1/2$。

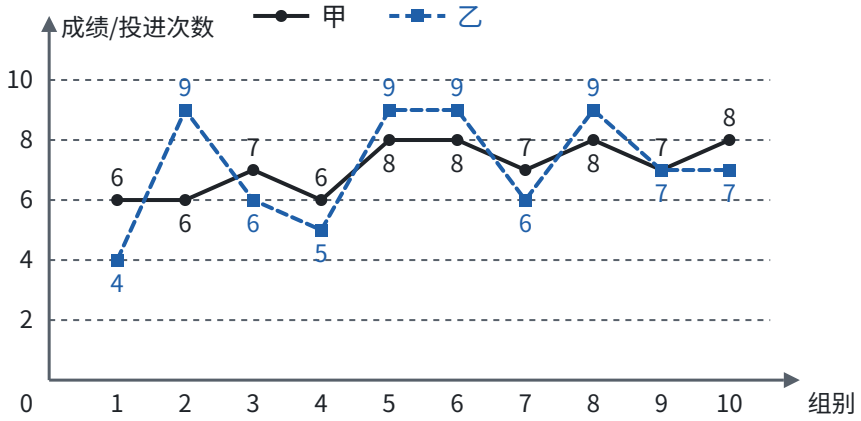
（2）不等式组的解集是两个解集的公共部分，在数轴上就是两条线都覆盖的那一段；端点能取到，画实心点。

第 17 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

加强中小学科技教育是服务国家创新驱动发展战略、培养未来科技创新人才的重要路径。某学校科创社团组装

了甲、乙两个投篮机器人，准备从中选一个参加青少年科技创新大赛。为此，该社团对两个投篮机器人分别进行了 10 组测试（每组测试投篮 10 次，以投进次数作为测试成绩），并对测试成绩整理、描述、分析如下。



测试成绩统计表：

统计量	甲	乙
平均数	7.1	7.1
中位数	a	7
众数	8	b
方差	s_1^2	s_2^2

根据以上信息，回答下列问题。

（1）表中 a 的值为 _____，b 的值为 _____，s_1^2 _____ s_2^2（填“>”“=”或“<”）。

（2）你认为科创社团应选哪个投篮机器人参加青少年科技创新大赛？请说明理由。

答案： （1）$a=7$，$b=9$，$s_1^2<s_2^2$。

（2）应选甲投篮机器人。因为甲、乙两个投篮机器人测试成绩的平均数相同，中位数相同，但甲的方差小于乙的方差，说明甲投篮机器人的成绩更稳定。（答案不唯一，合理即可）

思路： 从图上读出数据：甲是 6，6，7，6，8，8，7，8，7，8，乙是 4，9，6，5，9，9，6，9，7，7。甲排序后第 5、6 个数都是 7，中位数 $a=7$；乙中 9 出现 4 次最多，众数 $b=9$。方差比较的是数据离平均数的远近，不必算出来：甲的折线在 6 到 8 之间小幅起伏，乙从 4 跳到 9，波动大，所以 $s_1^2<s_2^2$（算出来是 0.69 和 3.09）。平均数、中位数相同时，比稳定性就看方差。

第 18 题

考点：第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）、第一部分“三种数学语言”（第 12 页）

近视可防可控不可逆，保持“一尺、一拳、一寸”的正确书写姿势能有效预防近视。小文发现，一本书的长度加上她的一拳长是 1 尺，这本书长度的 2 倍比她的一拳长的 3 倍多 1 尺。这本书的长度和小文的一拳长分别是多少尺？

答案： 设这本书的长度是 x 尺，小文的一拳长是 y 尺。根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-3y=1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=0.8, \\ y=0.2. \end{cases}$$

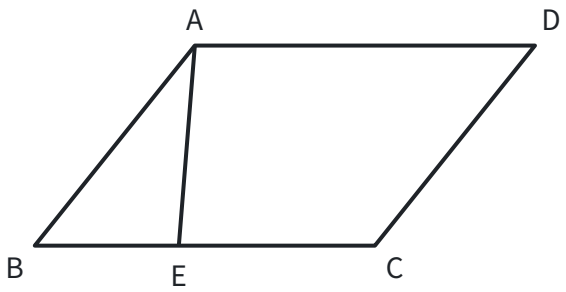
答：这本书的长度是 0.8 尺，小文的一拳长是 0.2 尺。

思路： 两个未知量，题目正好给了两个相等关系：“书长 + 一拳长 = 1 尺”，“书长的 2 倍 − 一拳长的 3 倍 = 1 尺”。“多 1 尺”说的是差，把它翻译成减法，是列方程时最容易出错的地方。解方程组时由第一个方程得 $x=1-y$，代入第二个方程消元。

第 19 题

考点：第五部分“尺规作图”（第 169 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 为边 BC 上一点，连接 AE。



（1）请用无刻度的直尺和圆规作 $\angle DCM$，使 $\angle DCM=\angle BAE$，且射线 CM 交边 AD 于点 F（保留作图痕迹，不写作法）。

（2）判断线段 BE 与（1）中得到的线段 DF 的数量关系，并给出证明。

答案： （1）按“作一个角等于已知角”作图：以点 A 为圆心、适当长为半径画弧，交 AB、AE 于两点；以点 C 为圆心、同样长为半径画弧，交 CD 于一点；以这一点为圆心、前面两个交点间的距离为半径画弧，与上一条弧在平行四边形内部交于一点 M；作射线 CM 交 AD 于点 F。

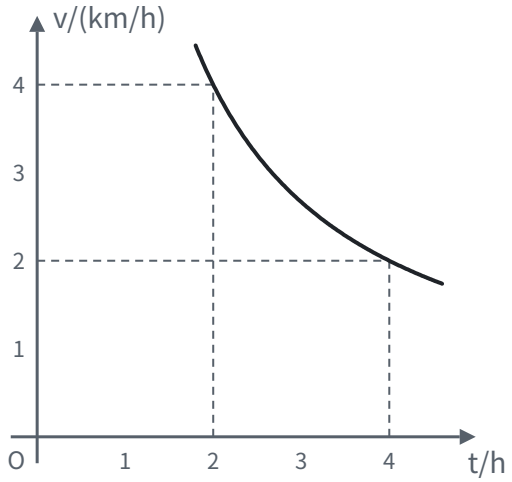
（2）$BE=DF$。证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$，$\angle B=\angle D$。由作图可知 $\angle BAE=\angle DCF$。所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$（ASA），所以 $BE=DF$。

思路： 作图就是把 $\angle BAE$ 复制到顶点 C、一边在 CD 上，依据是三边对应相等的三角形全等（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。第（2）问要比较 BE、DF，就找它们所在的两个三角形 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$：平行四边形给出一组对边相等、一组对角相等，作图又给出一组角相等，正好凑成“角边角”。也可以证 $AE\parallel CF$，得到四边形 $AECF$ 是平行四边形，再用 $BC-CE=AD-AF$。

第 20 题

考点：第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第十一部分“动点与函数”（第 323 页）

今年是红军长征胜利 90 周年，为传承红色基因、厚植爱国情怀，某校学生上午 8:00 从学校出发步行到长征纪念广场开展研学活动，学生步行的平均速度 v（km/h）与步行全程所用时间 t（h）的函数关系如图 1 所示。



（1）求 v 关于 t 的函数表达式。

（2）如果学生从学校出发步行到长征纪念广场所用时间不超过 2.5 h，那么学生步行的平均速度至少为多少？

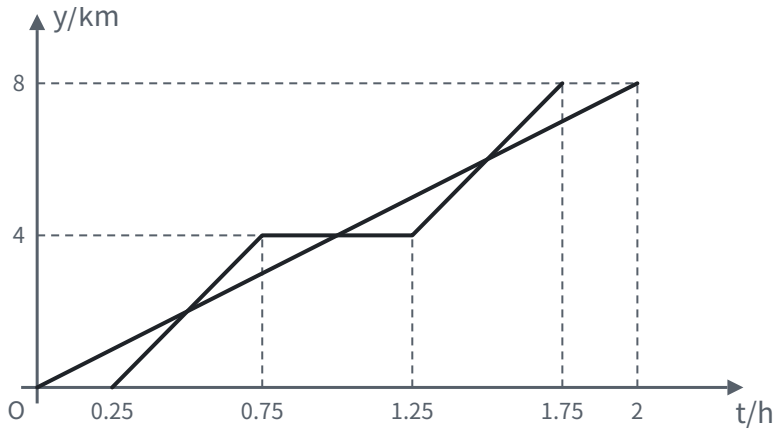
（3）学生出发 0.25 h 后，李老师带着补给物品从学校出发，沿与学生相同的路线先去补给点，为学生整理、发放补给物品后，再去长征纪念广场。李老师、学生已走路程 y（km）与学生步行时间 t（h）的函数关系如图 2 所示。下列三个说法：

① 李老师在补给点停留的时间为 1 h；

② 李老师比学生先到达长征纪念广场；

③ 学生从学校到补给点所走路程为 4 km。

其中正确说法的序号是 _____。



答案： （1）由题意知，v 是 t 的反比例函数，当 $t=4$ 时，$v=2$，所以 $v=8/t$。

（2）把 $t=2.5$ 代入 $v=8/t$，得 $v=3.2$。对于函数 $v=8/t$，当 $t>0$ 时，t 越小，v 越大。所以学生步行的平均速度至少为 3.2 km/h。

（3）②③

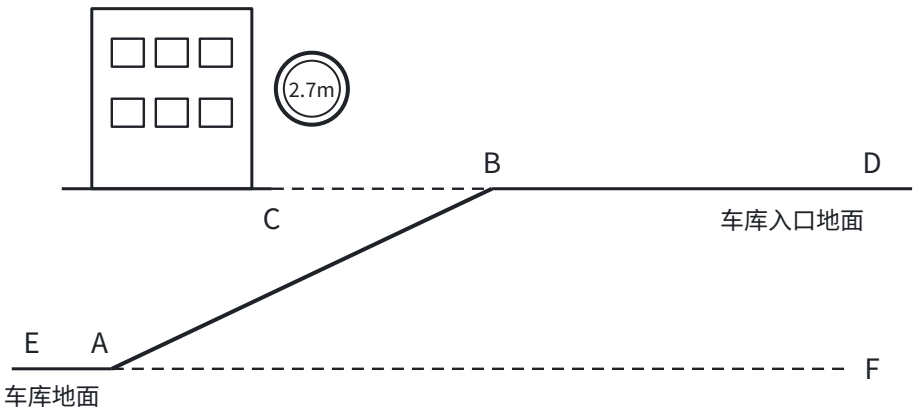
思路： （1）路程一定时，速度和时间的乘积不变，所以是反比例函数，图上 $(2,4)$ 和 $(4,2)$ 都给出 $vt=8$，这个 8 就是全程 8 km。（2）“不超过 2.5 h”是 $t\leqslant 2.5$，要从图象的增减性推出 v 的范围：t 越小 v 越大，所以 $v\geqslant 3.2$。（3）读图 2：学生是过原点的直线，2 h 走完 8 km；李老师的折线在 0.75 h 到 1.25 h 之间是水平的，说明停在 4 km 处的补给点 0.5 h，所以 ① 错、③ 对；李老师 1.75 h 到达 8 km，早于学生的 2 h，② 对。

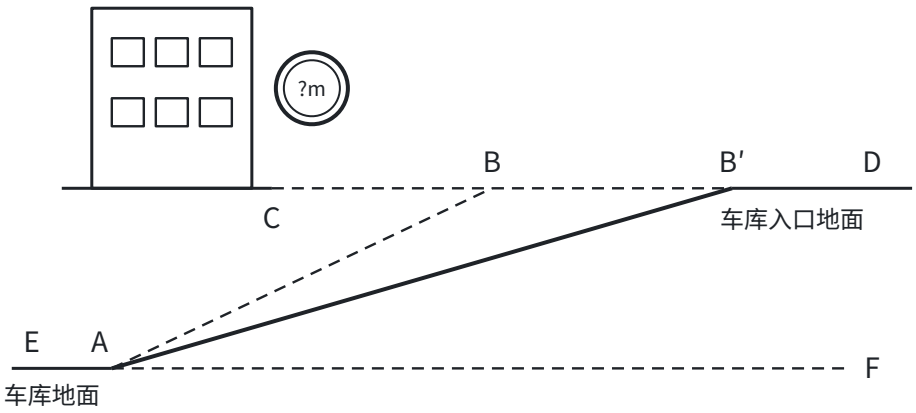
第 21 题

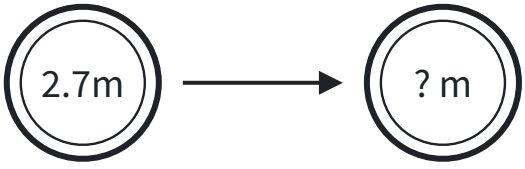
考点：第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

某学校为提高地下车库入口的行车安全性，计划对其进行改造。为此，某数学兴趣小组开展了综合与实践活动，记录如下。

活动主题	地下车库入口改造
采集信息	图 1 是地下车库入口示意图。① 点 C，B，D 在同一水平线上，点 E，A，F 在同一水平线上，$CD \parallel EF$。② 斜坡 AB 的长为 10 m，$\angle BAF = 26.4°$。③ 车库限高 2.7 m。
设计方案	如图 2，保持点 A 不动，将点 B 沿射线 BD 平移到点 B'，使 $\angle B'AF = 18.4°$。
完成任务	任务一：求 BB' 的长。任务二：调整限高。经计算，点 C 到斜坡 AB' 的距离约为 3.47 m。在保障行车安全的前提下，车库限高标志上的数值最大可为 _____。（结果均保留一位小数）

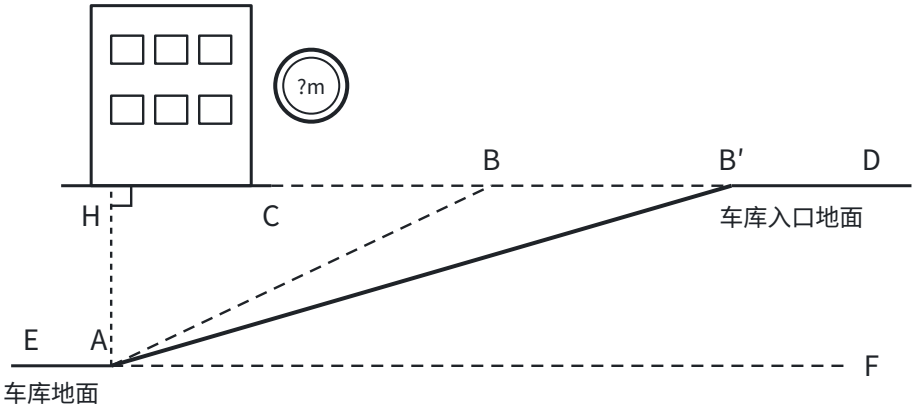






请帮数学兴趣小组完成表中的两个任务（参考数据：$\sin 26.4° \approx 0.44$，$\cos 26.4° \approx 0.90$，$\tan 26.4° \approx 0.50$，$\sin 18.4° \approx 0.32$，$\cos 18.4° \approx 0.95$，$\tan 18.4° \approx 0.33$）。

答案： 任务一：如图，过点 A 作 $AH \perp CD$，垂足为点 H。



由题意知，$\angle ABH=\angle BAF=26.4°$，$\angle AB'H=\angle B'AF=18.4°$。

在 Rt$\triangle ABH$ 中，

$$AH=AB\sin\angle ABH=10\sin 26.4°\approx 4.4,\quad BH=AB\cos\angle ABH=10\cos 26.4°\approx 9.0.$$

在 Rt$\triangle AB'H$ 中，

$$B'H=\frac{AH}{\tan\angle AB'H}\approx\frac{4.4}{\tan 18.4°}\approx 13.33.$$

所以 $BB'=B'H-BH\approx 4.3$，即 BB' 的长约为 4.3 m。

任务二：3.4

思路： 斜坡不是直角三角形的边时，先作垂线造直角三角形。AH 是两段斜坡共同的高度，是连接两个直角三角形的桥梁：在 Rt$\triangle ABH$ 中由斜边 AB 求出 AH 和 BH，在 Rt$\triangle AB'H$ 中由 AH 和 $\angle AB'H$ 求出 $B'H$，两段水平距离相减就是 BB'。任务二里，车在斜坡上时车身垂直于坡面，入口上沿 C 到坡面 AB' 的距离 3.47 m 就是能通过的最大高度；限高标志的数值不能超过它，保留一位小数时只能取 3.4，不能四舍五入成 3.5。

第 22 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）、第一部分“三种数学语言”（第 12 页）

定义：若点 P，Q 在同一抛物线上，且点 Q 的横坐标比点 P 的横坐标大 3，则称点 Q 是点 P 的“黄金搭档点”。例如，抛物线 $y=x^2$ 上，点 $(3,9)$ 是点 $(0,0)$ 的“黄金搭档点”。

（1）点 $A(0,-3)$ 和点 B 在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上，点 B 是点 A 的“黄金搭档点”，且点 B 的纵坐标为 12。求 b，c 的值。

（2）点 M，N 在（1）中的抛物线上，且点 N 是点 M 的“黄金搭档点”。

① 若点 M，N 的纵坐标相等，求点 M，N 的横坐标。

② 抛物线上 M，N 两点之间的部分（含 M，N 两点）记为图象 W，设点 M 的横坐标为 m，当 $-5/2<m<0$ 时，若图象 W 上的最高点和最低点到 x 轴的距离之和为 5，请直接写出 m 的值。

答案： （1）因为点 $A(0,-3)$ 在抛物线上，所以 $c=-3$。由题意知，点 B 的坐标为 $(3,12)$，所以 $9+3b-3=12$，$b=2$。

（2）① 由（1）知，抛物线的表达式为 $y=x^2+2x-3$，对称轴为直线 $x=-1$。因为点 M，N 的纵坐标相等，且 $MN=3$，所以点 M，N 关于对称轴对称，点 M 的横坐标为 $-1-3/2=-5/2$，点 N 的横坐标为 $-1+3/2=1/2$。

② $m=-4+\sqrt{3}$ 或 $m=-4+\sqrt{5}$。

推理过程：图象 W 是 $m \leqslant x \leqslant m+3$ 上的一段。抛物线开口向上，离对称轴越远的点越高，所以 W 上的最高点是两个端点中的一个。N 比 M 高：

$$\left[(m+3)^2+2(m+3)-3\right]-(m^2+2m-3)=6m+15>0,$$

所以最高点总是 N，纵坐标 $y_N=(m+4)^2-4$。

- $-5/2<m \leqslant -1$ 时，W 含顶点 $(-1,-4)$，最低点到 x 轴的距离是 4，所以 $|y_N|=1$。$y_N=1$ 得 $m=-4+\sqrt{5}$，$y_N=-1$ 得 $m=-4+\sqrt{3}$，都在范围内。
- $-1<m<0$ 时，W 从左到右上升，最低点是 M（在 x 轴下方），最高点是 N（在 x 轴上方），距离之和是 $y_N-y_M=6m+15=5$，得 $m=-5/3$，不在范围内，舍去。

思路： “黄金搭档点”只是说横坐标差 3，把它翻译成坐标就能代入。纵坐标相等的两点一定关于对称轴对称，用对称性比解方程快。第 ② 问先想图象 W 的最高点、最低点在哪里：要看顶点在不在 W 上，所以按 m 和 -1 的大小分类；最高点在 x 轴上方还是下方又决定“距离”要不要变号（见第十一部分“分类讨论”（第 332 页））。

第 23 题

考点：第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，$AB=4$。将边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AE，记旋转角为 α。作射线 DE，在射线 DE 上取一点 H，使 $BH=BE$，连接 CH。

（1）观察猜想

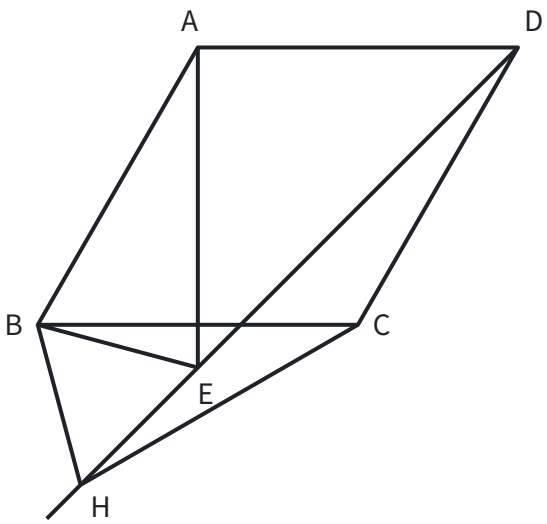
当 $\alpha=30°$ 时，如图 1，$\angle BEH$ 的度数为 ____，CH 的长为 ____。

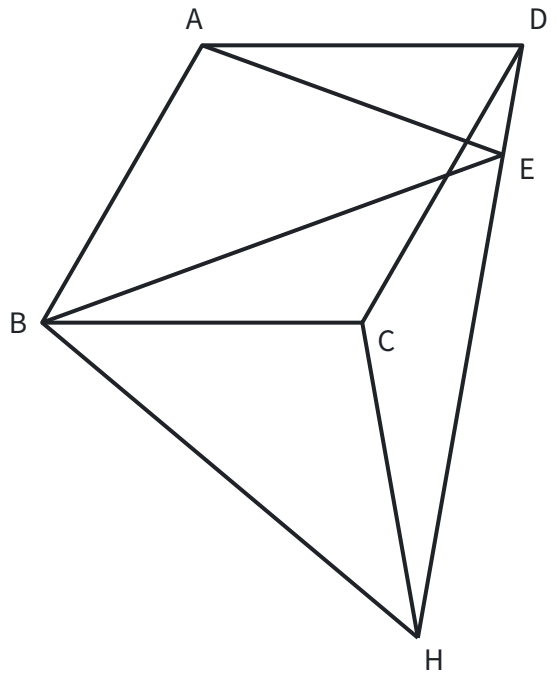
（2）探究证明

当 $0°<\alpha<120°$ 时，（1）中的两个结论是否仍然成立？若成立，请仅就图 2 的情形进行证明；若不成立，请说明理由。

（3）拓展延伸

当 $0°<\alpha<120°$ 时，若 $\triangle DCH$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，请直接写出此时旋转角 α 的度数。





答案： （1）60°，4。

（2）两个结论仍然成立。证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=120°$，$AB=4$，所以 $AB=AD=BC=4$，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=180°-\angle BAD=60°$。因为 $AB=AE$，所以 $AD=AE=AB$。因为 $\angle BAE=\alpha$，所以

$$\angle AEB=90°-\frac{\alpha}{2},\quad \angle AED=\frac{1}{2}\left[180°-(120°-\alpha)\right]=30°+\frac{\alpha}{2}.$$

所以 $\angle BEH=180°-\angle AEB-\angle AED=60°$。又因为 $BE=BH$，所以 $\triangle BEH$ 为等边三角形，$\angle EBH=60°$。所以 $\angle ABC=\angle EBH$，两边都减去 $\angle EBC$，得 $\angle ABE=\angle CBH$。又因为 $BE=BH$，$AB=CB$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CBH$（SAS），所以 $AE=CH$，即 $CH=4$。

（3）15° 或 105°。

推理过程：由（2）的全等，$\angle BCH=\angle BAE=\alpha$，$CH=4$。$\triangle DCH$ 以 $CD=4$ 为底，面积为 $4\sqrt{2}$，所以点 H 到直线 CD 的距离是 $2\sqrt{2}$。在以 $CH=4$ 为斜边、这段距离为直角边的直角三角形中，$2\sqrt{2}/4=\sqrt{2}/2$，所以 CH 与直线 CD 所成的锐角是 45°，$\angle DCH$ 是 45° 或 135°。

H 在 BC 的下方，$\angle DCH$ 由 $\angle BCD=120°$ 和 $\angle BCH=\alpha$ 合成：$120°+\alpha\leqslant 180°$ 时 $\angle DCH=120°+\alpha$，否则 $\angle DCH=360°-(120°+\alpha)=240°-\alpha$。两种情况下 $\angle DCH$ 都大于 120°，只能是 135°，所以 $\alpha=15°$ 或 $\alpha=105°$。

思路： 旋转带来等线段：$AB=AE=AD$，于是 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，底角都能用 α 表示，相加时 α 抵消，$\angle BEH$ 恒为 60°。有了 60° 和 $BE=BH$，就得到等边三角形；它和菱形里的等边三角形 ABC 共顶点 B，两个等边三角形绕公共顶点 B 转过同样的角，找到 $\triangle ABE\cong\triangle CBH$，就把 CH 转化成了 AE。第（3）问 CD、CH 都是 4，面积只由 $\angle DCH$ 决定，再按 H 的位置分两种情况表示 $\angle DCH$。

2025 年河南中考数学

> 河南省 2025 年初中学业水平考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

考点：第二部分“有理数”（第 36 页）

在学校足球比赛中，如果某班足球队进 4 个球记作 $+4$ 个，那么该队失 3 个球记作

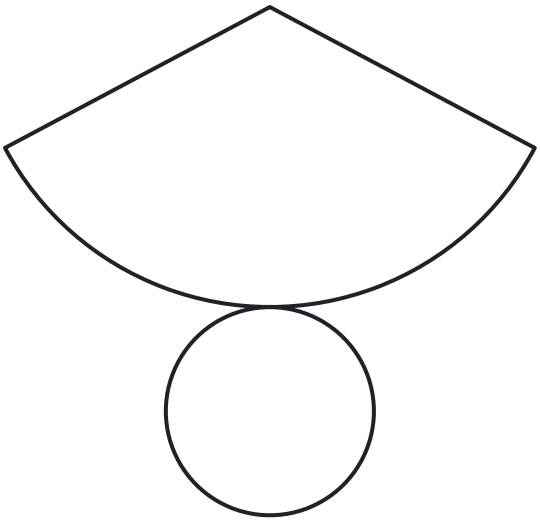
A. $+3$ 个　　B. -3 个　　C. $+4$ 个　　D. -4 个

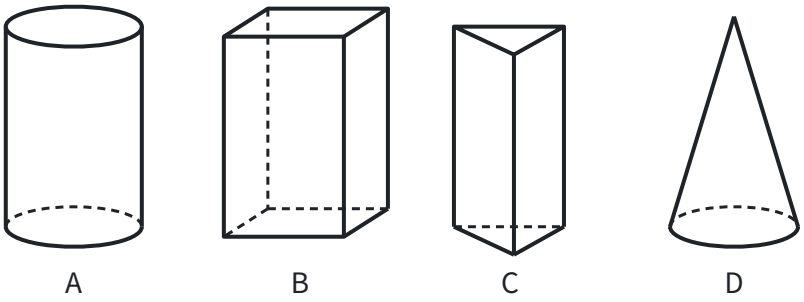
答案： B　　**思路：** “进球”和“失球”是意义相反的两个量，一个记作正，另一个就记作负。进球记作正，失 3 个球就记作 -3 个。

第 2 题

考点：第五部分“几何图形初步”（第 113 页）、第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）

数学活动课上，小颖绘制的某立体图形展开图如图所示，则该立体图形是





A. 选项图 A　　B. 选项图 B　　C. 选项图 C　　D. 选项图 D

答案： D　　**思路：** 想象把展开图折回去：一个扇形卷起来，两条半径对接，弧围成一个圆，成为一个尖顶的侧面；下面的圆正好把这个圆口封住，就是圆锥。圆柱的侧面展开是长方形，棱柱的侧面展开是几个长方形，都没有扇形。

第 3 题

考点：第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

通电瞬间，导线中的电流以接近光速形成，但其中自由电子定向移动的平均速度大约只有 0.000 074 m/s，比蜗牛爬行的速度还慢。数据“0.000 074”用科学记数法表示为

A. 0.74×10^{-4}　　B. 7.4×10^{-4}　　C. 7.4×10^{-5}　　D. 74×10^{-6}

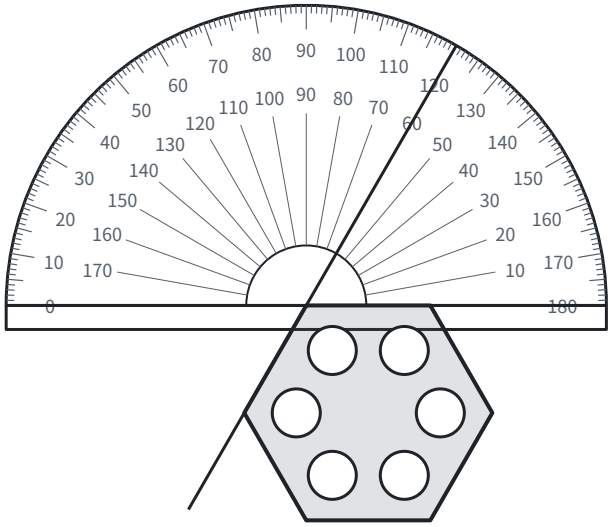
答案： C　　**思路：** 科学记数法写成 $a\times10^{n}$，要求 $1\leqslant|a|<10$，所以 $a=7.4$，A、D 都不合要求。从 0.000

074 变成 7.4，小数点向右移了 5 位，数变大了 10^5 倍，所以要乘 10^{-5} 才相等：$0.000\,074 = 7.4 \times 10^{-5}$。

第 4 题

考点：第五部分“几何图形初步”（第 113 页）、第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）、第五部分“三角形”（第 128 页）

如图所示，有一个六边形零件，利用图中的量角器可以量出该零件内角的度数，则所量内角的度数为



A. 100°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 130°

答案： C　　**思路：** 零件的一条边贴着量角器的底边，另一条边的延长线穿过量角器，读数是 120°（内圈读数 60° 是它的邻补角）。量角器上量出的角和零件的内角是对顶角，所以内角是 120°。如果零件是正六边形，用多边形的内角和也能检验：每个内角是 $(6-2)\times 180° \div 6 = 120°$（见第五部分“三角形”（第 128 页））。

第 5 题

考点：第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

一元二次方程 $x^2 - 2x = 0$ 的根的情况是

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

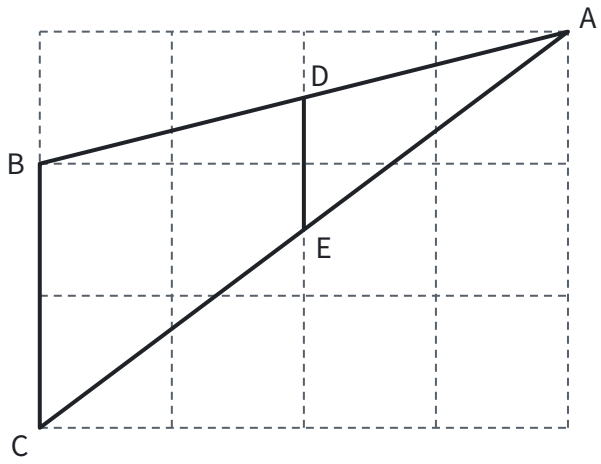
C. 只有一个实数根　　D. 没有实数根

答案： A　　**思路：** 看判别式：$a = 1$，$b = -2$，$c = 0$，$\Delta = b^2 - 4ac = 4 > 0$，所以有两个不相等的实数根。也可以直接因式分解 $x(x-2) = 0$，得 $x_1 = 0$，$x_2 = 2$。

第 6 题

考点：第五部分“四边形”（第 157 页）、第八部分“相似”（第 230 页）

如图所示的网格中，每个小正方形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 的三个顶点均在网格线的交点上，点 D，E 分别是边 BA，CA 与网格线的交点，连接 DE，则 DE 的长为



A. $1/2$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

答案： B **思路：** 网格是 4 格宽，点 D，E 所在的竖线在正中间，把 BA，CA 都平分，所以 D，E 分别是 BA，CA 的中点，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线。$BC=2$，所以 $DE=(1/2)BC=1$（见第五部分“四边形”（第 157 页））。

第 7 题

考点：第三部分“分式”（第 74 页）、第三部分“因式分解”（第 69 页）

化简

$$\frac{x^2-2}{x-1}-\frac{1}{1-x}$$

的结果是

A. $x+1$ B. x C. $x-1$ D. $x-2$

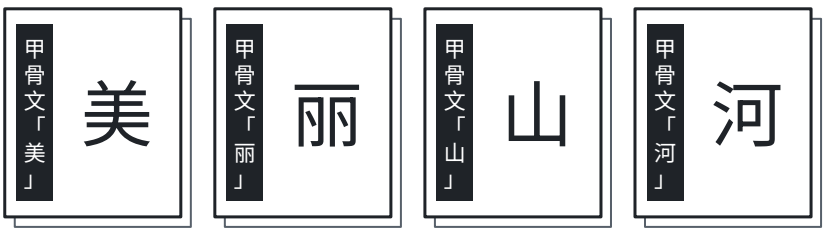
答案： A **思路：** 两个分母 $x-1$ 和 $1-x$ 互为相反数，先把第二项的分母变成 $x-1$，减号变加号，就是同分母相加：

$$\frac{x^2-2}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1.$$

第 8 题

考点：第十部分“概率”（第 302 页）

甲骨文是我国已发现最早的成熟文字，代表了早期中华文明的辉煌成就。正面分别印有甲骨文“美”“丽”“山”“河”的四张卡片如图所示，它们除正面外完全相同。把这四张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取两张，则这两张卡片正面恰好是甲骨文“丽”和“山”的概率是



A. $1/12$ B. $1/6$ C. $1/4$ D. $1/2$

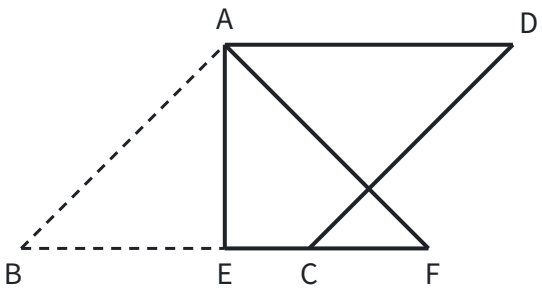
答案： B **思路：** 列出所有等可能的结果：从 4 张里一次抽 2 张，有“美丽、美山、美河、丽山、丽河、山

河”6 种，其中“丽”和“山”只有 1 种，概率是 $1/6$。用树状图按先后抽取来列也可以，共 $4\times3=12$ 种，“丽山”和“山丽”2 种，结果相同。

第 9 题

考点：第五部分“四边形”（第 157 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）

如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=45°$，$AB=6$，点 E 在边 BC 上，连接 AE，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，若点 B 落在 BC 延长线上的点 F 处，则 CF 的长为



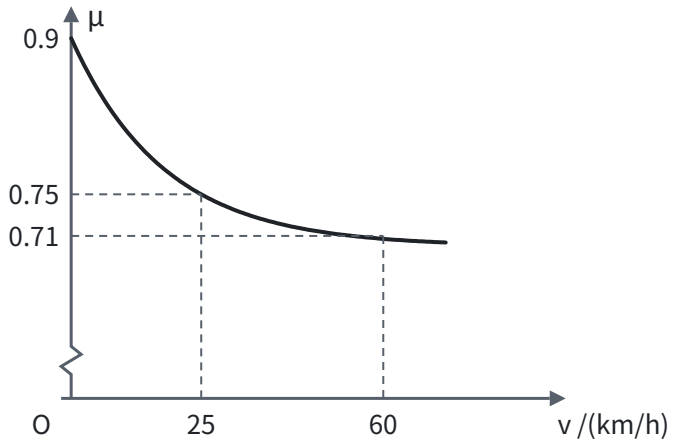
A. 2　　B. $6-3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}-6$

答案： D　　**思路：** 折叠是轴对称，对称轴 AE 垂直平分对应点的连线 BF。所以 $AE\perp BC$，$BE=EF$。在等腰直角三角形 ABE 中，$AB=6$，$BE=6/(\sqrt{2})=3\sqrt{2}$，于是 $BF=6\sqrt{2}$，$CF=BF-BC=6\sqrt{2}-6$。

第 10 题

考点：第七部分“函数”（第 201 页）、第一部分“三种数学语言”（第 12 页）

汽车轮胎的摩擦系数是影响行车安全的重要因素，在一定条件下，它会随车速的变化而变化。研究发现，某款轮胎的摩擦系数 μ 与车速 v（km/h）之间的函数关系如图所示。下列说法中**错误**的是



A. 汽车静止时，这款轮胎的摩擦系数为 0.9

B. 当 $0\leqslant v\leqslant 60$ 时，这款轮胎的摩擦系数随车速的增大而减小

C. 要使这款轮胎的摩擦系数不低于 0.71，车速应不低于 60 km/h

D. 若车速从 25 km/h 增大到 60 km/h，则这款轮胎的摩擦系数减小 0.04

答案： C　　**思路：** 逐项回到图象上读。静止就是 $v=0$，图象从 0.9 出发，A 对；图象一路下降，B 对；0.75 降到 0.71，减小 0.04，D 对。C 把方向弄反了：μ 随 v 增大而减小，$\mu\geqslant 0.71$ 对应的是 $v\leqslant 60$，车速应不高于 60 km/h。

第 11 题

考点：第三部分“二次根式”（第 79 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）

请写出一个使 $\sqrt{(5-x)}$ 在实数范围内有意义的 x 的值：____。

答案： 5（答案不唯一，满足 $x \leqslant 5$ 即可） **思路：** 负数没有平方根，所以被开方数 $5-x \geqslant 0$，即 $x \leqslant 5$。在这个范围里任取一个数都对。

第 12 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

为考察学校劳动实践基地甲、乙两种小麦的长势，数学兴趣小组从两种小麦中各随机抽取 20 株进行测量，测得两种小麦苗高的平均数相同，方差分别为 $s_{甲}^2=3.6$，$s_{乙}^2=5.8$，则这两种小麦长势更整齐的是____（填“甲”或“乙”）。

答案： 甲 **思路：** 方差是各数据与平均数之差的平方的平均数，衡量数据偏离平均数的程度。方差越小，苗高越集中在平均数附近，长势越整齐。$3.6<5.8$，所以甲更整齐。

第 13 题

考点：第三部分“代数式”（第 54 页）

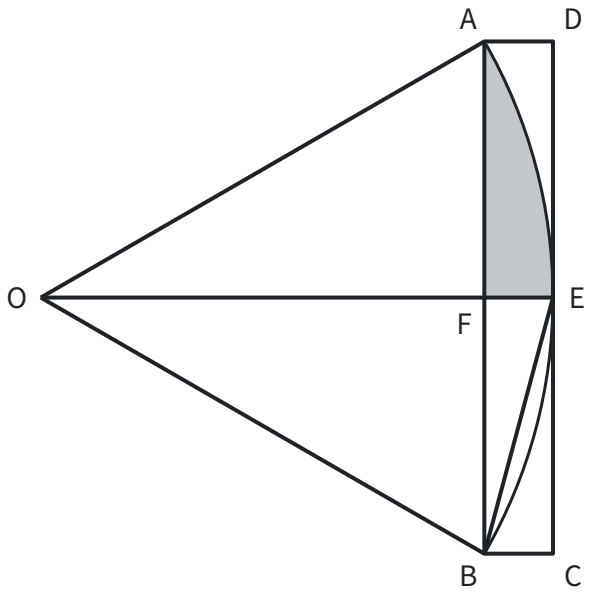
观察 $2x$，$4x^2$，$6x^3$，$8x^4$，…，根据这些式子的变化规律，可得第 n 个式子为 ____。

答案： $2nx^n$ **思路：** 把每个式子拆成系数和字母两部分分别看：系数 2，4，6，8 是第几个就乘 2，第 n 个是 $2n$；x 的指数 1，2，3，4 就是序号，第 n 个是 x^n。合起来是 $2nx^n$，再代入 $n=1$ 检验一下。

第 14 题

考点：第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）、第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）

我国魏晋时期数学家刘徽在为《九章算术》作注时，创立了“割圆术”。如图是研究“割圆术”时的一个图形，AB 所在圆的圆心为点 O，四边形 $ABCD$ 为矩形，边 CD 与 $\odot O$ 相切于点 E，连接 BE，$\angle ABE=15°$，连接 OE 交 AB 于点 F。若 $AB=4$，则图中阴影部分的面积为 ____。



答案： $4\pi/3-2\sqrt{3}$ **思路：** 阴影由线段 AF，FE 和弧 AE 围成，等于扇形 AOE 减去 $\triangle AOF$。切线垂直于过切点的半径，$OE\perp CD$，又 $AB/\!/CD$，所以 $OE\perp AB$，由垂径定理 $AF=BF=2$。$\angle ABE$ 是弧 AE 所对的圆周

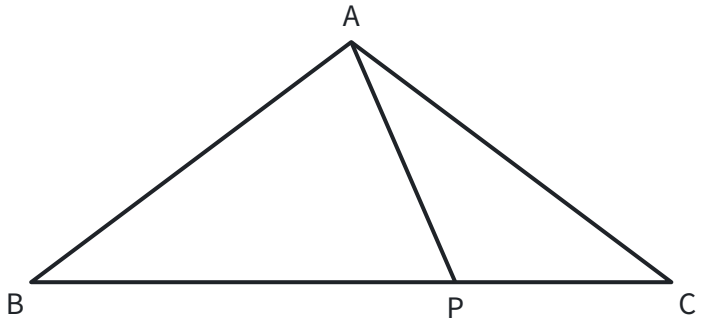
角，圆心角 $\angle AOE = 2\times 15° = 30°$。在直角三角形 AOF 中，$OA = 2AF = 4$，$OF = 2\sqrt{3}$，所以

$$S_{\text{阴影}} = \frac{30\pi \times 4^2}{360} - \frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

第 15 题

考点：第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第八部分“相似”（第 230 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

定义：有两个内角的差为 90° 的三角形叫做“反直角三角形”。如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 5$，$BC = 8$，点 P 为边 BC 上一点，若 $\triangle APC$ 为“反直角三角形”，则 BP 的长为 ____。



答案： 25/4 或 11/2　　**思路：** $\triangle APC$ 有三个角，差为 90° 的可能是哪两个角、谁大谁小，要逐一讨论。先算出已知的角：作高 AH，$BH = CH = 4$，$AH = 3$，$\angle C$ 是锐角，$\tan C = 3/4$，$\angle C < 45°$。

- $\angle APC - \angle C = 90°$：因为 $\angle APC = \angle B + \angle BAP$，$\angle B = \angle C$，所以 $\angle BAP = 90°$。由 $\triangle BAP \backsim \triangle BHA$ 得 $BP/(BA) = BA/(BH)$，$BP = 25/4$。
- $\angle APC - \angle PAC = 90°$：把 $\angle APC$ 中的 90° 单独分出来：过 P 作 $PM \perp BC$ 交 AC 于 M，则 $\angle APM = \angle APC - 90° = \angle PAC$，所以 $AM = PM$。设 $CP = x$，由 $\tan C = 3/4$ 得 $PM = (3/4)x$，$CM = (5/4)x$，于是 $(3/4)x + (5/4)x = 5$，$x = 5/2$，$BP = 8 - 5/2 = 11/2$。
- 以 $\angle PAC$ 或 $\angle C$ 为大角时：$\angle C$ 是锐角，不可能比别的角大 90°。$\sin C = 3/5 > 1/2$，所以 $\angle C > 30°$，$\angle BAC = 180° - 2\angle C < 120°$；而 $\angle PAC - \angle C = 90°$ 或 $\angle PAC - \angle APC = 90°$（$\angle APC \geqslant \angle B = \angle C > 30°$）都会使 $\angle PAC > 120°$，超过 $\angle BAC$，不可能。

第 16 题

考点：第二部分“实数”（第 47 页）、第三部分“整式的乘法”（第 62 页）、第三部分“整式的加减”（第 59 页）

（1）计算：$\sqrt[3]{8} + (\pi - 1)^0 - \sqrt{3}\times\sqrt{3}$；

（2）化简：$(x+1)^2 - x(x+2)$。

答案： （1）原式 $= 2 + 1 - 3 = 0$。

（2）原式 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1$。

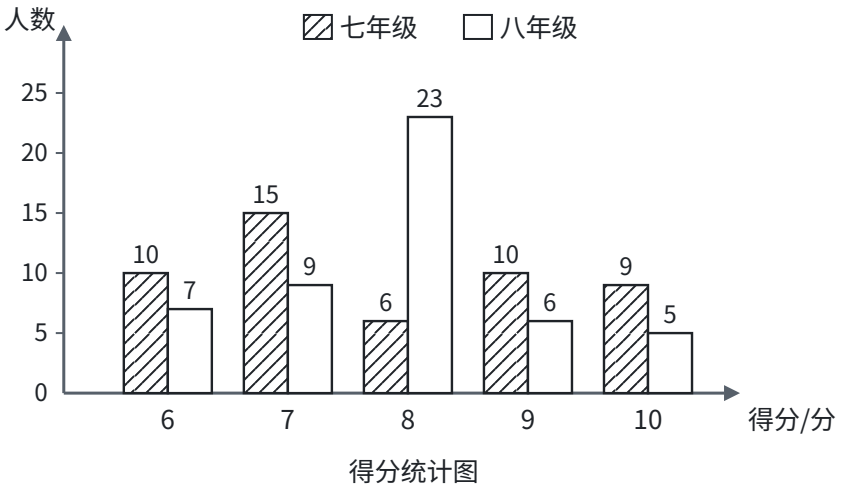
思路： （1）三项各自按定义算：$2^3 = 8$，所以 $\sqrt[3]{8} = 2$；$\pi - 1 \neq 0$，它的零次幂是 1；$\sqrt{3}$ 是平方等于 3 的正数，$\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$。（2）用完全平方公式和单项式乘多项式展开，再合并同类项。

第 17 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）、第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）

为加强对青少年学生的宪法法治教育，普及宪法法治知识，教育部决定举办第十届全国学生“学宪法 讲宪

法”活动。某学校为了解学生对宪法法治知识的掌握情况，从七、八年级各随机抽取 50 名学生进行测试，并对测试得分（10 分为满分，9 分或 9 分以上为优秀）进行整理、描述、分析，部分信息如下。



得分统计图

得分统计表：

统计量	七年级	八年级
平均数	7.86	7.86
中位数	a	8
众数	7	b
优秀率	38%	c

根据以上信息，回答下列问题。

（1）表格中的 $a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____。

（2）你认为哪个年级的学生对宪法法治知识的掌握情况更好？请说明理由。

答案： （1）$a=7.5$，$b=8$，$c=22\%$。

（2）七年级的学生掌握情况更好，因为两个年级的平均数相同，七年级的优秀率（38%）高于八年级（22%）。（答案不唯一，合理即可。比如从中位数、众数看，八年级更好。）

思路： （1）50 个数据的中位数是排序后第 25、26 个数的平均数。七年级得 6 分的 10 人、7 分的 15 人，累计 25 人，所以第 25 个是 7，第 26 个是 8，$a=(7+8)/2=7.5$。八年级得 8 分的 23 人最多，$b=8$。八年级优秀的有 $6+5=11$ 人，$c=11/50=22\%$。（2）先说清用哪个统计量比较、它说明什么，再下结论。

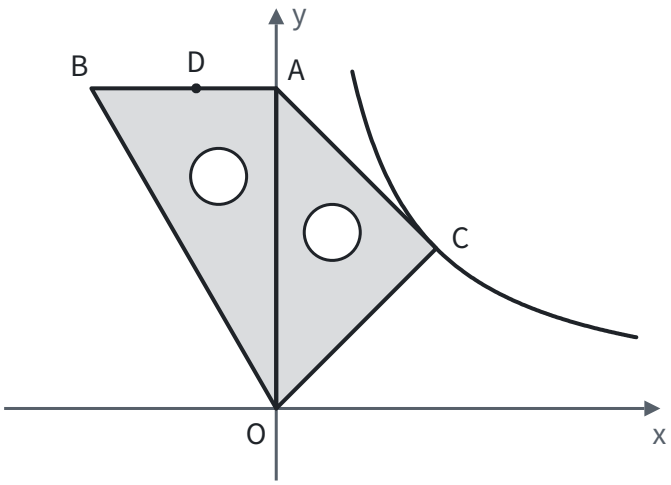
第 18 题

考点：第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

小军将一副三角板按如图方式摆放在平面直角坐标系 xOy 中，其中含 $30°$ 角的三角板 OAB 的直角边 OA 落在 y 轴上，含 $45°$ 角的三角板 OAC 的直角顶点 C 的坐标为 $(2,2)$，反比例函数 $y=k/x$（$x>0$）的图象经过点 C。

（1）求反比例函数的表达式。

（2）将三角板 OAB 绕点 O 顺时针旋转 $90°$，AB 边上的点 D 恰好落在反比例函数图象上，求旋转前点 D 的坐标。



答案： （1）把 $C(2,2)$ 代入 $y=k/x$，得 $k=2\times 2=4$，所以反比例函数的表达式为 $y=4/x$。

（2）在等腰直角三角形 OAC 中，点 C 到 y 轴的垂线段是斜边 OA 上的高，也是中线，所以 $OA=2\times 2=4$，点 $A(0,4)$。$AB\perp OA$，所以 AB 在直线 $y=4$ 上，设 $D(-m,4)$（$m>0$），$AD=m$。

绕点 O 顺时针旋转 $90°$ 后，点 A 转到 x 轴上的点 $A'(4,0)$，$A'B'$ 与 x 轴垂直，点 D 的对应点 D' 满足 $A'D'=AD=m$，所以 $D'(4,m)$。D' 在 $y=4/x$ 上，$m=4/4=1$。

所以旋转前点 D 的坐标为 $(-1,4)$。

思路： 旋转不改变线段长度和夹角。与其跟踪点 D 的坐标怎样变，不如先看整条边 AB 转到了哪里：OA 从 y 轴正半轴转到 x 轴正半轴，AB 随之变成竖直的，点 D 到 A 的距离不变，这样 D' 的坐标就能用 AD 表示，再让它满足函数表达式。

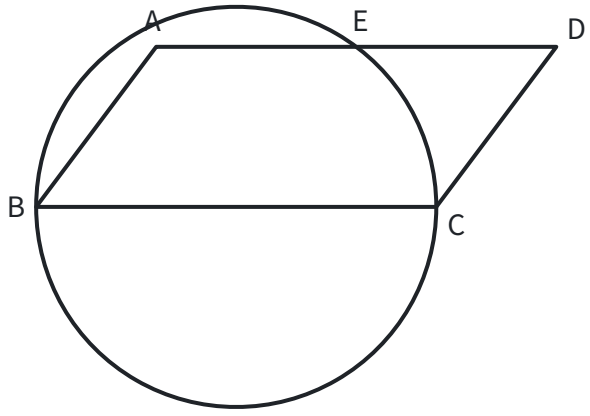
第 19 题

考点：第五部分“尺规作图”（第 169 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

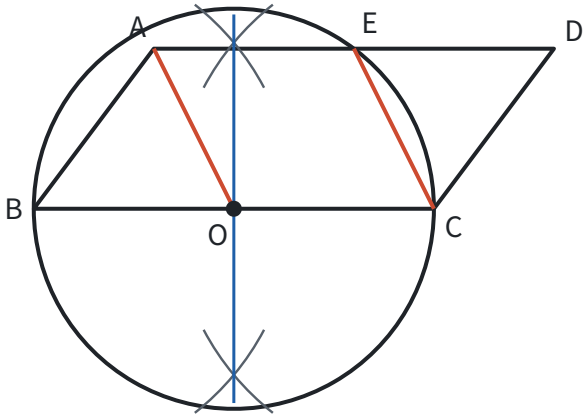
如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，以 BC 为直径的圆交 AD 于点 E。

（1）请用无刻度的直尺和圆规作出圆心 O（保留作图痕迹，不写作法）。

（2）若点 E 是 AD 的中点，连接 OA，CE。求证：四边形 $AOCE$ 是平行四边形。



答案： （1）作线段 BC 的垂直平分线，它与 BC 的交点就是圆心 O，如下图。



（2）证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD=BC$，$AD\parallel BC$。

又因为 E 是 AD 的中点，O 是 BC 的中点，所以 $AE=(1/2)AD=(1/2)BC=OC$，且 $AE\parallel OC$。

所以四边形 $AOCE$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）。

思路： （1）BC 是直径，圆心就是 BC 的中点，找中点用垂直平分线（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。（2）AE 和 OC 都在平行四边形的一组对边上，天然平行；都是对边的一半，天然相等，所以用“一组对边平行且相等”来判定最直接。

第 20 题

考点：第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）

为助力乡村振兴，支持惠农富农，某合作社销售我省西部山区出产的甲、乙两种苹果。已知 2 箱甲种苹果和 3 箱乙种苹果的售价之和为 440 元；4 箱甲种苹果和 5 箱乙种苹果的售价之和为 800 元。

（1）求甲、乙两种苹果每箱的售价。

（2）某公司计划从该合作社购买甲、乙两种苹果共 12 箱，且乙种苹果的箱数不超过甲种苹果的箱数。求该公司最少需花费多少元。

答案： （1）设甲种苹果每箱售价 x 元，乙种苹果每箱售价 y 元，根据题意，得

$$\begin{cases}2x+3y=440,\\4x+5y=800.\end{cases}$$

解得 $x=100$，$y=80$。甲种苹果每箱售价 100 元，乙种苹果每箱售价 80 元。

（2）设购买甲种苹果 a 箱，则购买乙种苹果 $(12-a)$ 箱。由 $12-a\leqslant a$，得 $a\geqslant 6$。

设花费为 w 元，则 $w=100a+80(12-a)=20a+960$。因为 $20>0$，w 随 a 的增大而增大，所以 $a=6$ 时 w 最小，$w=20\times 6+960=1080$。

该公司最少需花费 1080 元。

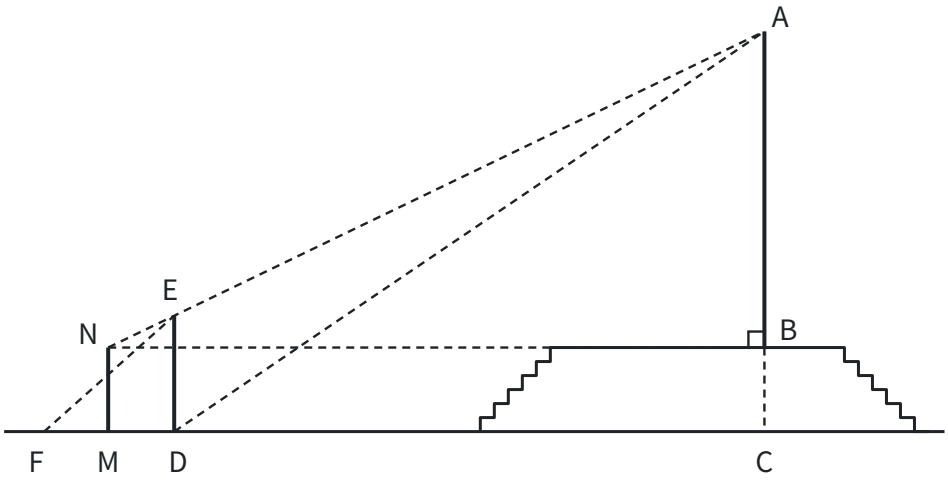
思路： （2）问“最少花费”，花费随甲的箱数变化，所以先把花费写成甲的箱数的一次函数，再由“乙不超过甲”列不等式求出箱数的范围。一次函数的最值出现在范围的端点，看 k 的正负决定取哪一端：甲比乙贵，甲越多越贵，所以甲取最少的 6 箱。

第 21 题

考点：第八部分“相似”（第 230 页）、第八部分“投影与视图”（第 248 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

焦裕禄纪念园是全国重点革命烈士纪念建筑物保护单位，革命烈士纪念碑位于纪念园南部的中心。某综合与实践小组开展测量纪念碑高度的活动，记录如下。

项目	内容
活动主题	测量纪念碑的高度
实物图和测量示意图	见下图（实物照片从略）
测量说明	如图，纪念碑 AB 位于有台阶的平台 BC 上，太阳光下，其顶端 A 的影子落在点 D 处，同一时刻，竖直放置的标杆 DE 顶端 E 的影子落在点 F 处，位于点 M 处的观测者眼睛所在位置为点 N，点 N，E，A 在一条直线上，纪念碑底部点 B 在观测者的水平视线上。
测量数据	$DE=2.1$ m，$DF=2.1$ m，$DM=1$ m，$MN=1.2$ m。
备注	点 F，M，D，C 在同一水平线上。



根据以上信息，解决下列问题。

（1）由标杆的影子 DF 的长和标杆 DE 的长相等，可得 $CD=CA$，请说明理由。

（2）求纪念碑 AB 的高度。

（3）小红通过间接测量得到 CD 的长，进而求出纪念碑 AB 的高度约为 18.5 m。查阅资料得知，纪念碑的实际高度为 19.64 m。请判断小红的结果和（2）中的结果哪个误差较大？并分析误差较大的可能原因（写出一条即可）。

答案： （1）同一时刻的太阳光线是平行的，所以 $EF/\!/AD$；ED，AC 都与地面垂直，所以 $ED/\!/AC$。于是 $\angle EFD=\angle ADC$，$\angle EDF=\angle ACD$，$\triangle EDF\backsim\triangle ACD$，$CD/(CA)=DF/(DE)=1$，所以 $CD=CA$。

（2）过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H。设 $AB=x$ m。

由题意，$BC=MN=1.2$ m，$CH=DE=2.1$ m，所以 $EH=CD=CA=(x+1.2)$ m，$BN=CM=CD+DM=(x+2.2)$ m，$AH=CA-CH=(x-0.9)$ m。

因为 $EH/\!/BN$，所以 $\angle ANB=\angle AEH$，$\tan\angle ANB=\tan\angle AEH$，即

$$\frac{x}{x+2.2}=\frac{x-0.9}{x+1.2}.$$

解得 $x=19.8$，经检验 $x=19.8$ 符合题意。纪念碑 AB 的高度为 19.8 m。

（3）（2）中结果的误差是 $19.8-19.64=0.16$（m），小红结果的误差是 $19.64-18.5=1.14$（m），$0.16<1.14$，所以小红的结果误差较大。可能的原因：测量工具不精确（答案不唯一，合理即可）。

思路： 高 AB 够不着，就找和它相似的小三角形。（1）太阳光平行，标杆和它的影子组成的三角形与纪念碑和它的影子组成的三角形相似，标杆的影长等于杆长，纪念碑的“影长”CD 也就等于它的“高”CA（见第八部分“投影与视图”（第 248 页））。（2）视线 N，E，A 共线，站在两个直角三角形 ANB 和 AEH 里看同一个角，两条直角边的比相等，列出关于 x 的方程。把 $CD=CA$ 用进来，才能把所有长度都用 x 表示。

第 22 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

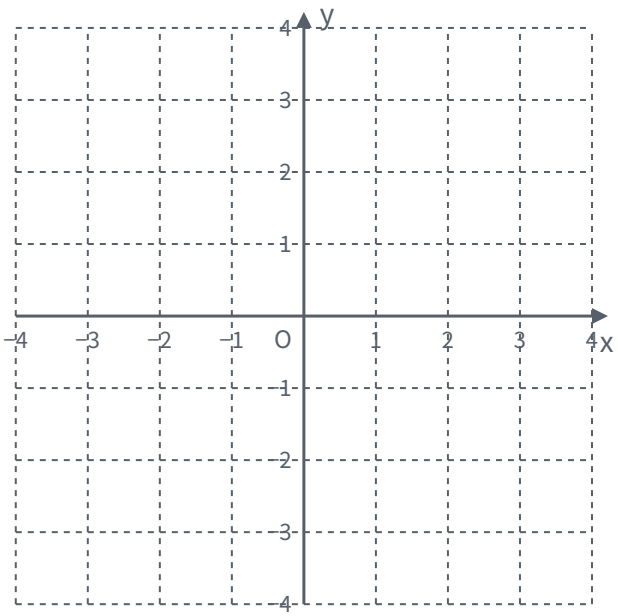
在二次函数 $y=ax^2+bx-2$ 中，x 与 y 的几组对应值如下表所示。

x	…	-2	0	1	…
y	…	-2	-2	1	…

（1）求二次函数的表达式。

（2）求二次函数图象的顶点坐标，并在给出的平面直角坐标系中画出二次函数的图象。

（3）将二次函数的图象向右平移 n 个单位长度后，当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，若图象对应的函数最大值与最小值的差为 5，请直接写出 n 的值。

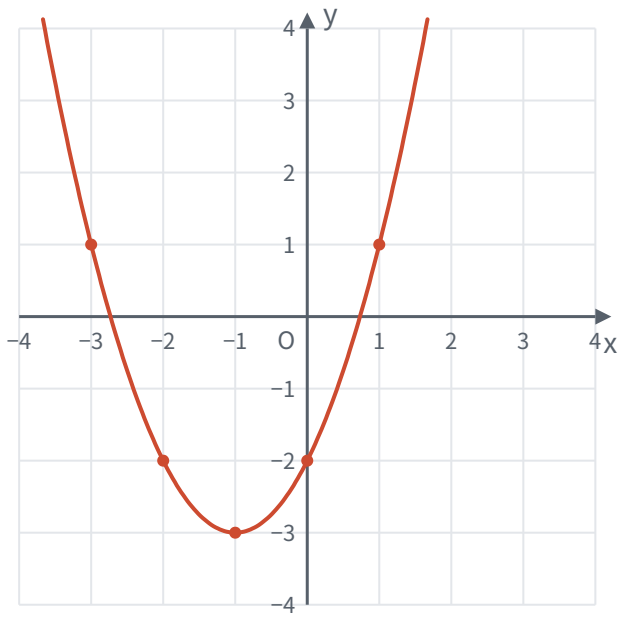


答案： （1）把 $x=-2$，$y=-2$ 和 $x=1$，$y=1$ 代入，得

$$\begin{cases}4a-2b-2=-2,\\ a+b-2=1.\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=2$，所以二次函数的表达式为 $y=x^2+2x-2$。

（2）$y=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$，顶点坐标为 $(-1,-3)$。图象如下图。



（3）$n=4-\sqrt{5}$ 或 $n=1+\sqrt{5}$。

思路： （2）配方得顶点式，描点时以对称轴 $x=-1$ 为中心左右对称地取点。（3）平移后是 $y=(x-h)^2-3$，对称轴 $x=h=n-1$。函数在区间上的最大、最小值取决于对称轴在区间的左边、里面还是右边，要分类讨论。对称轴在 $0\leqslant x\leqslant 3$ 左边时，差为 $(3-h)^2-h^2=9-6h=5$，$h=2/3$，与 $h<0$ 矛盾；在右边时同理矛盾。所以对称轴在区间内，最小值在顶点，差就是 $(x-h)^2$ 的最大值，即 h^2 与 $(3-h)^2$ 中较大的等于 5：$h=\sqrt{5}$ 或 $h=3-\sqrt{5}$，所以 $n=1+\sqrt{5}$ 或 $4-\sqrt{5}$。

第 23 题

考点：第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

在 $\angle AOB$ 中，点 C 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，过点 C 作 $CD\perp OB$，垂足为点 D，过点 D 作 $DE\perp OA$，垂足为点 E，直线 DE，OC 交于点 F，过点 C 作 $CG\perp DE$，垂足为点 G。

（1）**观察猜想**

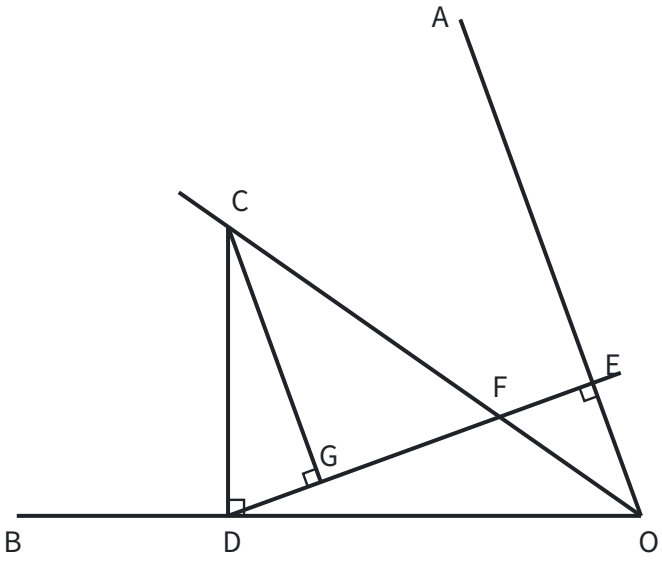
如图 1，当 $\angle AOB$ 为锐角时，用等式表示线段 CG，OE，OD 的数量关系：____。

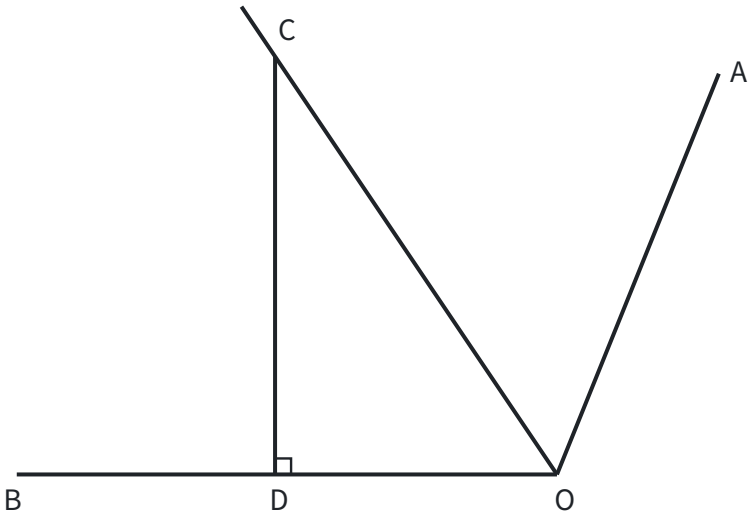
（2）**类比探究**

如图 2，当 $\angle AOB$ 为钝角时，请依据题意补全图形（无需尺规作图），并判断（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出正确结论，并证明。

（3）**拓展应用**

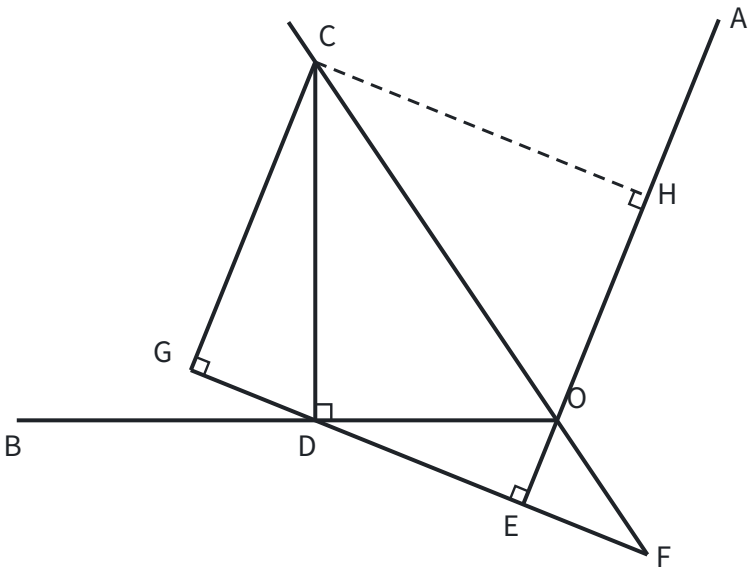
当 $0°<\angle AOB<180°$，且 $\angle AOB\neq 90°$ 时，若 $GF/(EF)=3$，请直接写出 $OD/(CD)$ 的值。





答案： （1）$CG+OE=OD$。

（2）补全图形如下（虚线 CH 是证明时添的辅助线）。



不成立，正确结论是 $CG-OE=OD$。证明如下：

过点 C 作 $CH\perp OA$，交直线 OA 于点 H。因为 $CG\perp DE$，$DE\perp OA$，所以 $\angle CHE=\angle HEG=\angle G=90°$，四边形 $CGEH$ 是矩形，$CG=EH=OE+OH$。

因为 OC 平分 $\angle AOB$，所以 $\angle COD=\angle COH$；又 $\angle ODC=\angle OHC=90°$，$OC=OC$，所以 $\triangle ODC\cong\triangle OHC$（AAS），$OD=OH$。

所以 $CG=OE+OD$，即 $CG-OE=OD$。

（3）$OD/(CD)=\sqrt{15}/3$ 或 $\sqrt{3}/3$。

思路： 三条线段 CG，OE，OD 不在一起，要把它们“搬”到一条直线上。CG 与 OA 平行（都垂直于 DE），过 C 作 OA 的垂线 CH，就得到矩形 $CGEH$，CG 搬到了 OA 上成为 EH；角平分线上的点到角两边的距离相等，全等三角形又把 OD 搬成 OH。锐角时点 E 在 H 和 O 之间，$EH=OH-OE$；钝角时点 E 落在 AO 的延长线上，$EH=OH+OE$，结论随之改变。

（3）$GF/(EF)$ 是同一条直线上的两段，要换成能和 OD，CD 联系起来的比。OE 和 CG 都垂直于 DE，互相平行，$\triangle FEO\backsim\triangle FGC$，所以 $CG/(OE)=GF/(EF)=3$。锐角时由（1）得 $OD=CG+OE=4OE$，钝角时由（2）得 $OD=CG-OE=2OE$。再看 $\triangle CGD$ 和 $\triangle DEO$：都有直角，$\angle CDG$ 和 $\angle DOE$ 都与 $\angle ODE$ 互余，所以两个三角形相似，$CG/(CD)=DE/(OD)$。锐角时取 $OE=1$，则 $OD=4$，$CG=3$，$DE=\sqrt{15}$，得 $CD=12/(\sqrt{15})$，$OD/(CD)=\sqrt{15}/3$；钝角时 $OD=2$，$CG=3$，$DE=\sqrt{3}$，得 $CD=2\sqrt{3}$，$OD/(CD)=\sqrt{3}/3$。

2024 年河南中考数学

> 河南省 2024 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

考点：第二部分“有理数”（第 36 页）

如图，数轴上点 P 表示的数是



A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

答案： A　　**思路：** 数轴上的点和数一一对应。点 P 在原点左边，和原点隔一个单位长度，表示的数是 -1。

第 2 题

考点：第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

据统计，2023 年我国人工智能核心产业规模达 5 784 亿元。数据“5 784 亿”用科学记数法表示为

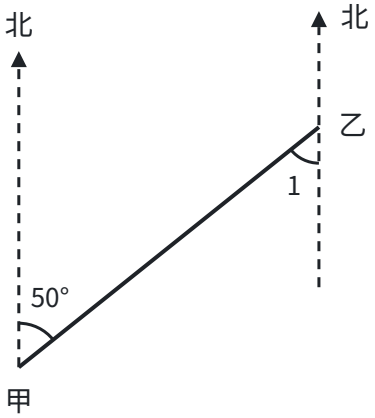
A. 5784×10^{8}　　B. 5.784×10^{10}　　C. 5.784×10^{11}　　D. 0.5784×10^{12}

答案： C　　**思路：** 先把“亿”换成数：1 亿 $=10^{8}$，所以 5 784 亿 $=5784\times10^{8}=5.784\times10^{3}\times10^{8}=5.784\times10^{11}$。科学记数法要求 $a\times10^{n}$ 中 $1\leqslant|a|<10$，A、D 的 a 都不在这个范围内。

第 3 题

考点：第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）

如图，乙地在甲地的北偏东 50° 方向上，则 $\angle 1$ 的度数为



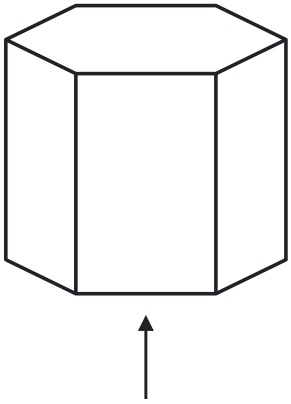
A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

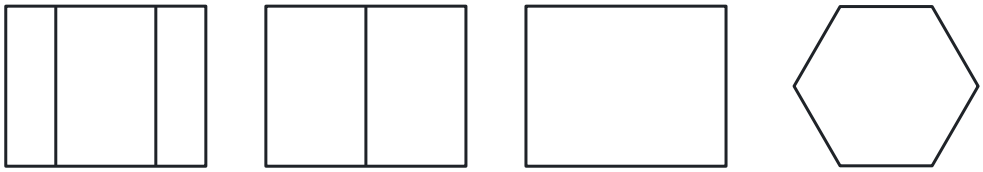
答案： B **思路：** 两地的“正北”方向都是竖直向上的，所以两条指北的直线互相平行。连接甲、乙的线段是它们的截线，50° 的角和 $\angle 1$ 是内错角，两直线平行，内错角相等，所以 $\angle 1 = 50°$。

第 4 题

考点：第八部分“投影与视图”（第 248 页）

信阳毛尖是中国十大名茶之一。如图是信阳毛尖茶叶的包装盒，它的主视图为





A. 矩形，中间有两条竖线（见选项图 A）

B. 矩形，中间有一条竖线（见选项图 B）

C. 矩形（见选项图 C）

D. 正六边形（见选项图 D）

答案： A **思路：** 包装盒是正六棱柱，主视图是从正面（箭头方向）看到的图形。正面对着我们的是一个侧面，左右两边各有一个斜着的侧面，看过去被压窄了，所以是一个矩形被两条竖线分成三块，中间宽、两边

窄。六边形 D 是从上面看到的俯视图。

第 5 题

考点：第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

下列不等式中，与 $-x>1$ 组成的不等式组无解的是

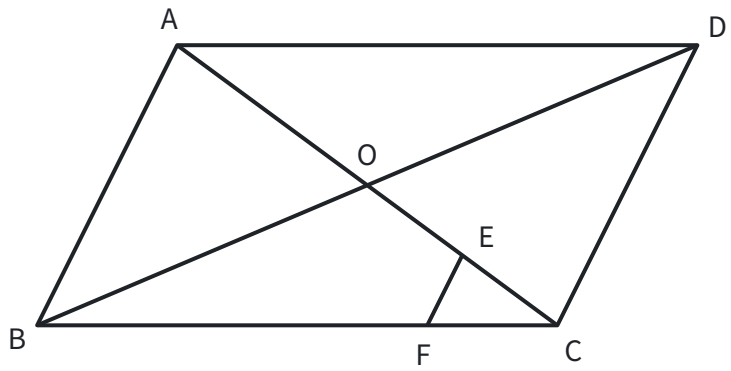
A. $x>2$　　B. $x<0$　　C. $x<-2$　　D. $x>-3$

答案： A　　**思路：** 先解 $-x>1$：两边同乘 -1，不等号改变方向，得 $x<-1$。不等式组无解，就是两个解集在数轴上没有公共部分。$x<-1$ 和 $x>2$ 一个在 -1 左边、一个在 2 右边，没有重叠；B、C、D 都和 $x<-1$ 有公共部分。

第 6 题

考点：第八部分“相似”（第 230 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）

如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 为 OC 的中点，$EF\parallel AB$ 交 BC 于点 F。若 $AB=4$，则 EF 的长为



A. $1/2$　　B. 1　　C. $4/3$　　D. 2

答案： B　　**思路：** 平行四边形的对角线互相平分，O 是 AC 的中点，E 又是 OC 的中点，所以 $CE=(1/4)CA$。$EF\parallel AB$，得 $\triangle CEF\backsim\triangle CAB$，对应边成比例：$EF=(1/4)AB=1$。

第 7 题

考点：第三部分“整式的乘法”（第 62 页）

计算

$$\left(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{a\text{个}}\right)^3$$

的结果是

A. a^5　　B. a^6　　C. a^{a+3}　　D. a^{3a}

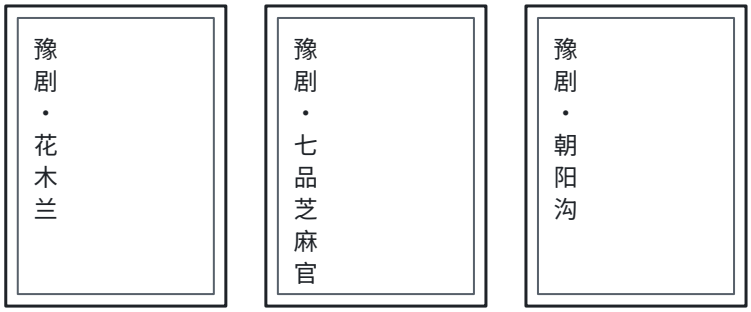
答案： D　　**思路：** 括号里是 a 个 a 相乘，按乘方的定义就是 a^a。再用幂的乘方法则“底数不变，指数相乘”：$(a^a)^3=a^{3a}$。这里指数本身是字母，只要回到乘方的定义就不会被它迷惑。

第 8 题

考点：第十部分“概率”（第 302 页）

豫剧是国家级非物质文化遗产，因其雅俗共赏，深受大众喜爱。正面印有豫剧经典剧目人物的三张卡片如图所

示，它们除正面外完全相同。把这三张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取一张，放回洗匀后，再从中随机抽取一张，两次抽取的卡片正面相同的概率为



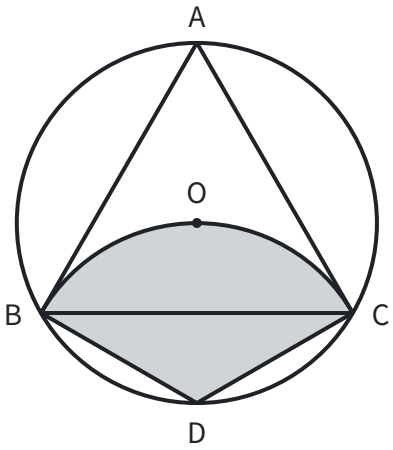
A. $1/9$　　B. $1/6$　　C. $1/5$　　D. $1/3$

答案： D　　**思路：** “放回”说明两次抽取互不影响，每次都有 3 种等可能的结果。列表或画树状图，共 $3\times3=9$ 种等可能的结果，其中两次相同的有 3 种，所以概率是 $3/9=1/3$。

第 9 题

考点：第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）

如图，⊙O 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的外接圆，点 D 是 BC 的中点，连接 BD，CD。以点 D 为圆心，BD 的长为半径在 ⊙O 内画弧，则阴影部分的面积为



A. $8\pi/3$　　B. 4π　　C. $16\pi/3$　　D. 16π

答案： C　　**思路：** 阴影是以 D 为圆心、BD 为半径的扇形，要求出半径和圆心角。$\angle BAC=60°$，所以 BC 所对的圆心角是 $120°$，D 是它的中点，$\angle BOD=60°$，$\triangle OBD$ 是等边三角形，$BD=OB$。OB 是外接圆半径：等边三角形的外心也是重心，在高上且到顶点的距离是高的 $2/3$，高为 $4\sqrt{3}\times\sqrt{3}/2=6$，所以 $OB=4$。圆内接四边形 $ABDC$ 的对角互补，$\angle BDC=180°-60°=120°$。所以阴影面积为

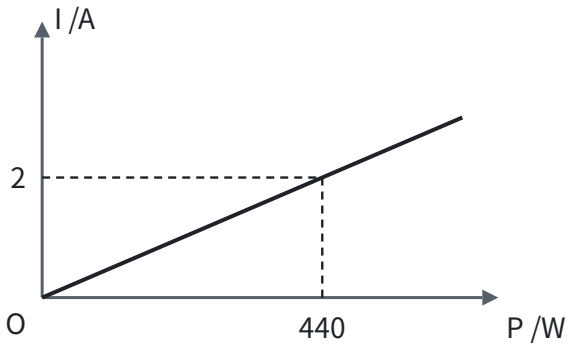
$$\frac{120\pi\times4^2}{360}=\frac{16\pi}{3}.$$

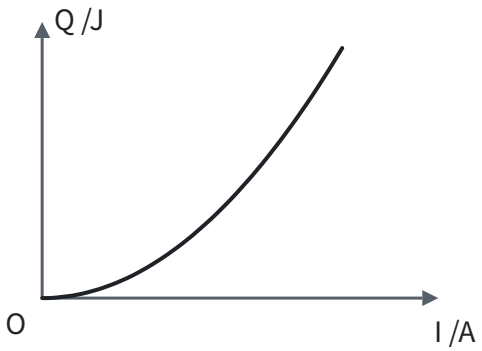
第 10 题

考点：第七部分“函数”（第 201 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第七部分“二次函数”（第 218 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

把多个用电器连接在同一个插线板上，同时使用一段时间后，插线板的电源线会明显发热，存在安全隐患。数学兴趣小组对这种现象进行研究，得到时长一定时，插线板电源线中的电流 I 与使用电器的总功率 P 的函数图

象（如图 1），插线板电源线产生的热量 Q 与 I 的函数图象（如图 2）。下列结论中错误的是





A. 当 $P=440$ W 时，$I=2$ A

B. Q 随 I 的增大而增大

C. I 每增加 1 A，Q 的增加量相同

D. P 越大，插线板电源线产生的热量 Q 越多

答案： C **思路：** 逐项读图。A 直接从图 1 读出。图 2 从左往右一直上升，B 对。把两张图接起来：P 越大 I 越大，I 越大 Q 越多，D 对。图 2 是一条越来越陡的曲线，不是直线，说明 I 每增加 1 A，Q 的增加量越来越大；增加量相同的只有一次函数（直线），C 错。

第 11 题

考点：第三部分“整式的加减”（第 59 页）

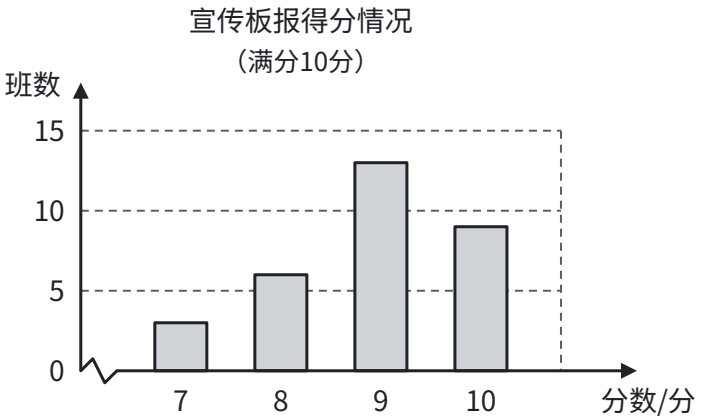
请写出 $2m$ 的一个同类项：____。

答案： m（答案不唯一） **思路：** 同类项要求所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，系数可以不同。$2m$ 只含字母 m，指数是 1，所以 m、$-3m$、$(1/2)m$ 都可以。

第 12 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

2024 年 3 月是第 8 个全国近视防控宣传教育月，其主题是“有效减少近视发生，共同守护光明未来”。某校组织各班围绕这个主题开展板报宣传活动，并对各班的宣传板报进行评分，得分情况如图，则得分的众数为 ____ 分。



答案： 9　　**思路：** 众数是一组数据中出现次数最多的数据。条形图的横轴是得分，纵轴是班数，最高的条形对应 9 分（13 个班），所以众数是 9 分。注意众数是得分 9，而不是班数 13。

第 13 题

考点：第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

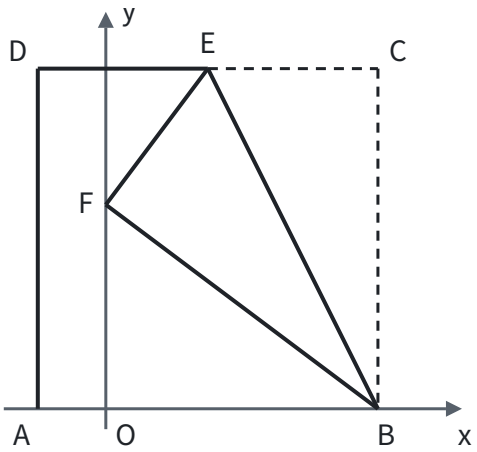
若关于 x 的方程 $(1/2)x^2 - x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 c 的值为 _____。

答案： $1/2$　　**思路：** 一元二次方程有两个相等的实数根，就是判别式等于 0：$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1/2 \times c = 1 - 2c = 0$，得 $c = 1/2$。

第 14 题

考点：第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

如图，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(-2, 0)$，点 E 在边 CD 上。将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，点 C 落在点 F 处。若点 F 的坐标为 $(0, 6)$，则点 E 的坐标为 _____。



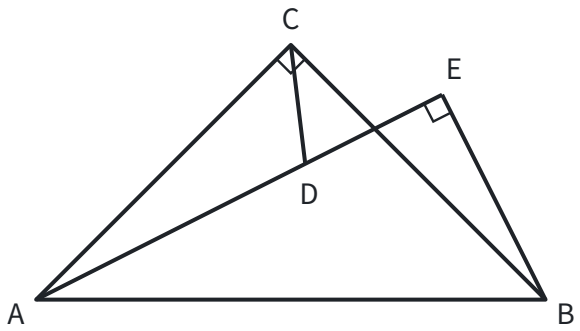
答案： $(3, 10)$　　**思路：** 折叠是轴对称，折叠前后对应线段相等：$BF = BC$，$EF = EC$。设正方形边长为 a，则 $B(a-2, 0)$。在 Rt$\triangle BOF$ 中，$BF^2 = (a-2)^2 + 6^2$，又 $BF = a$，得 $a = 10$，所以 $C(8, 10)$。设 $E(x, 10)$，则 $EC = 8 - x$，$EF^2 = x^2 + (10-6)^2$，由 $EF = EC$ 得 $(8-x)^2 = x^2 + 16$，$x = 3$。两次都是“折叠给等长，勾股定理列方程”。

第 15 题

考点：第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）、第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）

如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CA = CB = 3$，线段 CD 绕点 C 在平面内旋转，过点 B 作 AD 的垂线，交

射线 AD 于点 E。若 $CD=1$，则 AE 的最大值为 _____，最小值为 _____。



答案： $2\sqrt{2}+1$；$2\sqrt{2}-1$　　**思路：** 点 D 在以 C 为圆心、1 为半径的圆上运动。$\angle AEB=\angle ACB=90°$，所以 E、C 都在以 AB 为直径的圆上，$AE=AB\cos\angle BAE$，$\angle BAE$ 越小 AE 越大。$\angle BAE=45°\pm\angle CAD$，而 $\angle CAD$ 在 AD 与 $\odot C$ 相切时最大（见第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）），所以最大值、最小值都出现在相切的时候。相切时 $CD\perp AD$，$AD=\sqrt{(3^2-1^2)}=2\sqrt{2}$；$\angle AEC$ 和 $\angle ABC$ 都是 AC 所对的圆周角，相等或互补，由此可得 $\angle CED=45°$，所以 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形，$DE=CD=1$。E 在 D 外侧时 $AE=AD+DE=2\sqrt{2}+1$，E 在 A、D 之间时 $AE=AD-DE=2\sqrt{2}-1$。

第 16 题

考点：第三部分“二次根式”（第 79 页）、第三部分“分式”（第 74 页）、第二部分“实数”（第 47 页）、第三部分“因式分解”（第 69 页）

（1）计算：$\sqrt{2}\times\sqrt{50}-(1-\sqrt{3})^0$；

（2）化简：

$$\left(\frac{3}{a-2}+1\right)\div\frac{a+1}{a^2-4}.$$

答案：（1）原式 $=10-1=9$。

（2）

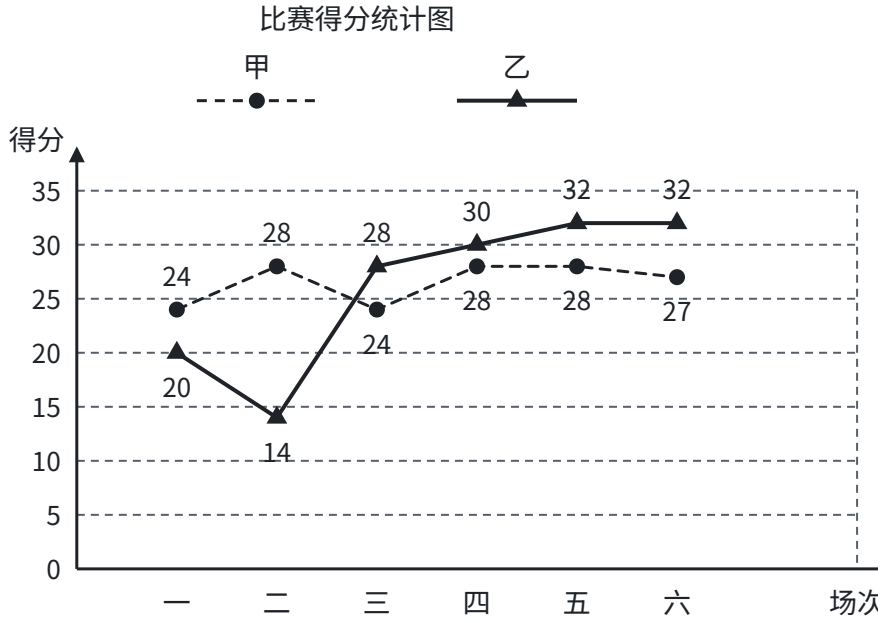
$$\text{原式}=\frac{a+1}{a-2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{a+1}=a+2.$$

思路：（1）$\sqrt{2}\times\sqrt{50}=\sqrt{100}=10$；$1-\sqrt{3}\neq 0$，它的 0 次幂等于 1。（2）先把括号里通分：$3/(a-2)+1=(3+a-2)/(a-2)=(a+1)/(a-2)$；除以一个分式等于乘它的倒数，再把 a^2-4 分解成 $(a+2)(a-2)$，约去公因式。

第 17 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

为提升学生体质健康水平，促进学生全面发展，学校开展了丰富多彩的课外体育活动。在八年级组织的篮球联赛中，甲、乙两名队员表现优异，他们在近六场比赛中关于得分、篮板和失误三个方面的统计结果如下。



技术统计表：

队员	平均每场得分	平均每场篮板	平均每场失误
甲	26.5	8	2
乙	26	10	3

根据以上信息，回答下列问题。

（1）这六场比赛中，得分更稳定的队员是 ____（填“甲”或“乙”）；甲队员得分的中位数为 27.5 分，乙队员得分的中位数为 ____ 分。

（2）请从得分方面分析：这六场比赛中，甲、乙两名队员谁的表现更好。

（3）规定“综合得分”为：平均每场得分 × 1 + 平均每场篮板 × 1.5 + 平均每场失误 ×（−1），且综合得分越高表现越好。请利用这种评价方法，比较这六场比赛中甲、乙两名队员谁的表现更好。

答案： （1）甲；29。

（2）因为甲的平均每场得分大于乙的平均每场得分，且甲的得分更稳定，所以甲队员表现更好。（答案不唯一，合理即可）

（3）甲的综合得分为 $26.5\times1+8\times1.5+2\times(-1)=36.5$，乙的综合得分为 $26\times1+10\times1.5+3\times(-1)=38$。因为 $38>36.5$，所以乙队员表现更好。

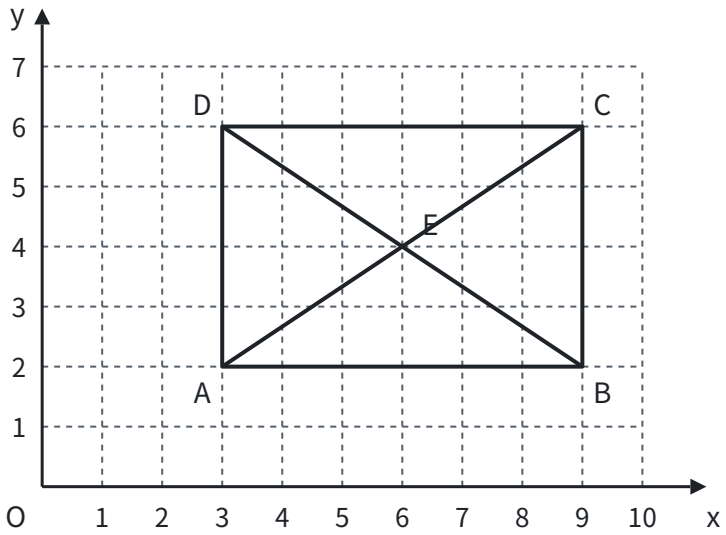
思路： （1）稳定性看数据的波动：甲的折线在 24 到 28 之间小幅起伏，乙从 14 升到 32，波动大，所以甲更稳定。乙的六场得分从小到大是 14，20，28，30，32，32，偶数个数据取中间两个的平均数，$(28+30)/2=29$。（2）比较两组数据，平均数看整体水平，方差看稳定性。（3）综合得分就是加权平均的想法，按规定的权重代入计算；失误的权重是 −1，失误越多得分越低。评价标准变了，结论也可能变。

第 18 题

考点：第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

如图，矩形 $ABCD$ 的四个顶点都在格点（网格线的交点）上，对角线 AC，BD 相交于点 E，反比例函数 $y=k/$

x（$x>0$）的图象经过点 A。



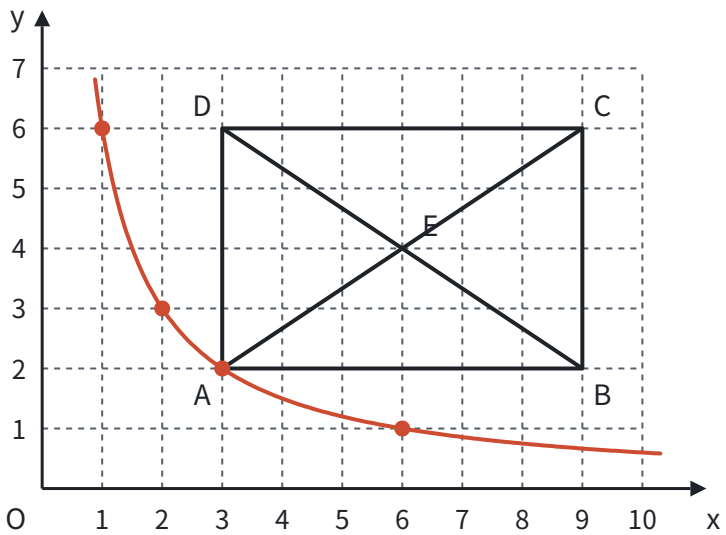
（1）求这个反比例函数的表达式。

（2）请先描出这个反比例函数图象上不同于点 A 的三个格点，再画出反比例函数的图象。

（3）将矩形 $ABCD$ 向左平移，当点 E 落在这个反比例函数的图象上时，平移的距离为 ____。

答案： （1）由图知 $A(3,2)$。因为反比例函数 $y=k/x$ 的图象经过点 A，所以 $2=k/3$，$k=6$，这个反比例函数的表达式为 $y=6/x$。

（2）描出格点 $(1,6)$，$(2,3)$，$(6,1)$，用光滑的曲线连接，图象如图。



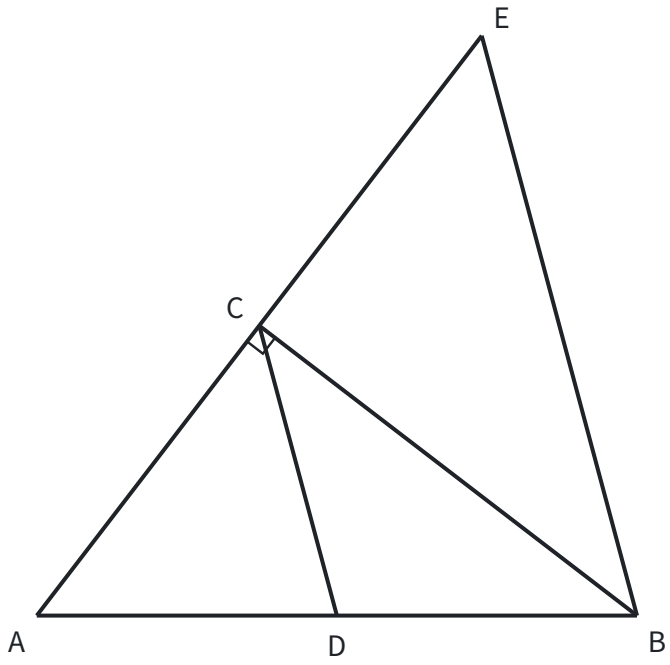
（3）$9/2$

思路： （1）待定系数法，一个点就能定出 k。（2）图象上的格点，横、纵坐标都是整数且乘积为 6，$x>0$ 时只有 $(1,6)$，$(2,3)$，$(3,2)$，$(6,1)$。（3）向左平移，纵坐标不变。$E(6,4)$，平移后纵坐标仍是 4，在图象上时 $x=6/4=3/2$，所以平移的距离是 $6-3/2=9/2$。

第 19 题

考点：第五部分“尺规作图”（第 169 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

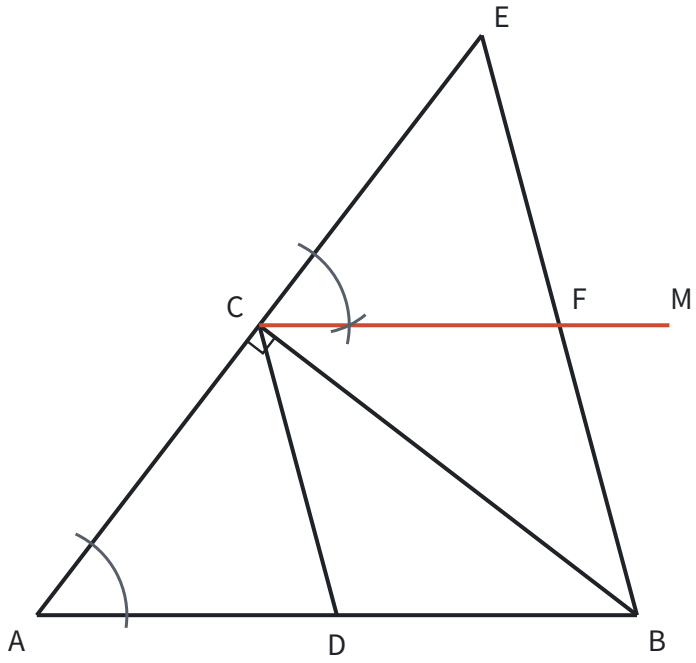
如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的中线，$BE\parallel DC$ 交 AC 的延长线于点 E。



（1）请用无刻度的直尺和圆规作 $\angle ECM$，使 $\angle ECM=\angle A$，且射线 CM 交 BE 于点 F（保留作图痕迹，不写作法）。

（2）证明（1）中得到的四边形 $CDBF$ 是菱形。

答案： （1）如图。



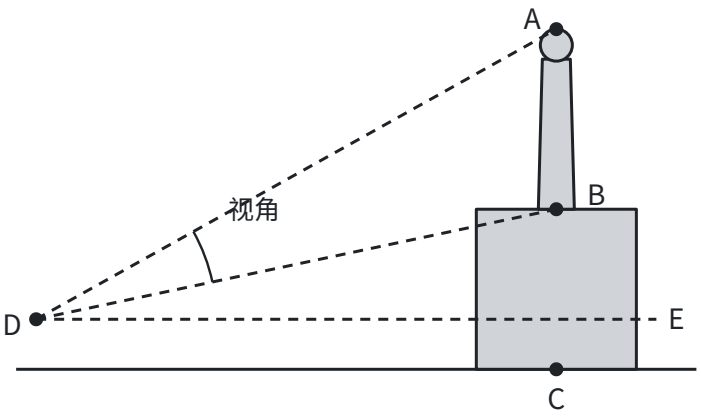
（2）由（1）得 $\angle ECF=\angle A$，所以 $CF/\!/AB$。又因为 $BE/\!/DC$，所以四边形 $CDBF$ 是平行四边形。因为 CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，所以 $CD=BD$。所以 $\square CDBF$ 是菱形。

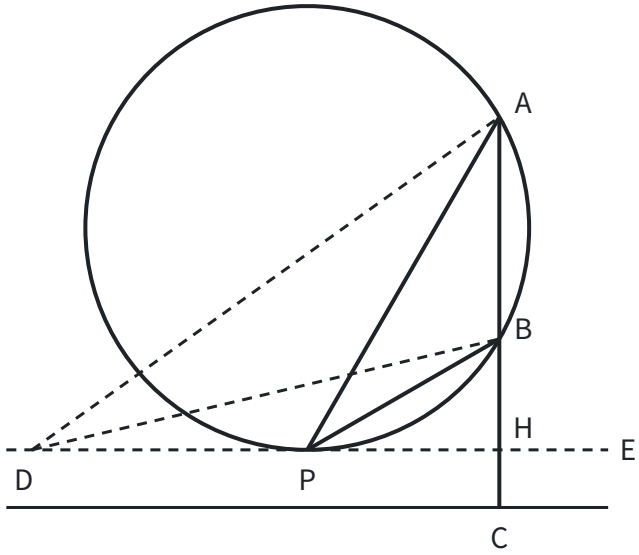
思路： （1）按“作一个角等于已知角”，以 CE 为一边在点 C 处复制 $\angle A$（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。（2）$\angle ECF$ 和 $\angle A$ 是同位角，同位角相等，所以 $CF/\!/AB$，两组对边分别平行，先得到平行四边形；再找一组邻边相等：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，$CD=BD=(1/2)AB$。

第 20 题

考点：第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）、第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第五部分“三角形”（第 128 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

如图 1，塑像 AB 在底座 BC 上，点 D 是人眼所在的位置。当点 B 高于人的水平视线 DE 时，由远及近看塑像，会在某处感觉看到的塑像最大，此时视角最大。数学家研究发现：当经过 A，B 两点的圆与水平视线 DE 相切时（如图 2），在切点 P 处感觉看到的塑像最大，此时 $\angle APB$ 为最大视角。

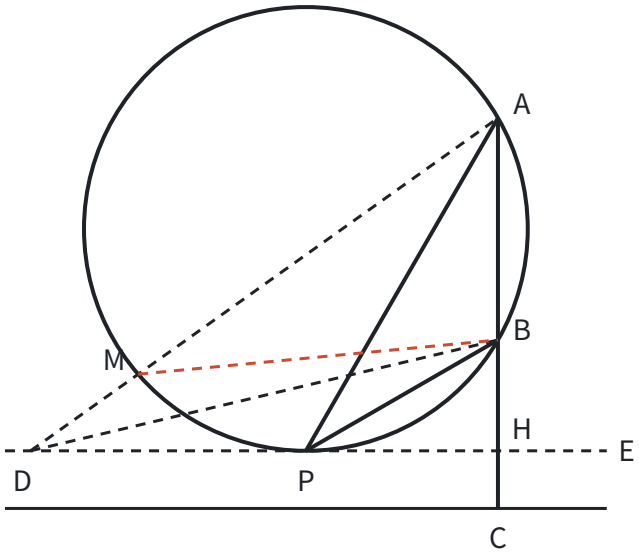




（1）请仅就图 2 的情形证明 $\angle APB > \angle ADB$。

（2）经测量，最大视角 $\angle APB$ 为 $30°$，在点 P 处看塑像顶部点 A 的仰角 $\angle APE$ 为 $60°$，点 P 到塑像的水平距离 PH 为 6 m。求塑像 AB 的高（结果精确到 0.1 m。参考数据：$\sqrt{3} \approx 1.73$）。

答案： （1）如图，设 AD 与圆交于点 M，连接 BM。则 $\angle AMB = \angle APB$。因为 $\angle AMB$ 是 $\triangle BMD$ 的外角，所以 $\angle AMB > \angle ADB$，所以 $\angle APB > \angle ADB$。



（2）在 Rt△AHP 中，$\angle APH=60°$，$PH=6$，所以 $AH=PH\cdot\tan60°=6\sqrt{3}$。因为 $\angle APB=30°$，所以 $\angle BPH=\angle APH-\angle APB=30°$。在 Rt△$BHP$ 中，$BH=PH\cdot\tan30°=6\times\sqrt{3}/3=2\sqrt{3}$。所以

$$AB=AH-BH=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\approx4\times1.73\approx6.9\text{（m）}.$$

答：塑像 AB 的高约为 6.9 m。

思路： （1）$\angle APB$ 的顶点在圆上，$\angle ADB$ 的顶点在圆外，要比较它们，就在圆上找一个和 $\angle APB$ 相等、又能和 $\angle ADB$ 放进同一个三角形的角：AD 与圆的交点 M 处的 $\angle AMB$ 和 $\angle APB$ 是同弧所对的圆周角，而它又是△BMD 的外角，大于不相邻的内角 $\angle ADB$。（2）A、B、H 在同一条竖直线上，$AB=AH-BH$，两段分别在两个有公共直角边 PH 的直角三角形里，用正切求出。

第 21 题

考点：第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）

为响应“全民植树增绿，共建美丽中国”的号召，学校组织学生到郊外参加义务植树活动，并准备了 A，B 两种食品作为午餐。这两种食品每包质量均为 50 g，营养成分表如下。

A 营养成分表：

项目	每 50 g
热量	700 kJ
蛋白质	10 g
脂肪	5.3 g
碳水化合物	28.7 g
钠	205 mg

B 营养成分表：

项目	每 50 g
热量	900 kJ
蛋白质	15 g

项目	每 50 g
脂肪	18.2 g
碳水化合物	6.3 g
钠	236 mg

（1）若要从这两种食品中摄入 4 600 kJ 热量和 70 g 蛋白质，应选用 A，B 两种食品各多少包?

（2）运动量大的人或青少年对蛋白质的摄入量应更多。若每份午餐选用这两种食品共 7 包，要使每份午餐中的蛋白质含量不低于 90 g，且热量最低，应如何选用这两种食品?

答案： （1）设选用 A 种食品 x 包，B 种食品 y 包。根据题意，得

$$\begin{cases}700x+900y=4600,\\10x+15y=70.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$$

答：选用 A 种食品 4 包，B 种食品 2 包。

（2）设选用 A 种食品 a 包，则选用 B 种食品 $(7-a)$ 包。根据题意，得 $10a+15(7-a)\geqslant 90$，解得 $a\leqslant 3$。

设总热量为 w kJ，则 $w=700a+900(7-a)=-200a+6300$。因为 $-200<0$，所以 w 随 a 的增大而减小。所以当 $a=3$ 时，w 最小，此时 $7-a=4$。

答：选用 A 种食品 3 包，B 种食品 4 包。

思路： （1）两个未知数，题目给了热量、蛋白质两个相等关系，列二元一次方程组。（2）“不低于”是不等关系，列不等式得出 a 的范围；“热量最低”是求最值，把热量写成 a 的一次函数，用增减性在范围的端点取最小值（见第七部分“一次函数”（第 206 页））。

第 22 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

从地面竖直向上发射的物体离地面的高度 h（m）满足关系式 $h=-5t^2+v_0t$，其中 t（s）是物体运动的时间，v_0（m/s）是物体被发射时的速度。社团活动时，科学小组在实验楼前从地面竖直向上发射小球。

（1）小球被发射后 _____ s 时离地面的高度最大（用含 v_0 的式子表示）。

（2）若小球离地面的最大高度为 20 m，求小球被发射时的速度。

（3）按（2）中的速度发射小球，小球离地面的高度有两次与实验楼的高度相同。小明说：“这两次间隔的时间为 3 s。”已知实验楼高 15 m，请判断他的说法是否正确，并说明理由。

答案： （1）$v_0/10$

（2）根据题意，当 $t=v_0/10$ 时，$h=20$，所以

$$-5\times\left(\frac{v_0}{10}\right)^2+v_0\cdot\frac{v_0}{10}=20,$$

解得 $v_0=20$（负值舍去）。即小球被发射时的速度是 20 m/s。

（3）小明的说法不正确。理由如下：由（2）得 $h=-5t^2+20t$。当 $h=15$ 时，$15=-5t^2+20t$，解得 $t_1=1$，$t_2=3$。$3-1=2$（s），所以两次间隔的时间为 2 s，小明的说法不正确。

思路： （1）h 是 t 的二次函数，二次项系数 $-5<0$，开口向下，顶点处最高，顶点横坐标是 $t=-v_0/(2\times(-5))=v_0/10$。（2）把顶点代入，得 $v_0^2/20=20$。（3）“高度等于 15 m”就是函数值等于 15，把函数问题转化成一元二次方程，两个根就是两次到达的时刻，间隔是两根之差。

第 23 题

考点：第五部分“四边形”（第 157 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第一部分“定义、命题与定理”（第 17 页）

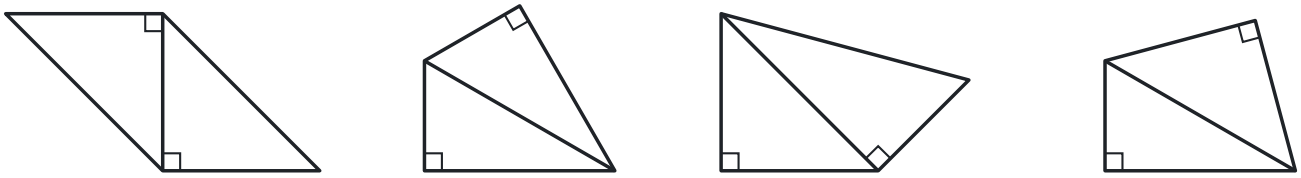
综合与实践

在学习特殊四边形的过程中，我们积累了一定的研究经验。请运用已有经验，对“邻等对补四边形”进行研究。

定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形。

（1）操作判断

用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图 1 所示的 4 个四边形，其中是邻等对补四边形的有____（填序号）。



①　②　③　④

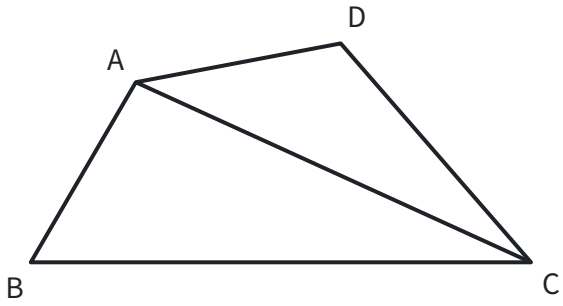
（2）性质探究

根据定义可得出邻等对补四边形的边、角的性质。下面研究与对角线相关的性质。

如图 2，四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形，$AB=AD$，AC 是它的一条对角线。

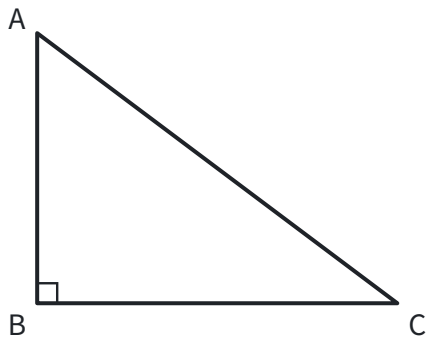
① 写出图中相等的角，并说明理由；

② 若 $BC=m$，$DC=n$，$\angle BCD=2\theta$，求 AC 的长（用含 m，n，θ 的式子表示）。



（3）拓展应用

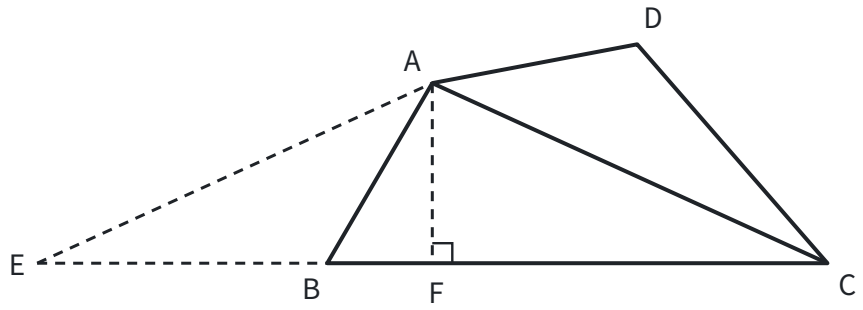
如图 3，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=3$，$BC=4$，分别在边 BC，AC 上取点 M，N，使四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形。当该邻等对补四边形仅有一组邻边相等时，请直接写出 BN 的长。



答案： （1）②④

（2）① $\angle ACD=\angle ACB$。理由如下：

如图，延长 CB 至点 E，使 $BE=DC$，连接 AE。因为四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形，所以 $\angle ABC+\angle D=180°$。又因为 $\angle ABC+\angle ABE=180°$，所以 $\angle ABE=\angle D$。又 $AB=AD$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADC$（SAS），所以 $\angle E=\angle ACD$，$AE=AC$，所以 $\angle E=\angle ACB$，所以 $\angle ACD=\angle ACB$。



② 过点 A 作 $AF\perp EC$，垂足为点 F。因为 $AE=AC$，所以

$$CF=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}(BC+BE)=\frac{1}{2}(BC+DC)=\frac{m+n}{2}.$$

因为 $\angle BCD=2\theta$，所以 $\angle ACB=\angle ACD=\theta$。在 Rt△$AFC$ 中，$\cos\theta=CF/(AC)$，所以

$$AC=\frac{CF}{\cos\theta}=\frac{m+n}{2\cos\theta}.$$

（3）$12\sqrt{2}/5$ 或 $12\sqrt{2}/7$

思路： （1）逐个检查定义的两个条件。① 是平行四边形，对角相等而不互补；③ 的两组对角都不互补。② 和 ④ 中，两个直角顶点相对，对角互补；② 是两个全等的含 30° 角的三角形拼成，④ 上面是等腰直角三角形，都有一组邻边相等。

（2）要证的两个角 $\angle ACB$、$\angle ACD$ 分在对角线两侧，条件 $AB=AD$ 也分在两侧。“对角互补”提示把 $\angle D$ 搬到 $\angle ABC$ 的邻补角上：延长 CB 构造和 $\triangle ADC$ 全等的三角形，把分散的条件集中到等腰三角形 AEC 里（见第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页））。于是 AC 平分 $\angle BCD$，求 AC 就在等腰三角形里作底边上的高，

用余弦（见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页））。

（3）$\angle B=90°$，对角互补要求 $\angle MNA=90°$，即 $MN\perp AC$。四组邻边中，若 $BM=MN$ 或 $NA=AB$，由 HL 可得 Rt$\triangle ABM\cong$ Rt$\triangle ANM$，两组邻边同时相等，不合题意，所以只能是 $AB=BM$ 或 $MN=NA$，分两种情况计算。两种情况都是先求出 CN，再以 B 为原点、BC 为 x 轴、BA 为 y 轴建立坐标系，由 $C(4,0)$ 沿 CA 方向走 CN 得到点 N 的坐标，再算 BN。$AB=BM=3$ 时，$CM=1$，N 是 M 在 AC 上的垂足，$CN=CM\cos C=4/5$，得 $N(84/25,12/25)$，$BN=12\sqrt{2}/5$；这时 $MN=3/5$，$NA=21/5$，确实只有一组邻边相等。$MN=NA$ 时，设 $NA=t$，则 $CN=5-t$，由 $\tan C=MN/(CN)=3/4$ 得 $t=(3/4)(5-t)$，$t=15/7$，$CN=20/7$，得 $N(12/7,12/7)$，$BN=12\sqrt{2}/7$；这时 $CM=CN/(\cos C)=25/7<4$，M 在边 BC 上，$BM=3/7$，也只有一组邻边相等。

2023 年河南中考数学

> 河南省 2023 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

考点：第二部分“实数”（第 47 页）

下列各数中，最小的数是

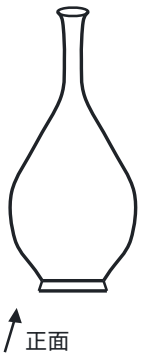
A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

答案： A　　**思路：** 比较大小先看正负：负数小于 0，0 小于正数。四个数里只有 -1 是负数，所以它最小，不用再比较 1 和 $\sqrt{3}$。

第 2 题

考点：第八部分“投影与视图”（第 248 页）

北宋时期的汝官窑天蓝釉刻花鹅颈瓶是河南博物院九大镇院之宝之一，具有极高的历史价值、文化价值。如图所示，关于它的三视图，下列说法正确的是



A. 主视图与左视图相同　　B. 主视图与俯视图相同　　C. 左视图与俯视图相同　　D. 三种视图都相同

答案： A　　**思路：** 瓶子可以看成一条曲线绕竖直的轴转一圈得到的，从前面看和从左面看，看到的都是同一个瓶身轮廓，所以主视图和左视图相同；从上面看是几个同心圆，和另外两个视图不同。

第 3 题

考点：第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

2022 年河南省出版的 4.59 亿册图书，为贯彻落实党的二十大关于深化全民阅读活动的重要精神，建设学习型

社会提供了丰富的图书资源。数据“4.59 亿”用科学记数法表示为

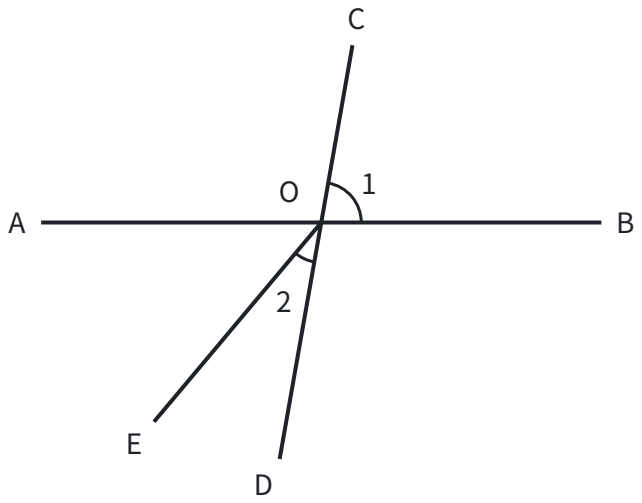
A. 4.59×10^{7}　　B. 45.9×10^{8}　　C. 4.59×10^{8}　　D. 0.459×10^{9}

答案： C　　**思路：** 科学记数法要求写成 $a\times10^{n}$，$1\leqslant|a|<10$，所以 B、D 的形式就不对。1 亿 $=10^{8}$，4.59 亿 $=4.59\times10^{8}$。

第 4 题

考点：第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）

如图，直线 AB，CD 相交于点 O，若 $\angle1=80°$，$\angle2=30°$，则 $\angle AOE$ 的度数为



A. $30°$　　B. $50°$　　C. $60°$　　D. $80°$

答案： B　　**思路：** $\angle AOE$ 和已知的两个角都不直接相关，先找它所在的大角：$\angle AOE$ 是 $\angle AOD$ 去掉 $\angle2$ 剩下的部分。$\angle AOD$ 和 $\angle1$ 是对顶角，等于 $80°$，所以 $\angle AOE=80°-30°=50°$。

第 5 题

考点：第三部分“分式”（第 74 页）

化简 $(a-1)/a+1/a$ 的结果是

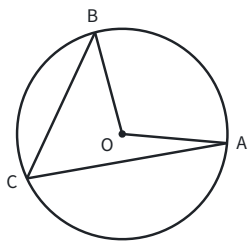
A. 0　　B. 1　　C. a　　D. $a-2$

答案： B　　**思路：** 同分母的分式相加，分母不变，分子相加：$(a-1+1)/a=a/a=1$。道理和同分母分数相加一样。

第 6 题

考点：第九部分“圆的有关性质”（第 259 页）

如图，点 A，B，C 在 $\odot O$ 上，若 $\angle C=55°$，则 $\angle AOB$ 的度数为



A. $95°$　　B. $100°$　　C. $105°$　　D. $110°$

答案： D **思路：** $\angle C$ 是圆周角，$\angle AOB$ 是圆心角，它们对着同一条弧 AB。同弧所对的圆周角是圆心角的一半，所以 $\angle AOB = 2 \times 55° = 110°$。

第 7 题

考点：第四部分“一元二次方程”（第 104 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 8 = 0$ 的根的情况是

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

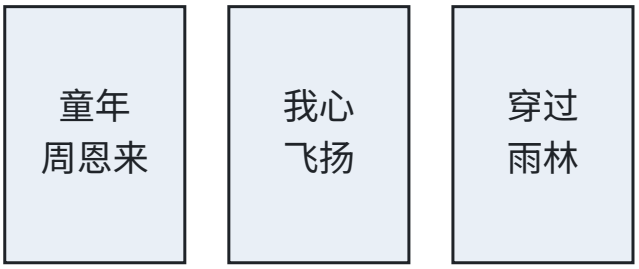
D. 没有实数根

答案： A **思路：** 根的情况看判别式：$\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-8) = m^2 + 32$。不管 m 取什么值，$m^2 \geqslant 0$，所以 $\Delta > 0$，方程总有两个不相等的实数根。也可以看图：抛物线 $y = x^2 + mx - 8$ 开口向上，又经过 x 轴下方的点 $(0, -8)$，所以一定与 x 轴有两个交点，方程有两个不相等的实数根。

第 8 题

考点：第十部分“概率”（第 302 页）

为落实教育部办公厅、中共中央宣传部办公厅关于《第 41 批向全国中小学生推荐优秀影片片目》的通知精神，某校七、八年级分别从如图所示的三部影片中随机选择一部组织本年级学生观看，则这两个年级选择的影片相同的概率为



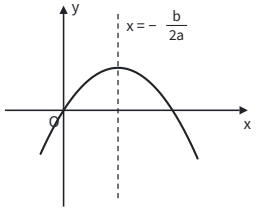
A. $1/2$ B. $1/3$ C. $1/6$ D. $1/9$

答案： B **思路：** 两个年级各选一部，是两步试验，用列表或画树状图列出所有结果：$3 \times 3 = 9$ 种，每种可能性相同。其中两个年级选的相同有 3 种，所以概率是 $3/9 = 1/3$。

第 9 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = x + b$ 的图象一定不经过



A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

答案： D **思路：** 从图象读出系数的符号：开口向下，$a < 0$；对称轴在 y 轴右侧，$-b/(2a) > 0$，而 $a < 0$，所以 $b > 0$。直线 $y = x + b$ 的 $k = 1 > 0$，从左往右上升，又与 y 轴交在正半轴，所以经过第一、二、三象限，不

经过第四象限。

第 10 题

考点：第十一部分“动点与函数”（第 323 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）

如图 1，点 P 从等边三角形 ABC 的顶点 A 出发，沿直线运动到三角形内部一点，再从该点沿直线运动到顶点 B。设点 P 运动的路程为 x，$PB/(PC)=y$，图 2 是点 P 运动时 y 随 x 变化的关系图象，则等边三角形 ABC 的边长为

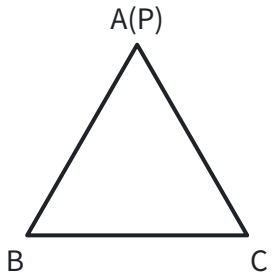


图 1

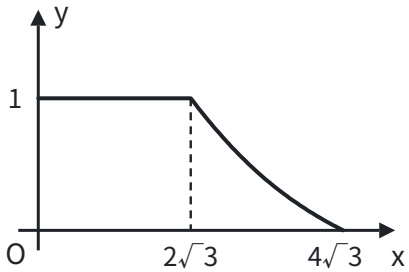


图 2

A. 6　　B. 3　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

答案： A　　**思路：** 先读图：第一段 $y=1$ 不变，说明 $PB=PC$，点 P 一直在 BC 的垂直平分线上，也就是沿着从 A 出发的高走，走了 $2\sqrt{3}$；第二段从内部那一点走到 B，也走了 $2\sqrt{3}$。这一点到 A、B 的距离相等，又在 BC 的垂直平分线上，所以是三边垂直平分线的交点，即等边三角形的中心 O。AO 是高的 $2/3$，设边长为 a，则 $2/3\times(\sqrt{3}/2)a=2\sqrt{3}$，得 $a=6$。

第 11 题

考点：第三部分“代数式”（第 54 页）、第一部分“三种数学语言”（第 12 页）

某校计划给每个年级配发 n 套劳动工具，则 3 个年级共需配发 _____ 套劳动工具。

答案： $3n$　　**思路：** 每个年级 n 套，3 个年级就是 3 个 n，用字母表示数量关系，写成 $3n$（数字写在字母前面，乘号省略）。

第 12 题

考点：第四部分“二元一次方程组”（第 91 页）

方程组

$$\begin{cases}3x+y=5,\\x+3y=7\end{cases}$$

的解为 _____。

答案：

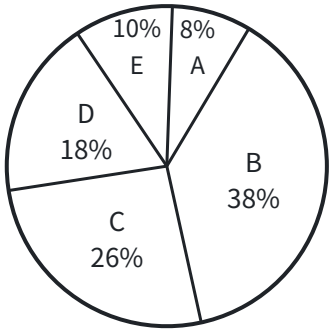
$$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$$

思路： 两个方程的系数正好“对调”，两式相加得 $4x+4y=12$，即 $x+y=3$；两式相减得 $2x-2y=-2$，即 $x-y=-1$。再解这个简单的方程组，得 $x=1$，$y=2$。用代入消元法也可以，先由第一个方程得 $y=5-3x$。

第 13 题

考点：第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）

某林木良种繁育试验基地为全面掌握“无絮杨”品种苗的生长规律，定期对培育的 1000 棵该品种苗进行抽测。如图是某次随机抽测该品种苗的高度 x（cm）的统计图，则此时该基地高度不低于 300 cm 的“无絮杨”品种苗约有 _____ 棵。



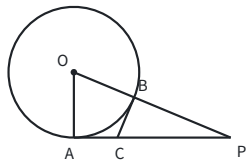
A. x < 200
B. 200 ⩽ x < 250
C. 250 ⩽ x < 300
D. 300 ⩽ x < 350
E. x ⩾ 350

答案： 280 **思路：** “不低于 300 cm”是 $x \geqslant 300$，对应 D、E 两组，在样本中占 $18\% + 10\% = 28\%$。用样本估计总体，1000 棵中约有 $1000 \times 28\% = 280$（棵）。

第 14 题

考点：第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

如图，PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，PO 交 $\odot O$ 于点 B，点 C 在 PA 上，且 $CB = CA$。若 $OA = 5$，$PA = 12$，则 CA 的长为 _____。



答案： $10/3$ **思路：** 切线垂直于过切点的半径，所以 $\angle OAP = 90°$，$OP = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = 13$，$PB = 13 - 5 = 8$。连接 OC，$OA = OB$，$CA = CB$，OC 公共，所以 $\triangle OAC \cong \triangle OBC$（SSS），$\angle OBC = \angle OAC = 90°$，即 $CB \perp OP$。设 $CA = CB = x$，在 Rt$\triangle PBC$ 中，$(12 - x)^2 = x^2 + 8^2$，解得 $x = 10/3$。

第 15 题

考点：第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

矩形 $ABCD$ 中，M 为对角线 BD 的中点，点 N 在边 AD 上，且 $AN = AB = 1$。当以点 D，M，N 为顶点的三角形是直角三角形时，AD 的长为 _____。

答案： 2 或 $\sqrt{2} + 1$ **思路：** 题目没说哪个角是直角，要分情况。$\angle MDN$ 是矩形对角线和边的夹角，不可能是直角，只剩两种：

- $\angle MND = 90°$：$MN \perp AD$，又 $AB \perp AD$，所以 $MN \parallel AB$。M 是 BD 的中点，N 就是 AD 的中点，$AD = 2AN = 2$。
- $\angle NMD = 90°$：连接 BN，MN 垂直平分 BD，所以 $ND = NB = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$，$AD = AN + ND = \sqrt{2} + 1$。

第 16 题

考点：第二部分“实数”（第 47 页）、第三部分“整式的乘法”（第 62 页）、第三部分“整式的加减”（第 59 页）

（1）计算：$|-3|-\sqrt{9}+5^{-1}$；

（2）化简：$(x-2y)^2-x(x-4y)$。

答案： （1）原式 $=3-3+1/5=1/5$。

（2）原式 $=x^2-4xy+4y^2-x^2+4xy=4y^2$。

思路： （1）三项各有自己的意义：-3 的绝对值是 3，$\sqrt{9}$ 是 9 的算术平方根 3，5^{-1} 按负整数指数幂的规定等于 $1/5$。（2）先用完全平方公式展开 $(x-2y)^2$，再用单项式乘多项式展开 $x(x-4y)$；减去一个整式时，括号前是减号，每一项都要变号。

第 17 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

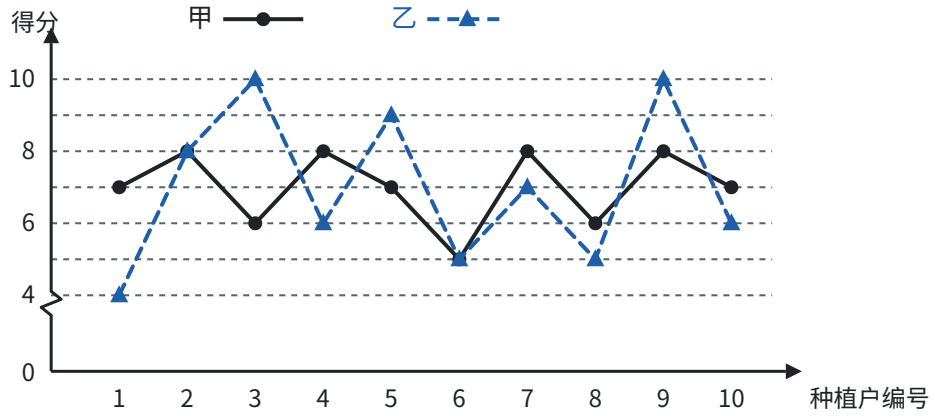
蓬勃发展的快递业，为全国各地的新鲜水果及时走进千家万户提供了极大便利。不同的快递公司在配送、服务、收费和投递范围等方面各具优势。樱桃种植户小丽经过初步了解，打算从甲、乙两家快递公司中选择一家合作，为此，小丽收集了 10 家樱桃种植户对两家公司的相关评价，并整理、描述、分析如下：

a. 配送速度得分（满分 10 分）：

甲：6　6　7　7　7　8　9　9　9　10

乙：6　7　7　8　8　8　8　9　9　10

b. 服务质量得分统计图（满分 10 分）：



c. 配送速度和服务质量得分统计表：

快递公司	配送速度得分：平均数	配送速度得分：中位数	服务质量得分：平均数	服务质量得分：方差
甲	7.8	m	7	$s_{甲}^2$
乙	8	8	7	$s_{乙}^2$

根据以上信息，回答下列问题：

（1）表格中的 $m=$ ____；$s_{甲}^2$ ____ $s_{乙}^2$（填“＞”“＝”或“＜”）。

（2）综合上表中的统计量，你认为小丽应选择哪家公司？请说明理由。

（3）为了从甲、乙两家公司中选出更合适的公司，你认为还应收集什么信息（列出一条即可）？

答案： （1）$m=7.5$；$s_{甲}^2<s_{乙}^2$。

甲的配送速度得分已经从小到大排好，第 5、6 个数是 7 和 8，所以 $m=(7+8)/2=7.5$。从统计图读出服务质量得分，甲：7，8，6，8，7，5，8，6，8，7；乙：4，8，10，6，9，5，7，5，10，6。

$$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\left[3\times(7-7)^2+4\times(8-7)^2+2\times(6-7)^2+(5-7)^2\right]=1,$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\left[(4-7)^2+(8-7)^2+2\times(10-7)^2+2\times(6-7)^2+(9-7)^2+2\times(5-7)^2+(7-7)^2\right]=4.2,$$

所以 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$。

（2）应选择甲公司。理由：配送速度得分甲和乙相差不大；服务质量得分甲和乙的平均数相同，但甲的方差明显小于乙的方差，甲的服务质量更稳定。（答案不唯一，言之有理即可。比如看重配送速度，也可以选乙公司：乙的配送速度得分的平均数和中位数都比甲高。）

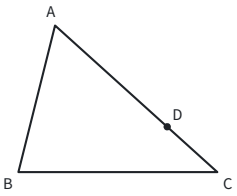
（3）还应收集甲、乙两家公司的收费情况（答案不唯一，言之有理即可）。

思路： 中位数先排序再找中间，10 个数取第 5、6 个的平均数。其实不必算方差：图上甲的折线在 5 到 8 之间小幅起伏，乙的折线在 4 到 10 之间大起大落，已经能看出甲更稳定，计算只是把这个印象变成数。第（2）问要“综合”：平均水平相近时，再比较稳定性（见第十部分“数据的分析”（第 294 页））。

第 18 题

考点：第五部分“尺规作图”（第 169 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

如图，$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AD=AB$。



（1）请用无刻度的直尺和圆规作出 $\angle A$ 的平分线（保留作图痕迹，不写作法）。

（2）若（1）中所作的角平分线与边 BC 交于点 E，连接 DE。求证：$DE=BE$。

答案： （1）以点 A 为圆心、适当长为半径画弧，交 AB、AC 于两点；再分别以这两点为圆心、大于两点间距离一半的长为半径画弧，两弧在 $\angle BAC$ 内部交于一点；过点 A 和这一点作射线，交 BC 于点 E，射线 AE 就是所求的角平分线。

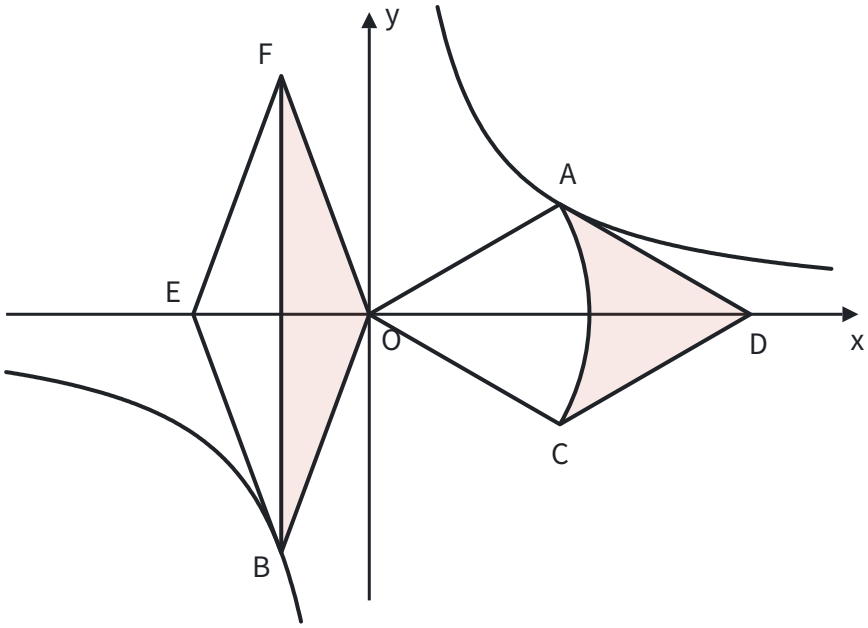
（2）证明：因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\angle DAE$。在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DAE$ 中，$AB=AD$，$\angle BAE=\angle DAE$，$AE=AE$，所以 $\triangle BAE\cong\triangle DAE$（SAS），所以 $DE=BE$。

思路： 作角平分线的依据是三边对应相等的两个三角形全等（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。要证 $DE=BE$，就找它们所在的两个三角形 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DAE$：已知 $AB=AD$，角平分线给出夹角相等，AE 是公共边，正好是“边角边”。换个角度看，$AD=AB$ 说明 D 是 B 关于角平分线 AE 的对称点，DE 和 BE 是一对对称线段。

第 19 题

考点：第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

小军借助反比例函数图象设计“鱼形”图案，如图，在平面直角坐标系中，以反比例函数 $y=k/x$ 图象上的点 $A(\sqrt{3},1)$ 和点 B 为顶点，分别作菱形 $AOCD$ 和菱形 $OBEF$，点 D，E 在 x 轴上，以点 O 为圆心，OA 长为半径作 AC，连接 BF。



（1）求 k 的值；

（2）求扇形 AOC 的半径及圆心角的度数；

（3）请直接写出图中阴影部分面积之和。

答案： （1）把 $A(\sqrt{3},1)$ 代入 $y=k/x$，得 $k=\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$。

（2）$OA=\sqrt{((\sqrt{3})^2+1^2)}=2$，所以扇形 AOC 的半径为 2。过点 A 作 $AH\perp x$ 轴于点 H，在 Rt$\triangle AOH$ 中，$\tan\angle AOH=1/(\sqrt{3})=\sqrt{3}/3$，所以 $\angle AOH=30°$。菱形的对角线平分一组对角，OD 是菱形 $AOCD$ 的对角线，所以 $\angle AOC=2\angle AOD=60°$。

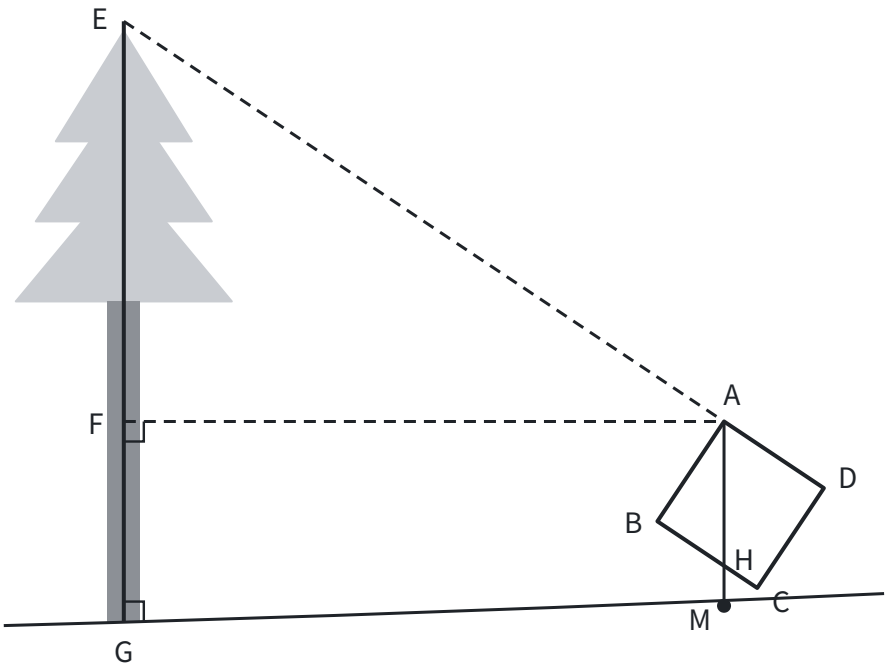
（3）$3\sqrt{3}-(2/3)\pi$。

思路： （1）点在图象上，坐标就满足解析式。（2）求角先想它的三角函数：A 的坐标给出两条直角边，$\tan\angle AOH=\sqrt{3}/3$。（3）右边的阴影是菱形 $AOCD$ 减去扇形 AOC：菱形的对角线 $OD=2\sqrt{3}$，$AC=2$，面积 $1/2\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$；扇形面积 $60/360\times\pi\times 2^2=(2/3)\pi$。左边的阴影是 $\triangle OBF$：设 $B(a,b)$，$ab=\sqrt{3}$，菱形 $OBEF$ 关于 x 轴对称，$F(a,-b)$，$BF=2|b|$，BF 上的高是 $|a|$，面积 $1/2\times 2|b|\times|a|=|ab|=\sqrt{3}$，和 B 在哪里无关。这正是 k 的几何意义（见第七部分“反比例函数”（第 212 页））。

第 20 题

考点：第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第八部分“相似”（第 230 页）

综合实践活动中，某小组用木板自制了一个测高仪测量树高，测高仪 $ABCD$ 为正方形，$AB=30$ cm，顶点 A 处挂了一个铅锤 M。如图是测量树高的示意图，测高仪上的点 D，A 与树顶 E 在一条直线上，铅垂线 AM 交 BC 于点 H。经测量，点 A 距地面 1.8 m，到树 EG 的距离 $AF=11$ m，$BH=20$ cm。求树 EG 的高度（结果精确到 0.1 m）。



答案： 由题意，$\angle DAB=90°$，点 E，A，D 在一条直线上，所以 $\angle EAB=90°$，$\angle EAF=90°-\angle FAB$。$AF$ 水平，AH 竖直，所以 $\angle FAH=90°$，$\angle BAH=90°-\angle FAB$。所以 $\angle EAF=\angle BAH$。

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\tan\angle BAH=BH/(AB)=20/30=2/3$。

在 Rt$\triangle EFA$ 中，$EF=AF\cdot\tan\angle EAF=11\times 2/3=22/3\approx 7.33$（m）。

又 $FG=1.8$ m，所以 $EG=EF+FG\approx 7.33+1.8\approx 9.1$（m）。

答：树 EG 的高度约为 9.1 m。

思路： 树高 EG 量不到，要从量得到的 AF 推过去，关键是 $\angle EAF$。这个角在测高仪上“复制”了一份：视线 AE 和边 AB 垂直，水平线 AF 和铅垂线 AH 垂直，两个角都等于 90° 减去 $\angle FAB$。于是小正方形里的 $\triangle ABH$ 和大的 $\triangle EFA$ 两个角相等，是一对相似的直角三角形，tan 值相同（见第八部分“锐角三角函数”（第 240 页））。注意单位：BH 和 AB 都是 cm，比值不用换算。

第 21 题

考点：第四部分“一元一次方程”（第 87 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第十一部分“方程思想与建模”（第 327 页）

某健身器材专卖店推出两种优惠活动，并规定购物时只能选择其中一种。

活动一：所购商品按原价打八折；

活动二：所购商品按原价**每满** 300 元减 80 元。（如：所购商品原价为 300 元，可减 80 元，需付款 220 元；所购商品原价为 770 元，可减 160 元，需付款 610 元）

（1）购买一件原价为 450 元的健身器材时，选择哪种活动更合算？请说明理由。

（2）购买一件原价在 500 元以下的健身器材时，若选择活动一和选择活动二的付款金额相等，求一件这种健身器材的原价。

（3）购买一件原价在 900 元以下的健身器材时，原价在什么范围内，选择活动二比选择活动一更合算？设一件这种健身器材的原价为 a 元，请直接写出 a 的取值范围。

答案： （1）活动一更合算。理由：选活动一需付款 $450\times0.8=360$（元），选活动二需付款 $450-80=370$（元），$360<370$。

（2）设这种健身器材的原价为 x 元。原价不足 300 元时活动二不减钱，两种活动付款不可能相等，所以 $300\leqslant x<500$，此时活动二减 80 元。由题意得 $0.8x=x-80$，解得 $x=400$。

答：一件这种健身器材的原价为 400 元。

（3）$300\leqslant a<400$ 或 $600\leqslant a<800$。

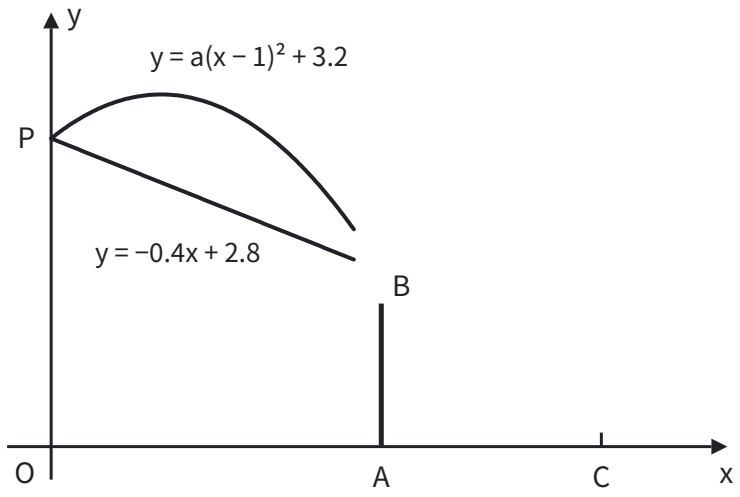
思路： 活动二“每满 300 元减 80 元”，减多少取决于原价里有几个 300，所以要按原价分段：不足 300 元不减，300 元到 600 元减 80 元，600 元到 900 元减 160 元。每一段里两种付款都是一次式，相等就列方程，“更合算”就列不等式：$300\leqslant a<600$ 时解 $a-80<0.8a$，得 $a<400$；$600\leqslant a<900$ 时解 $a-160<0.8a$，得 $a<800$。

第 22 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）

小林同学不仅是一名羽毛球运动爱好者，还喜欢运用数学知识对羽毛球比赛进行技术分析，下面是他对击球线路的分析。

如图，在平面直角坐标系中，点 A，C 在 x 轴上，球网 AB 与 y 轴的水平距离 $OA=3$ m，$CA=2$ m，击球点 P 在 y 轴上。若选择扣球，羽毛球的飞行高度 y（m）与水平距离 x（m）近似满足一次函数关系 $y=-0.4x+2.8$；若选择吊球，羽毛球的飞行高度 y（m）与水平距离 x（m）近似满足二次函数关系 $y=a(x-1)^2+3.2$。



（1）求点 P 的坐标和 a 的值。

（2）小林分析发现，上面两种击球方式均能使球过网。要使球的落地点到 C 点的距离更近，请通过计算判断应选择哪种击球方式。

答案： （1）在 $y=-0.4x+2.8$ 中，令 $x=0$，得 $y=2.8$，所以点 P 的坐标为 $(0,2.8)$。把 $P(0,2.8)$ 代入 $y=a(x-1)^2+3.2$，得 $a+3.2=2.8$，所以 $a=-0.4$。

（2）$OC=OA+CA=5$ m。

扣球：令 $-0.4x+2.8=0$，得 $x=7$，落地点到 C 点的距离为 $7-5=2$（m）。

吊球：令 $-0.4(x-1)^2+3.2=0$，得 $(x-1)^2=8$，$x_1=1+2\sqrt{2}$，$x_2=1-2\sqrt{2}$（不合题意，舍去）。落地点到 C

点的距离为 $5-(1+2\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}\approx 1.17$（m）。

因为 $1.17<2$，所以选择吊球，球的落地点到 C 点的距离更近。

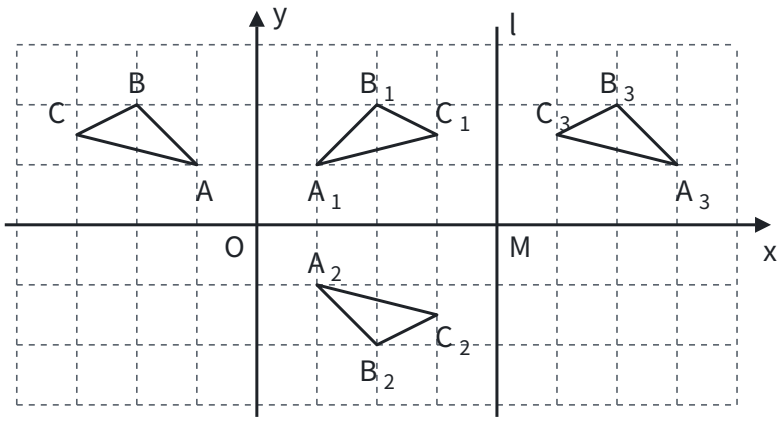
思路： 两种线路都从击球点 P 出发，P 在 y 轴上，横坐标为 0，先从一次函数求出 P，再代入二次函数求 a。“落地点”就是飞行高度为 0 的点，即图象与 x 轴交点的横坐标，令 $y=0$ 解方程；吊球的方程有两个根，要按实际意义舍去负根（见第七部分“二次函数”（第 218 页））。

第 23 题

考点：第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“四边形”（第 157 页）、第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

李老师善于通过合适的主题整合教学内容，帮助同学们用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯。下面是李老师在“图形的变化”主题下设计的问题，请你解答。

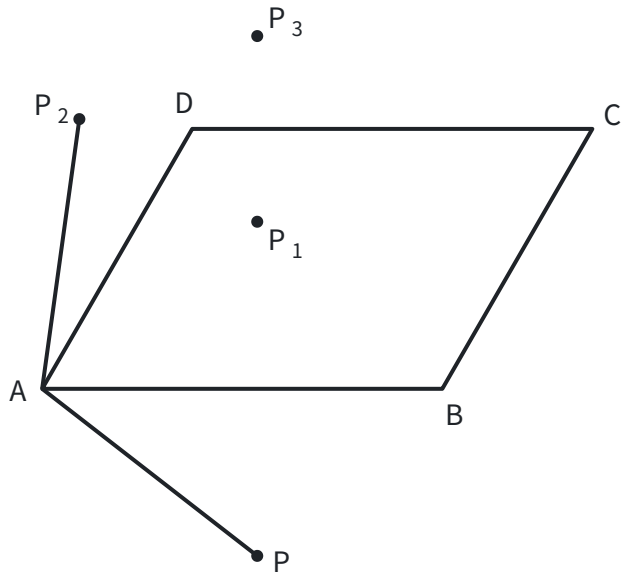
（1）观察发现：如图 1，在平面直角坐标系中，过点 $M(4,0)$ 的直线 $l\parallel y$ 轴，作 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$，再分别作 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 x 轴和直线 l 对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$，则 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 绕点 O 顺时针旋转得到的，旋转角的度数为 ____；$\triangle A_3B_3C_3$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 向右平移得到的，平移距离为 ____ 个单位长度。



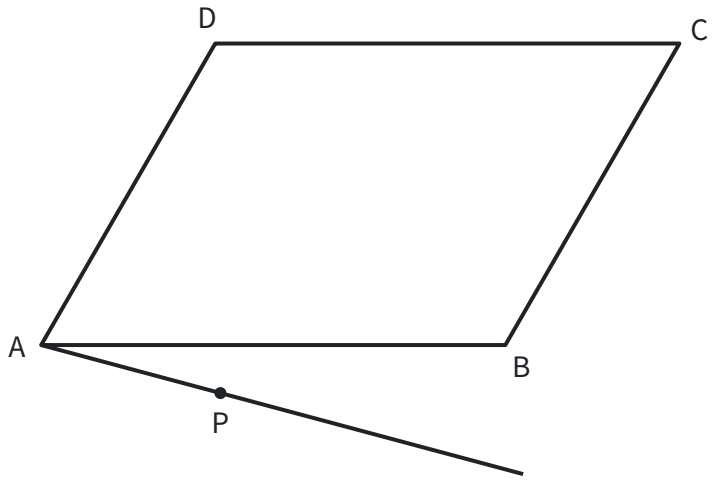
（2）探究迁移：如图 2，$\square ABCD$ 中，$\angle BAD=\alpha$（$0°<\alpha<90°$），P 为直线 AB 下方一点，作点 P 关于直线 AB 的对称点 P_1，再分别作点 P_1 关于直线 AD 和直线 CD 的对称点 P_2 和 P_3，连接 AP，AP_2，请仅就图 2 的情形解决以下问题：

① 若 $\angle PAP_2=\beta$，请判断 β 与 α 的数量关系，并说明理由；

② 若 $AD=m$，求 P，P_3 两点间的距离。



（3）拓展应用：在（2）的条件下，若 $\alpha = 60°$，$AD = 2\sqrt{3}$，$\angle PAB = 15°$，连接 P_2P_3。当 P_2P_3 与 $\square ABCD$ 的边平行时，请直接写出 AP 的长。



答案： （1）180°；8。

（2）① $\beta = 2\alpha$。理由：由轴对称的性质，$\angle PAB = \angle P_1AB$，$\angle P_1AD = \angle P_2AD$。所以

$$\beta = \angle PAB + \angle BAP_1 + \angle P_1AD + \angle DAP_2 = 2(\angle BAP_1 + \angle P_1AD) = 2\angle BAD = 2\alpha.$$

② 设 PP_1 交 AB 于点 E，P_1P_3 交 CD 于点 F。由轴对称的性质，$PP_1 \perp AB$，$PE = EP_1$；$P_1P_3 \perp CD$，$P_1F = FP_3$。因为 $AB \parallel CD$，所以点 P，E，P_1，F，P_3 在同一条直线上，且 EF 是 AB 与 CD 之间的距离，$EF = AD\sin\alpha = m\sin\alpha$。所以

$$PP_3 = 2EP_1 + 2P_1F = 2EF = 2m\sin\alpha.$$

（3）$2\sqrt{6}$ 或 $3\sqrt{2} - \sqrt{6}$。

推理过程：设 $AP = x$，则 $AP_1 = AP_2 = x$。由（2），$PP_3 = 2 \times 2\sqrt{3} \times \sin 60° = 6$。$\angle PAP_1 = 30°$，$\triangle APP_1$ 是等腰三角形，$\angle AP_1P = 75°$，$PP_1 = 2x\sin 15° = ((\sqrt{6} - \sqrt{2})/2)x$。$\angle P_1AP_2 = 2\angle P_1AD = 2 \times 45° = 90°$，所以 $P_1P_2 = (\sqrt{2})x$，$\angle AP_1P_2 = 45°$，于是 $\angle P_2P_1P_3 = 180° - 75° - 45° = 60°$。

- $P_2P_3 \parallel AB$（也就平行于 CD）时，$P_2P_3 \perp PP_3$，$P_1P_3 = P_1P_2\cos 60° = (\sqrt{2}/2)x$。由 $PP_1 + P_1P_3 = (\sqrt{6}/2)x = 6$，得 $x = 2\sqrt{6}$。

- $P_2P_3 /\!/ AD$（也就平行于 BC）时，P_2P_3 与 PP_3 的夹角 $\angle P_1P_3P_2 = 90° - 60° = 30°$，所以 $\angle P_1P_2P_3 = 90°$，$P_1P_3 = 2P_1P_2 = 2(\sqrt{2})x$。由 $PP_1 + P_1P_3 = ((\sqrt{6} + 3\sqrt{2})/2)x = 6$，得 $x = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$。

思路： 第（1）问是整道题的线索：沿两条**相交**直线先后翻折，合起来是绕交点的旋转，转过的角是两直线夹角的 2 倍（y 轴和 x 轴夹角 90°，转 180°）；沿两条**平行**直线先后翻折，合起来是平移，平移距离是两直线间距离的 2 倍（y 轴和 l 相距 4，平移 8）。第（2）问把这两个结论放到平行四边形里：AB、AD 相交于 A，所以 $\beta = 2\alpha$；$AB /\!/ CD$，所以 PP_3 是两条平行线距离的 2 倍（见第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页））。第（3）问 $PP_3 = 6$ 已知，把 PP_3 拆成 PP_1 和 P_1P_3 两段，都用 x 表示；平行于哪一组边要分两种情况，每种情况在 $\triangle P_1P_2P_3$ 里得到一个特殊角的直角三角形。

2022 年河南中考数学

> 河南省 2022 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

考点：第二部分“有理数”（第 36 页）

$-1/2$ 的相反数是

A. $1/2$　　B. 2　　C. -2　　D. $-1/2$

答案： A　　**思路：** 相反数是在数轴上到原点距离相等、位于原点两侧的数，只改符号，不改绝对值。$-1/2$ 改变符号得 $1/2$。注意别和倒数（-2）混淆。

第 2 题

考点：第五部分“几何图形初步”（第 113 页）

2022 年北京冬奥会的奖牌“同心”表达了“天地合・人心同”的中华文化内涵。将这六个汉字分别写在某正方体的表面上，如图是它的一种展开图，则在原正方体中，与“地”字所在面相对的面上的汉字是



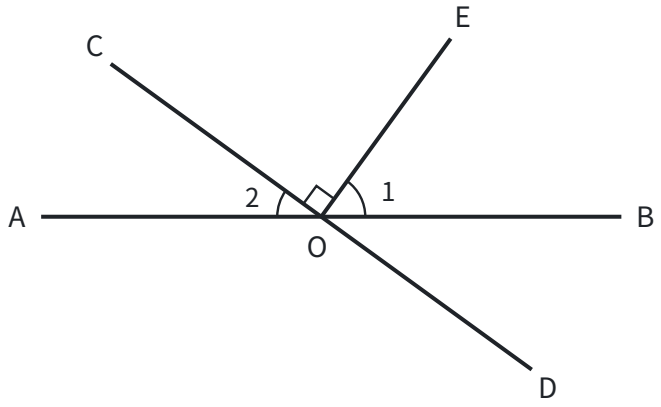
A. 合　　B. 同　　C. 心　　D. 人

答案： D　　**思路：** 展开图里排成一行的三个正方形，中间一个两边折起 90°，两端的正方形正好面对面，所以一行中隔着一个的两个面相对。“地、合、人”排成一行，“地”和“人”隔着“合”，是相对的面。见第五部分“几何图形初步”（第 113 页）。

第 3 题

考点：第五部分“相交线与平行线”（第 120 页）

如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO \perp CD$，垂足为 O。若 $\angle 1 = 54°$，则 $\angle 2$ 的度数为



A. 26° B. 36° C. 44° D. 54°

答案： B **思路：** $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 不相邻，要找一个“中转”的角。$EO \perp CD$，所以 $\angle EOD = 90°$，$\angle BOD = 90° - 54° = 36°$；$\angle 2$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角，所以 $\angle 2 = 36°$。

第 4 题

考点：第三部分“整式的乘法”（第 62 页）、第三部分“二次根式”（第 79 页）

下列运算正确的是

A. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ B. $(a+1)^2 = a^2 + 1$

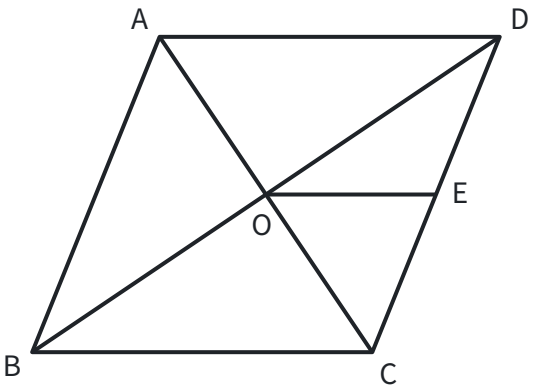
C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $2a^2 \cdot a = 2a^3$

答案： D **思路：** 逐个回到定义检查。A：$2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$，合并同类二次根式只合并系数；B：$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$，漏了中间项；C：幂的乘方指数相乘，$(a^2)^3 = a^6$；D：单项式相乘，系数相乘、同底数幂指数相加，正确。

第 5 题

考点：第五部分“四边形”（第 157 页）

如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 为 CD 的中点。若 $OE = 3$，则菱形 $ABCD$ 的周长为



A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

答案： C **思路：** 看到两个中点就想中位线：菱形的对角线互相平分，O 是 BD 的中点，E 是 CD 的中点，所以 OE 是 $\triangle BCD$ 的中位线，$BC = 2OE = 6$。菱形四边相等，周长为 $4 \times 6 = 24$。

第 6 题

考点：第四部分“一元二次方程”（第 104 页）

一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的根的情况是

A. 有两个不相等的实数根　　B. 没有实数根

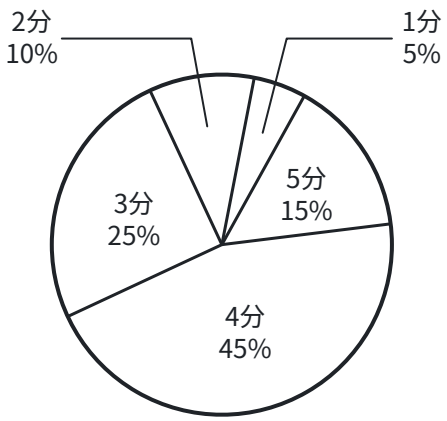
C. 有两个相等的实数根　　D. 只有一个实数根

答案： A　　**思路：** 根的情况由判别式决定。$a=1$，$b=1$，$c=-1$，$\Delta=b^2-4ac=1+4=5>0$，所以有两个不相等的实数根。

第 7 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）、第十部分“数据的收集、整理与描述”（第 288 页）

如图所示的扇形统计图描述了某校学生对课后延时服务的打分情况（满分 5 分），则所打分数的众数为



A. 5 分　　B. 4 分　　C. 3 分　　D. 45%

答案： B　　**思路：** 众数是出现次数最多的那个数据。扇形统计图里占比最大的是“4 分”（45%），所以打 4 分的人最多，众数是 4 分。众数是数据本身，不是它所占的百分比，所以不选 D。

第 8 题

考点：第三部分“整式的乘法”（第 62 页）、第二部分“有理数的运算”（第 41 页）

《孙子算经》中记载：“凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆。”说明了大数之间的关系：1 亿 = 1 万 × 1 万，1 兆 = 1 万 × 1 万 × 1 亿。则 1 兆等于

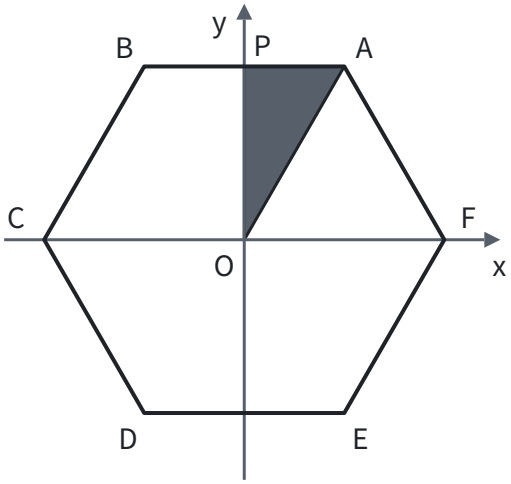
A. 10^8　　B. 10^{12}　　C. 10^{16}　　D. 10^{24}

答案： C　　**思路：** 先把每个单位写成 10 的幂：1 万 $=10^4$，1 亿 $=10^4\times10^4=10^8$。再用同底数幂相乘、指数相加：1 兆 $=10^4\times10^4\times10^8=10^{16}$。

第 9 题

考点：第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第六部分“平面直角坐标系”（第 180 页）、第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第十一部分“以数解形”（第 318 页）

如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 的中心与原点 O 重合，$AB\parallel x$ 轴，交 y 轴于点 P。将 $\triangle OAP$ 绕点 O 顺时针旋转，每次旋转 90°，则第 2022 次旋转结束时，点 A 的坐标为



A. $(\sqrt{3}, -1)$　　B. $(-1, -\sqrt{3})$　　C. $(-\sqrt{3}, -1)$　　D. $(1, \sqrt{3})$

答案： B　　**思路：** 先求点 A 的坐标：正六边形的边长等于半径，$OA = 2$；P 是 AB 的中点，$AP = 1$，$OP = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$，所以 $A(1, \sqrt{3})$。再看旋转的周期：每 4 次转满 360° 回到原处，$2022 = 4 \times 505 + 2$，相当于只转 2 次，即绕 O 旋转 180°。绕原点旋转 180°，横、纵坐标都变成相反数，得 $(-1, -\sqrt{3})$。

第 10 题

考点：第七部分“函数”（第 201 页）

呼气式酒精测试仪中装有酒精气体传感器，可用于检测驾驶员是否酒后驾车。酒精气体传感器是一种气敏电阻（图 1 中的 R_1），R_1 的阻值随呼气酒精浓度 K 的变化而变化（如图 2），血液酒精浓度 M 与呼气酒精浓度 K 的关系见图 3。下列说法**不正确**的是

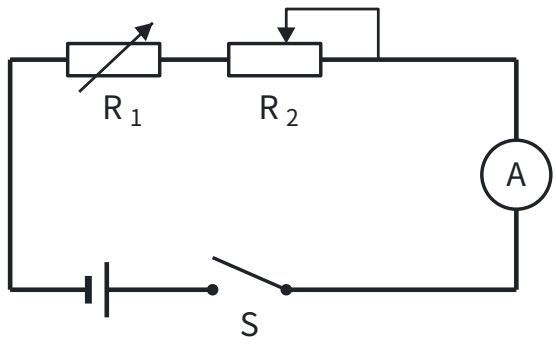


图 1

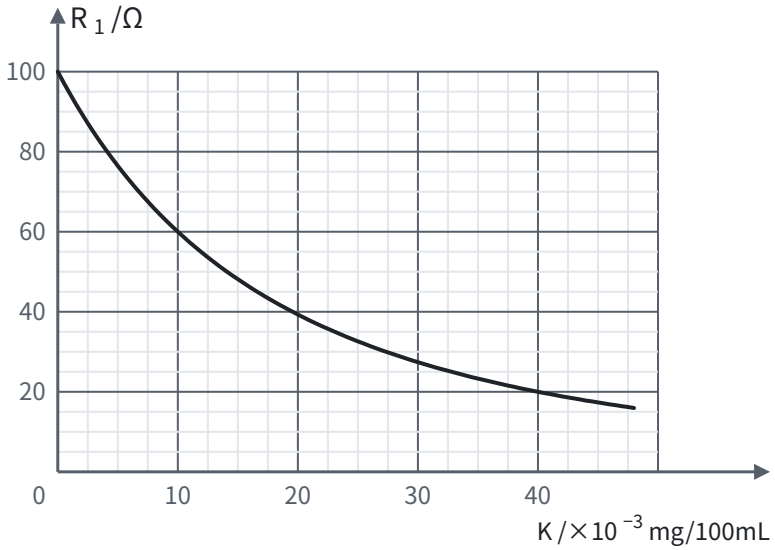


图 2

信息窗

M = 2200 × K × 10 $^{-3}$ mg/100mL

（M 为血液酒精浓度，K 为呼气酒精浓度）

非酒驾（M < 20 mg/100mL）

酒驾（20 mg/100mL ⩽ M ⩽ 80 mg/100mL）

醉驾（M > 80 mg/100mL）

图 3

A. 呼气酒精浓度 K 越大，R_1 的阻值越小　　B. 当 $K=0$ 时，R_1 的阻值为 100

C. 当 $K=10$ 时，该驾驶员为非酒驾状态　　D. 当 $R_1=20$ 时，该驾驶员为醉驾状态

答案： C　　**思路：** 这是读图题：从图 2 的图象上读出 K 与 R_1 的对应值，再代入图 3 的关系式算出 M。A、B 直接从图象看出：图象从左往右下降，$K=0$ 时 $R_1=100$。C：$K=10$ 时，$M=2200\times10\times10^{-3}=22$，在 20 和 80 之间，是酒驾，所以 C 不正确。D：$R_1=20$ 时，从图象读出 $K=40$，$M=2200\times40\times10^{-3}=88>80$，是醉驾，正确。

第 11 题

考点：第七部分“一次函数”（第 206 页）

请写出一个 y 随 x 的增大而增大的一次函数的表达式：____。

答案： $y=x$（答案不唯一）　　**思路：** 一次函数 $y=kx+b$ 中，x 每增加 1，y 变化 k。要 y 随 x 增大而增大，只要 $k>0$，b 取什么都可以，比如 $y=x$、$y=2x+1$。

第 12 题

考点：第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）、第十一部分“以形助数”（第 311 页）

不等式组

$$\begin{cases}x-3\leq0,\\ \frac{x}{2}>1\end{cases}$$

的解集为____。

答案： $2<x\leqslant 3$ **思路：** 分别解两个不等式，再取公共部分。由 $x-3\leqslant 0$ 得 $x\leqslant 3$；由 $x/2>1$ 得 $x>2$。在数轴上两部分重叠的是 $2<x\leqslant 3$。

第 13 题

考点：第十部分“概率”（第 302 页）

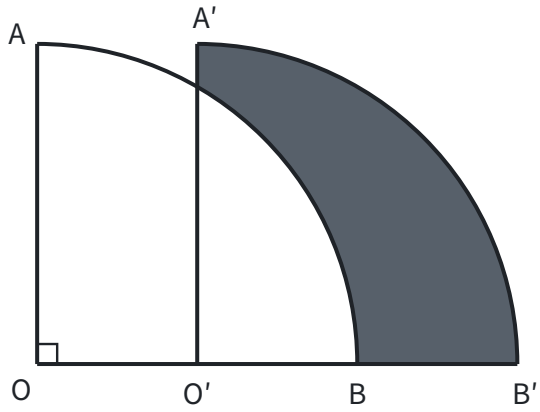
为开展“喜迎二十大、永远跟党走、奋进新征程”主题教育宣讲活动，某单位从甲、乙、丙、丁四名宣讲员中随机选取两名进行宣讲，则恰好选中甲和丙的概率为____。

答案： $1/6$ **思路：** 先把所有等可能的结果不重不漏地列出来。从四人中选两人，共有甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁 6 种结果，每种可能性相同，恰好选中甲和丙的只有 1 种，所以概率为 $1/6$。用列表法列出 12 种有序结果、其中 2 种符合，结果相同。

第 14 题

考点：第九部分“与圆有关的计算”（第 277 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

如图，将扇形 AOB 沿 OB 方向平移，使点 O 移到 OB 的中点 O' 处，得到扇形 $A'O'B'$。若 $\angle O=90°$，$OA=2$，则阴影部分的面积为____。



答案： $\pi/3+\sqrt{3}/2$ **思路：** 阴影是不规则图形，用“整体减空白”：阴影 = 扇形 $A'O'B'$ − 两扇形重叠的部分（$O'A'$ 右侧、弧 AB 下方的部分）。设 $O'A'$ 与弧 AB 交于点 G，连接 OG。在 Rt$\triangle OO'G$ 中，$OO'=1$，$OG=2$，所以 $\angle GOO'=60°$，$O'G=\sqrt{3}$。重叠部分 = 扇形 GOB − $\triangle OO'G$：

$$\frac{60\pi\times 2^2}{360}-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

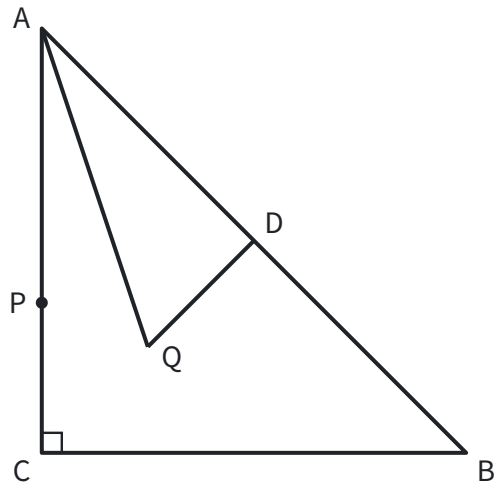
扇形 $A'O'B'$ 的面积是 $(1/4)\pi\times 2^2=\pi$，所以阴影面积为

$$\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第 15 题

考点：第十一部分“分类讨论”（第 332 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第一部分“基本事实”（第 22 页）

如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，点 D 为 AB 的中点，点 P 在 AC 上，且 $CP=1$，将 CP 绕点 C 在平面内旋转，点 P 的对应点为点 Q，连接 AQ，DQ。当 $\angle ADQ=90°$ 时，AQ 的长为____。



答案： $\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13}$ **思路：** 先弄清点 Q 在哪里：$CQ=CP=1$，Q 在以 C 为圆心、1 为半径的圆上。$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，D 是斜边中点，所以 $CD\perp AB$，$CD=AD=(1/2)AB=2$。$\angle ADQ=90°$ 说明 $DQ\perp AB$，过点 D 垂直于 AB 的直线只有一条，就是直线 CD，所以 Q 在直线 CD 上。直线 CD 和圆有两个交点，要分两种情况：

- Q 在线段 CD 上：$DQ=2-1=1$，$AQ=\sqrt{(AD^2+DQ^2)}=\sqrt{(4+1)}=\sqrt{5}$；
- Q 在 DC 的延长线上：$DQ=2+1=3$，$AQ=\sqrt{(4+9)}=\sqrt{13}$。

第 16 题

考点：第二部分“实数”（第 47 页）、第三部分“分式”（第 74 页）、第三部分“因式分解”（第 69 页）

（1）（5 分）计算：$\sqrt[3]{27}-(1/3)^0+2^{-1}$；

（2）（5 分）化简：

$$\frac{x^2-1}{x}\div\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

答案： （1）原式 $=3-1+1/2=5/2$。

（2）

$$\text{原式}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=x+1.$$

思路： （1）三项各用一个规定：$3^3=27$，所以 $\sqrt[3]{27}=3$；任何不为 0 的数的 0 次幂是 1；$2^{-1}=1/2$。（2）先把括号里通分成 $(x-1)/x$，除法变成乘倒数；分子 x^2-1 因式分解成 $(x+1)(x-1)$，才能和分母约分。

第 17 题

考点：第十部分“数据的分析”（第 294 页）

（9 分）2022 年 3 月 23 日下午，“天宫课堂”第二课在中国空间站开讲，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富相互配合进行授课，这是中国空间站的第二次太空授课，被许多中小学生称为“最牛网课”。某中学为了解学生对“航空航天知识”的掌握情况，随机抽取 50 名学生进行测试，并对成绩（百分制）进行整理，信息如下：

a. 成绩频数分布表：

成绩 x（分）	$50 \leqslant x < 60$	$60 \leqslant x < 70$	$70 \leqslant x < 80$	$80 \leqslant x < 90$	$90 \leqslant x \leqslant 100$
频数	7	9	12	16	6

b. 成绩在 $70 \leqslant x < 80$ 这一组的是（单位：分）：

70　71　72　72　74　77　78　78　78　79　79　79

根据以上信息，回答下列问题：

（1）在这次测试中，成绩的中位数是____分，成绩不低于 80 分的人数占测试人数的百分比为____。

（2）这次测试成绩的平均数是 76.4 分，甲的测试成绩是 77 分。乙说：“甲的成绩高于平均数，所以甲的成绩高于一半学生的成绩。”你认为乙的说法正确吗？请说明理由。

（3）请对该校学生“航空航天知识”的掌握情况作出合理的评价。

答案： （1）78.5，44%。

（2）不正确。因为甲的成绩 77 分低于中位数 78.5 分，所以甲的成绩不可能高于一半学生的成绩。

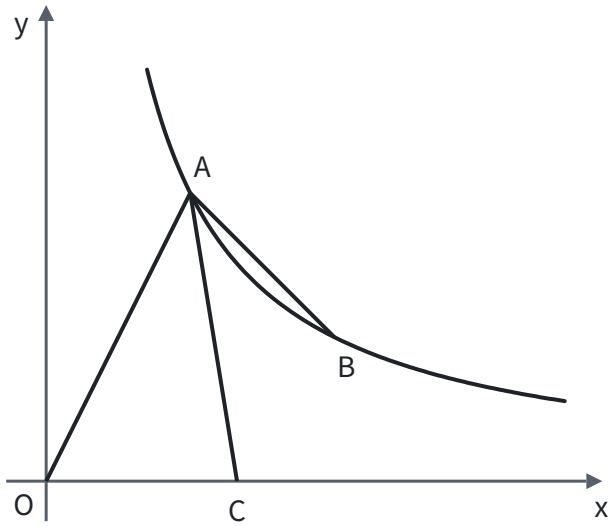
（3）测试成绩不低于 80 分的人数占测试人数的 44%，说明该校学生对“航空航天知识”的掌握情况较好。（答案不唯一，合理即可）

思路： （1）50 个数据的中位数是从小到大第 25、26 个数的平均数。前两组共 $7+9=16$ 人，所以第 25、26 个数是第三组的第 9、10 个，即 78 和 79，中位数是 78.5。不低于 80 分的有 $16+6=22$ 人，$22 \div 50 = 44\%$。（2）“高于一半学生”要和中位数比，不是和平均数比：平均数会被少数很低的分数拉低，中位数才把数据分成人数相等的两半。

第 18 题

考点：第七部分“反比例函数”（第 212 页）、第五部分“尺规作图”（第 169 页）、第五部分“轴对称与等腰三角形”（第 140 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

（9 分）如图，反比例函数 $y = k/x$（$x > 0$）的图象经过点 $A(2, 4)$ 和点 B，点 B 在点 A 的下方，AC 平分 $\angle OAB$，交 x 轴于点 C。



（1）求反比例函数的表达式。

（2）请用无刻度的直尺和圆规作出线段 AC 的垂直平分线。（要求：不写作法，保留作图痕迹，使用 2B 铅笔

作图）

（3）线段 OA 与（2）中所作的垂直平分线相交于点 D，连接 CD。求证：$CD \parallel AB$。

答案： （1）因为反比例函数 $y = k/x$ 的图象经过点 $A(2, 4)$，所以 $k = 2 \times 4 = 8$，反比例函数的表达式为 $y = 8/x$。

（2）分别以 A、C 为圆心，以大于 $(1/2)AC$ 的长为半径画弧，两弧在 AC 两侧各交于一点，过这两点画直线，就是 AC 的垂直平分线。

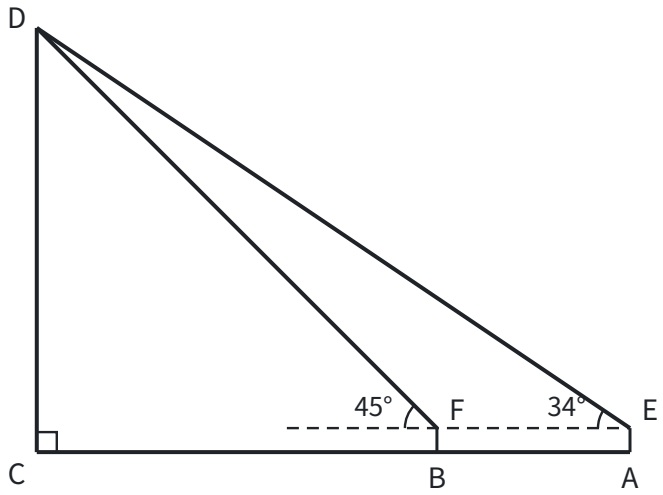
（3）因为 AC 平分 $\angle OAB$，所以 $\angle OAC = \angle BAC$。因为 AC 的垂直平分线交 OA 于点 D，所以 $DA = DC$，$\angle DAC = \angle DCA$。所以 $\angle DCA = \angle BAC$，所以 $CD \parallel AB$（内错角相等，两直线平行）。

思路： （2）到 A、C 距离相等的点都在 AC 的垂直平分线上，所以作两个这样的点，两点确定一条直线（见第五部分“尺规作图”（第 169 页））。（3）要证平行，就找一对内错角相等：角平分线给出 $\angle DAC = \angle BAC$，垂直平分线给出 $DA = DC$，从而 $\angle DAC = \angle DCA$，两个等量关系一接，$\angle DCA = \angle BAC$。角平分线、平行线、等腰三角形常常一起出现，知道其中两个就能推出第三个。

第 19 题

考点：第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

（9 分）开封清明上河园是依照北宋著名画家张择端的《清明上河图》建造的，拂云阁是园内最高的建筑。某数学小组测量拂云阁 DC 的高度，如图，在 A 处用测角仪测得拂云阁顶端 D 的仰角为 34°，沿 AC 方向前进 15 m 到达 B 处，又测得拂云阁顶端 D 的仰角为 45°。已知测角仪的高度为 1.5 m，测量点 A，B 与拂云阁 DC 的底部 C 在同一水平线上，求拂云阁 DC 的高度（结果精确到 1 m。参考数据：$\sin 34° \approx 0.56$，$\cos 34° \approx 0.83$，$\tan 34° \approx 0.67$）。



答案： 延长 EF 交 DC 于点 H，则 $EH \perp DC$，$HC = 1.5$ m。设 $DH = x$ m。

在 Rt$\triangle DHF$ 中，$\angle DFH = 45°$，所以 $FH = DH = x$。

在 Rt$\triangle DHE$ 中，$\angle DEH = 34°$，所以 $EH = DH/(\tan 34°) = x/(\tan 34°)$。

因为 $EF = 15$，所以 $EH - FH = 15$，即

$$\frac{x}{\tan 34^\circ} - x = 15.$$

解得 $x \approx 30.5$。所以 $DC \approx 30.5 + 1.5 = 32$。

答：拂云阁 DC 的高度约为 32 m。

思路： 两个仰角各在一个直角三角形里，要把它们放到同一条水平线上：延长 EF 交 DC 于 H，得到两个共用直角边 DH 的直角三角形。设公共边 $DH=x$，用 x 分别表示 FH 和 EH，它们的差就是已知的 15 m，列方程求 x。最后别忘了加上测角仪的高度 1.5 m。

第 20 题

考点：第四部分“分式方程”（第 100 页）、第七部分“一次函数”（第 206 页）、第四部分“不等式与不等式组”（第 95 页）

（9 分）近日，教育部印发《义务教育课程方案》和课程标准（2022 年版），将劳动从原来的综合实践活动课程中独立出来。某中学为了让学生体验农耕劳动，开辟了一处耕种园，需要采购一批菜苗开展种植活动。据了解，市场上每捆 A 种菜苗的价格是菜苗基地的 5/4 倍，用 300 元在市场上购买的 A 种菜苗比在菜苗基地购买的少 3 捆。

（1）求菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格。

（2）菜苗基地每捆 B 种菜苗的价格是 30 元。学校决定在菜苗基地购买 A，B 两种菜苗共 100 捆，且 A 种菜苗的捆数不超过 B 种菜苗的捆数。菜苗基地为支持该校活动，对 A，B 两种菜苗均提供九折优惠。求本次购买最少花费多少钱。

答案： （1）设菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 x 元，根据题意，得

$$\frac{300}{x}-\frac{300}{\frac{5}{4}x}=3.$$

解得 $x=20$。经检验，$x=20$ 是原方程的解。

答：菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 20 元。

（2）设购买 A 种菜苗 a 捆，则购买 B 种菜苗 $(100-a)$ 捆。根据题意，得 $a\leqslant 100-a$，解得 $a\leqslant 50$。

设本次购买花费 w 元，则

$$w=20a\times 0.9+30(100-a)\times 0.9=-9a+2700.$$

因为 $-9<0$，w 随 a 的增大而减小，所以当 $a=50$ 时，w 有最小值 $-450+2700=2250$。

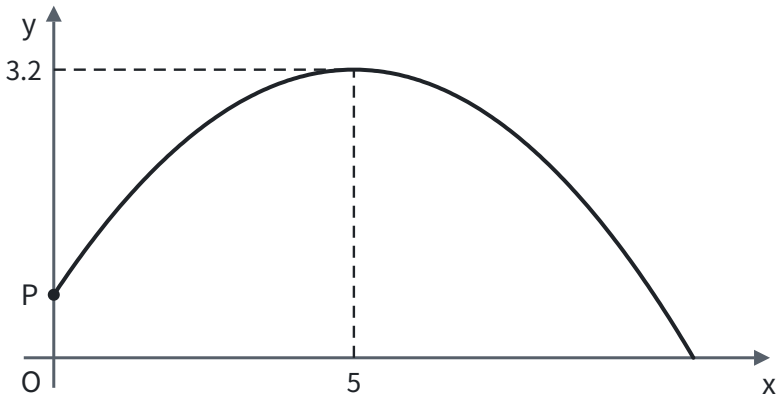
答：本次购买最少花费 2250 元。

思路： （1）等量关系是“捆数差 3”，捆数 = 总价 ÷ 单价，单价是未知数，所以列出的是分式方程，解完要检验。（2）花费随 A 种菜苗的捆数一次变化，写成一次函数 $w=-9a+2700$；A 种便宜，买得越多越省，但受“不超过 B 种”限制，a 最大取 50。求最值的问题，先写出函数，再由不等式定出自变量的范围，在范围的端点取最值。

第 21 题

考点：第七部分“二次函数”（第 218 页）、第一部分“三种数学语言”（第 12 页）

（9 分）小红看到一处喷水景观，喷出的水柱呈抛物线形状，她对此展开研究：测得喷水头 P 距地面 0.7 m，水柱在距喷水头 P 水平距离 5 m 处达到最高，最高点距地面 3.2 m；建立如图所示的平面直角坐标系，并设抛物线的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$，其中 x（m）是水柱距喷水头的水平距离，y（m）是水柱距地面的高度。



（1）求抛物线的表达式。

（2）爸爸站在水柱正下方，且距喷水头 P 水平距离 3 m。身高 1.6 m 的小红在水柱下方走动，当她的头顶恰好接触到水柱时，求她与爸爸的水平距离。

答案： （1）由题意知，点 $(5, 3.2)$ 是抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点，所以 $y = a(x-5)^2 + 3.2$。又因为抛物线经过点 $(0, 0.7)$，所以 $0.7 = a(0-5)^2 + 3.2$，解得 $a = -0.1$。所以抛物线的表达式为 $y = -0.1(x-5)^2 + 3.2$（或 $y = -0.1x^2 + x + 0.7$）。

（2）当 $y = 1.6$ 时，$1.6 = -0.1(x-5)^2 + 3.2$，解得 $x_1 = 1$，$x_2 = 9$。$3 - 1 = 2$，$9 - 3 = 6$。

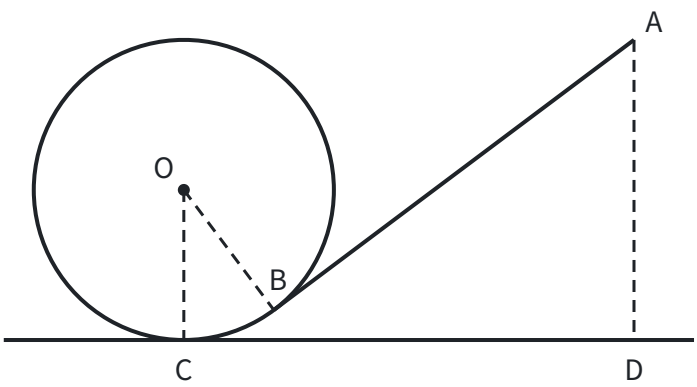
答：小红与爸爸的水平距离为 2 m 或 6 m。

思路： （1）已知最高点，就用顶点式，只剩 a 一个未知数，再代入喷水头 $P(0, 0.7)$ 求 a。（2）“头顶恰好接触水柱”就是水柱高度等于 1.6 m，已知函数值求自变量，得到对称轴两侧的两个 x，所以小红有两个位置，分别和爸爸的位置 $x = 3$ 相减。

第 22 题

考点：第九部分“与圆有关的位置关系”（第 268 页）、第八部分“锐角三角函数”（第 240 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）、第十一部分“辅助线从哪里来”（第 336 页）

（10 分）为弘扬民族传统体育文化，某校将传统游戏“滚铁环”列入了校运动会的比赛项目。滚铁环器材由铁环和推杆组成。小明对滚铁环的启动阶段进行了研究，如图，滚铁环时，铁环 $\odot O$ 与水平地面相切于点 C，推杆 AB 与铅垂线 AD 的夹角为 $\angle BAD$，点 O，A，B，C，D 在同一平面内。当推杆 AB 与铁环 $\odot O$ 相切于点 B 时，手上的力量通过切点 B 传递到铁环上，会有较好的启动效果。



（1）求证：$\angle BOC + \angle BAD = 90°$。

（2）实践中发现，切点 B 只有在铁环上一定区域内时，才能保证铁环平稳启动。图中点 B 是该区域内最低位

置，此时点 A 距地面的距离 AD 最小，测得 $\cos\angle BAD=3/5$。已知铁环 $\odot O$ 的半径为 25 cm，推杆 AB 的长为 75 cm，求此时 AD 的长。

答案： （1）过点 B 作 $EF/\!/CD$，分别交 AD 于点 E，交 OC 于点 F。

因为 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C，所以 $\angle OCD=90°$。因为 $AD\perp CD$，所以 $\angle ADC=90°$。因为 $EF/\!/CD$，所以 $\angle OFB=\angle AEB=90°$。所以 $\angle BOC+\angle OBF=90°$，$\angle ABE+\angle BAD=90°$。

因为 AB 为 $\odot O$ 的切线，所以 $\angle OBA=90°$，$\angle OBF+\angle ABE=90°$。所以 $\angle OBF=\angle BAD$，所以 $\angle BOC+\angle BAD=90°$。

（2）在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AB=75$，$\cos\angle BAD=3/5$，所以 $AE=75\times 3/5=45$。

由（1）知 $\angle OBF=\angle BAD$，所以 $\cos\angle OBF=3/5$。在 Rt$\triangle OBF$ 中，$OB=25$，所以 $BF=15$，$OF=20$。因为 $OC=25$，所以 $CF=5$。

因为 $\angle OCD=\angle ADC=\angle CFE=90°$，所以四边形 $CDEF$ 为矩形，$DE=CF=5$。所以 $AD=AE+ED=50$ cm。

思路： （1）题目里有两个“切”：地面切圆于 C 得 $OC\perp CD$，推杆切圆于 B 得 $OB\perp AB$。再加上 AD 铅垂，全是直角，过 B 画一条水平线，就能把 $\angle BOC$ 和 $\angle BAD$ 分别放进两个直角三角形里，用“同角的余角相等”连起来。（2）AD 被水平线 EF 分成两段：上段 AE 在 Rt$\triangle ABE$ 里直接用余弦算；下段 $ED=CF=OC-OF$，而 OF 要在 Rt$\triangle OBF$ 里算，这里正好用上（1）的结论 $\angle OBF=\angle BAD$。

第 23 题

考点：第六部分“平移、轴对称与旋转”（第 188 页）、第五部分“全等三角形”（第 136 页）、第五部分“勾股定理”（第 149 页）、第一部分“怎样证明”（第 29 页）

（10 分）综合与实践

综合与实践课上，老师让同学们以“矩形的折叠”为主题开展数学活动。

（1）操作判断

操作一：对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平；

操作二：在 AD 上选一点 P，沿 BP 折叠，使点 A 落在矩形内部点 M 处，把纸片展平，连接 PM，BM。

根据以上操作，当点 M 在 EF 上时，写出图 1 中一个 30° 的角：____。

（2）迁移探究

小华将矩形纸片换成正方形纸片，继续探究，过程如下：

将正方形纸片 $ABCD$ 按照（1）中的方式操作，并延长 PM 交 CD 于点 Q，连接 BQ。

① 如图 2，当点 M 在 EF 上时，$\angle MBQ=$ °，$\angle CBQ=$ °；

② 改变点 P 在 AD 上的位置（点 P 不与点 A，D 重合），如图 3，判断 $\angle MBQ$ 与 $\angle CBQ$ 的数量关系，并说明理由。

（3）拓展应用

在（2）的探究中，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8 cm，当 $FQ=1$ cm 时，直接写出 AP 的长。

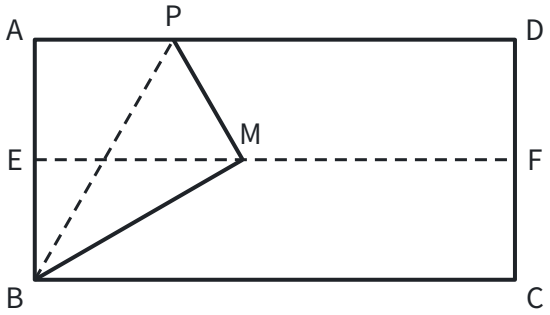


图 1

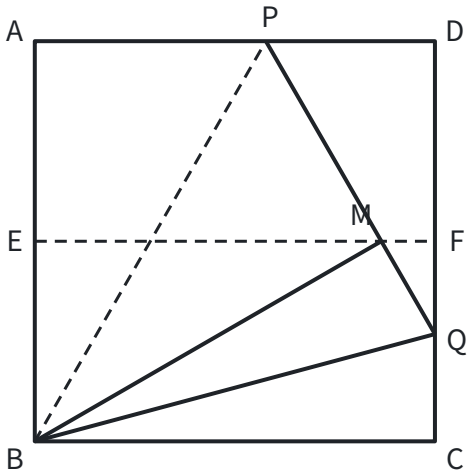


图 2

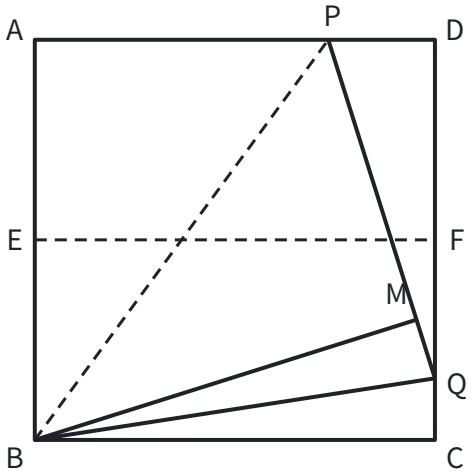


图 3

答案： （1）$\angle ABP$ 或 $\angle PBM$ 或 $\angle MBC$ 或 $\angle BME$（任意写出一个即可）。

（2）① 15，15。

② $\angle MBQ = \angle CBQ$。理由如下：

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB = BC$，$\angle A = \angle C = 90°$。由轴对称的性质，得 $BM = AB$，$\angle BMP = \angle A = 90°$。所以 $\angle BMQ = \angle C = 90°$，$BM = BC$。又因为 BQ 是公共边，所以 Rt$\triangle MBQ \cong$ Rt$\triangle CBQ$（HL），所以 $\angle MBQ = \angle CBQ$。

（3）40/11 cm 或 24/13 cm。

思路： 折叠就是轴对称，折痕两侧的对应边、对应角相等。（1）EF 是对折线，$BE=(1/2)AB$；折叠后 $BM=AB$，所以 Rt△BEM 中 $BE=(1/2)BM$，$\angle BME=30°$，再由 $EF\parallel BC$ 和折叠推出 $\angle MBC=30°$、$\angle ABM=60°$、$\angle ABP=\angle PBM=30°$。（2）换成正方形后 $BM=AB=BC$，$\angle BMQ=\angle C=90°$，两个直角三角形斜边公共、一条直角边相等，用 HL 得全等；图 2 中 $\angle MBC=30°$，被 BQ 平分，所以两个角都是 $15°$。（3）由全等得 $MQ=CQ$，设 $AP=PM=x$，则 $PQ=x+CQ$，$PD=8-x$，$DQ=8-CQ$，在 Rt△PDQ 中用勾股定理列方程。F 是 CD 的中点，$FQ=1$ 时 Q 可能在 F 下方（$CQ=3$）或上方（$CQ=5$），要分两种情况：

$$(x+3)^2=(8-x)^2+5^2\Rightarrow x=\frac{40}{11};\qquad (x+5)^2=(8-x)^2+3^2\Rightarrow x=\frac{24}{13}.$$

学习工具

下面这些网站可以帮你把书里的图“动起来”、换个角度理解概念，或者找到更多练习。手机扫二维码就能打开。

画图与计算

标题	说明	网址	二维码
Desmos 图形计算器	输入函数式马上画出图象；把系数设成滑块，拖动就能看到 k、b、a 变化时图象怎样变。也能画不等式表示的区域、找两条线的交点。适合配合第七部分“总览：三种函数对照”（第 199 页）各页使用，有中文界面	desmos.com/calculator	
GeoGebra 图形计算器	和 Desmos 类似，函数图象、方程组的解、坐标里的图形都能画，还能显示交点和极值点的坐标	geogebra.org/calculator	
GeoGebra 几何	在屏幕上尺规作图，作好后拖动点，看哪些关系始终不变，比如中点四边形总是平行四边形、同弧所对的圆周角总相等。适合配合第五部分和第九部分	geogebra.org/geometry	
Wolfram|Alpha	输入算式，能化简、因式分解、解方程、画图，用来核对自己算的结果。英文网站，输入写成 factor x^2-5x+6 这样的形式	wolframalpha.com	

概念与方法

标题	说明	网址	二维码
PhET 互动仿真	美国科罗拉多大学的免费仿真程序，有中文版。数学类有“面积模型”“函数构建器”“比例”等，边动手边理解乘法公式、函数和比例	phet.colorado.edu/zh_CN	
数学乐	英文网站 Math is Fun 的中文版，用图和小动画讲概念，从数、代数到几何、统计与概率都有，文字浅显	shuxuele.com	
可汗学院（中文）	按知识点排好的讲解视频和练习，可以按自己的进度补基础	zh.khanacademy.org	
3Blue1Brown（哔哩哔哩）	用动画讲数学背后的直观想法，比如勾股定理为什么成立、函数图象的变换。部分视频超出初中范围，挑感兴趣的看	space.bilibili.com/88461692	
NRICH	英国剑桥大学的数学探究题库，题目重在思考、讨论和找规律，不追求套路。英文网站	nrich.maths.org	

本书用到的资料

标题	说明	网址	二维码
国家中小学智慧教育平台	教育部主办，有各版本教材的电子课本和同步课程。本书各页“对应人教版”的章节取自这里的人教版目录	basic.smartedu.cn	
义务教育课程方案和课程标准（2022 年版）	教育部发布的课程标准，规定初中数学学什么、学到什么程度	moe.gov.cn	

标题	说明	网址	二维码
中招直通车	郑州市教育局的中招信息网站，有历年中招资料和试题评析。2023 年真题的原卷、2025 年的试题评析来自这里	ztc.zzedu.net.cn	
中考网	各省历年中考真题和答案。2024 年真题的原卷和参考答案来自这里	zhongkao.com	
教习网	试卷、课件资料网站，部分资料可以在线预览。2023、2025 年真题核对题目和答案时用过	51jiaoxi.com	
科数网	数学题库，有历年中考题的文字版。2022 年真题核对文字时用过	kmath.cn	
北京中考在线	中考资讯和试卷资料，可以按地区、科目搜索中考试卷	zgkao.com	
搜狐	2022、2024、2025 年真题的原卷和参考答案扫描件，来自这里转载的文章	sohu.com	
网易	2023、2026 年真题的原卷扫描件和 2026 年参考答案，来自这里转载的文章	163.com	
郑州本地宝	郑州本地生活和教育资讯，2026 年真题核对时用过	zz.bendibao.com	

版权所有 © 2026 Jack，保留所有权利。未经书面许可，不得以任何形式复制全部或部分内容后公开发表。
版权说明和源码：https://github.com/mrzzcn/learn-math