

2026 年河南中考数学

河南省 2026 年初中学业水平考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

初中数学的自然原理 · 附录

试卷

河南省 2026 年初中学业水平考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

某地一天早晨的气温是 -3°C ，到中午升高了 5°C ，则中午的气温是

- A. -3°C B. -2°C C. 2°C D. 5°C

第 2 题

今年我国六五环境日的主题为“全面绿色转型，共建美丽中国”。将“共建美丽中国”这六个汉字分别写在某正方体的表面上，如图是它的一种展开图，则在原正方体中，与“建”字所在面相对的面上的汉字是



- A. 美 B. 丽 C. 中 D. 国

第 3 题

下列调查中，适宜用全面调查（普查）的是

- A. 检查某载人飞船的零部件质量 B. 检测一条河流的水质情况
C. 了解某市中学生的课外阅读时间 D. 调查一批玉米种子的发芽率

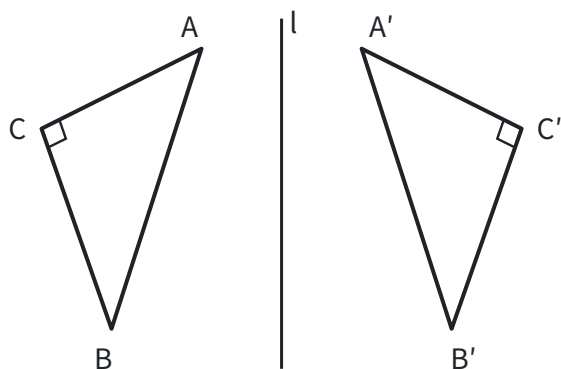
第 4 题

已知 $x = 2$ 是关于 x 的方程 $x^2 - mx = 6$ 的一个根，则 m 的值为

- A. 5 B. -5 C. 1 D. -1

第 5 题

如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称， $\angle C = 90^{\circ}$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，则 $A'B'$ 的长为



A. 6

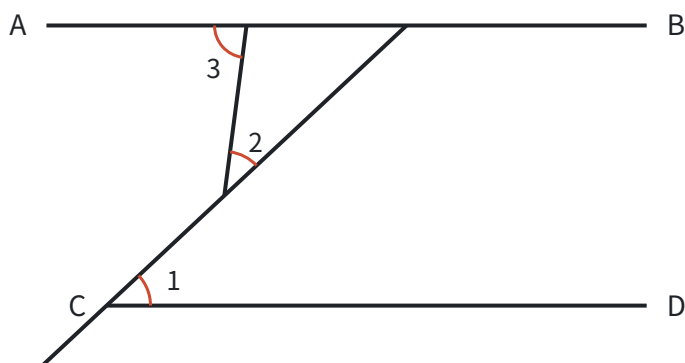
B. 8

C. 10

D. 12

第 6 题

如图是高铁线路上某高压线支撑结构的部分示意图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为

A. 90° B. 80° C. 70° D. 60°

第 7 题

下列式子中，运算结果为 $x^2 - 4$ 的是

A. $(x - 2)^2$ B. $(x + 2)(2 - x)$ C. $(x + 2)(x - 2)$ D. $x(x - 4)$

第 8 题

2026 年 3 月，我国自主研发的 SYT80（T1200 级）超高强度碳纤维发布，这是全世界第一款量产的 T1200 级碳纤维产品。SYT80 超高强度碳纤维拉伸强度突破 8×10^3 兆帕，普通钢材的拉伸强度约为 8×10^2 兆帕。数据“ 8×10^3 ”是“ 8×10^2 ”的

A. 2 倍

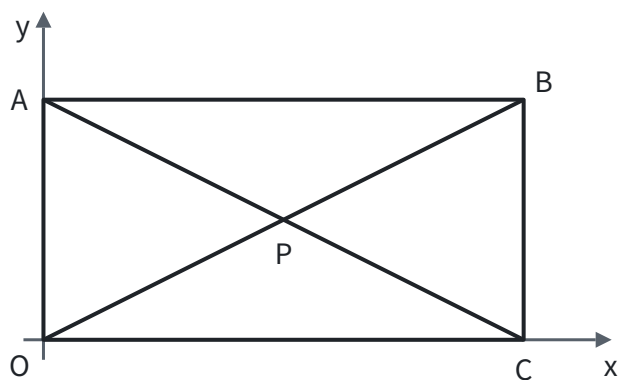
B. 5 倍

C. 8 倍

D. 10 倍

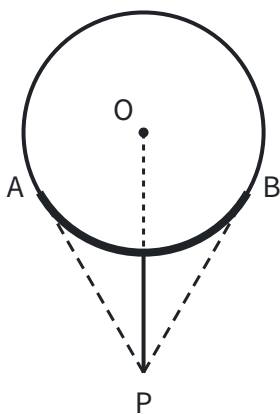
第 9 题

如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的边 OC 在 x 轴上，对角线 OB ， AC 交于点 P ， $OA = 2$ ， $OC = 4$ 。将矩形 $OABC$ 向左平移，当点 P 的对应点落在 y 轴上时，点 A 的对应点的坐标为

A. $(-2, 2)$ B. $(-2, 1)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 1)$

第 10 题

团扇始于汉代，盛于唐宋，寓意“团圆友善”。劳动课上，小红想在自己制作的团扇边缘选一段弧进行装饰。如图，已知扇面边缘为 $\odot O$ ，扇柄所在直线经过圆心 O ，她过扇柄端点 P 作 PA ， PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A ， B ，得到 AB 。若 $\odot O$ 的半径为 9 cm ， $\angle APB = 60^\circ$ ，则小红想要装饰的 AB 的长为

A. $3\pi\text{ cm}$ B. $6\pi\text{ cm}$ C. $9\pi\text{ cm}$ D. $27\pi\text{ cm}$

第 11 题

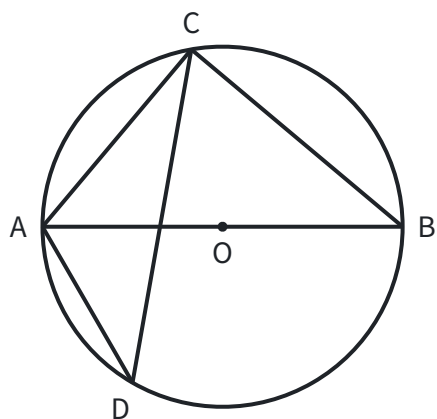
请写出一个图象经过第一、三象限的正比例函数表达式 _____。

第 12 题

方程 $2/(x+1) = 1/x$ 的解为 _____。

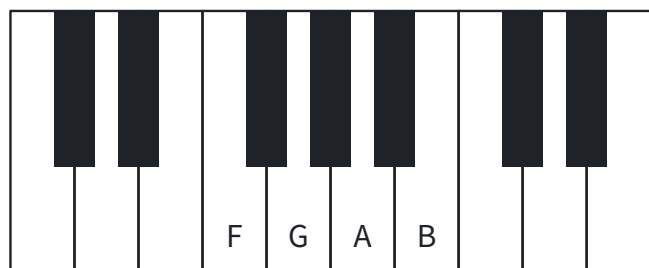
第 13 题

如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C ， D 为 $\odot O$ 上两点， $\angle ADC = 40^\circ$ ，则 $\angle CAB$ 的度数为 _____。



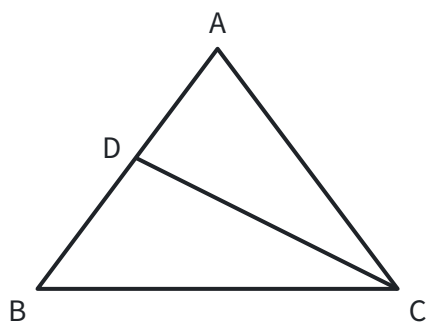
第 14 题

在钢琴上弹奏不同的琴键，能够发出高低不同的声音，当同时弹奏两个相邻的白色琴键时，发出的声音构成二度音程。如图是钢琴键盘的一部分，从 F, G, A, B 四个白色琴键中随机选两个琴键同时弹奏，发出的声音构成二度音程的概率为 _____。



第 15 题

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ， CD 是角平分线。点 E 为边 BC 上一点，连接 AE ，交 CD 于点 F ，连接 BF 。若 $AE = 2\sqrt{5}$ ，则 BF 的长为 _____。



第 16 题

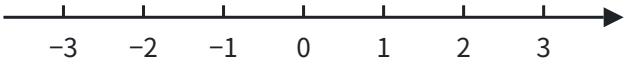
(1) 计算： $(3 - \pi)^0 - 2^{-1} + \sqrt{1/4}$ 。

(2) 解不等式组：

$$\begin{cases} 3x - 1 \leq 2, & \text{①} \\ 2x + 5 \geq x + 3. & \text{②} \end{cases}$$

完成以下解答过程。

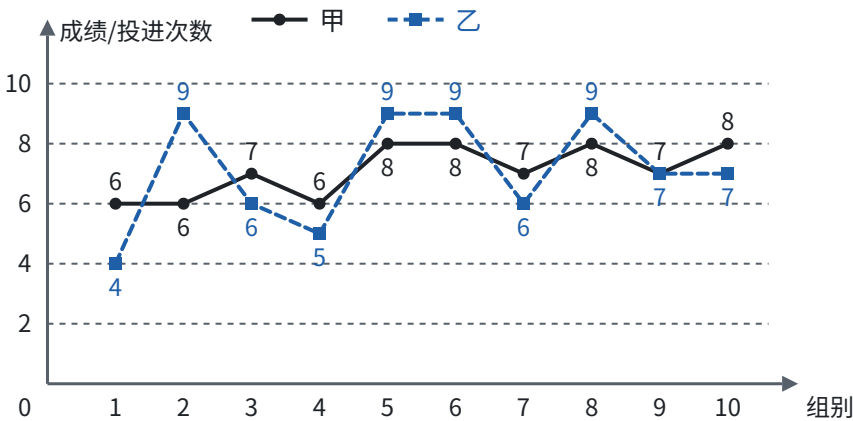
- i) 解不等式 ①，得 ____。
- ii) 解不等式 ②，得 ____。
- iii) 把不等式 ① 和 ② 的解集在数轴上表示出来。



- iv) 所以，原不等式组的解集是 ____。

第 17 题

加强中小学科技教育是服务国家创新驱动发展战略、培养未来科技创新人才的重要途径。某学校科创社团组装了甲、乙两个投篮机器人，准备从中选一个参加青少年科技创新大赛。为此，该社团对两个投篮机器人分别进行了 10 组测试（每组测试投篮 10 次，以投进次数作为测试成绩），并对测试成绩整理、描述、分析如下。



测试成绩统计表：

统计量	甲	乙
平均数	7.1	7.1
中位数	a	7
众数	8	b
方差	s_1^2	s_2^2

根据以上信息，回答下列问题。

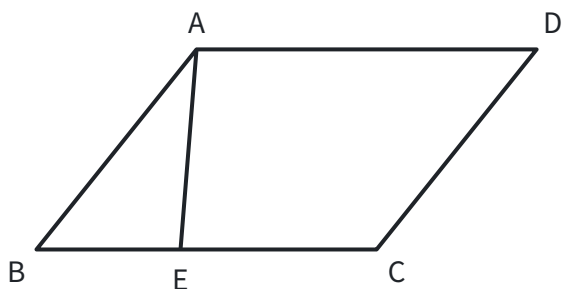
- (1) 表中 a 的值为 ____， b 的值为 ____， s_1^2 ____ s_2^2 （填 “>” “=” 或 “<”）。
- (2) 你认为科创社团应选哪个投篮机器人参加青少年科技创新大赛？请说明理由。

第 18 题

近视可防可控不可逆，保持“一尺、一拳、一寸”的正确书写姿势能有效预防近视。小文发现，一本书的长度加上她的一拳长是 1 尺，这本书长度的 2 倍比她的一拳长的 3 倍多 1 尺。这本书的长度和小文的一拳长分别是多少尺？

第 19 题

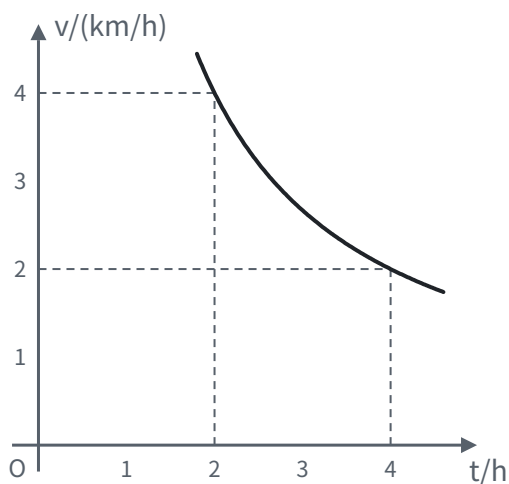
如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 为边 BC 上一点，连接 AE 。



- (1) 请用无刻度的直尺和圆规作 $\angle DCM$ ，使 $\angle DCM = \angle BAE$ ，且射线 CM 交边 AD 于点 F （保留作图痕迹，不写作法）。
- (2) 判断线段 BE 与 (1) 中得到的线段 DF 的数量关系，并给出证明。

第 20 题

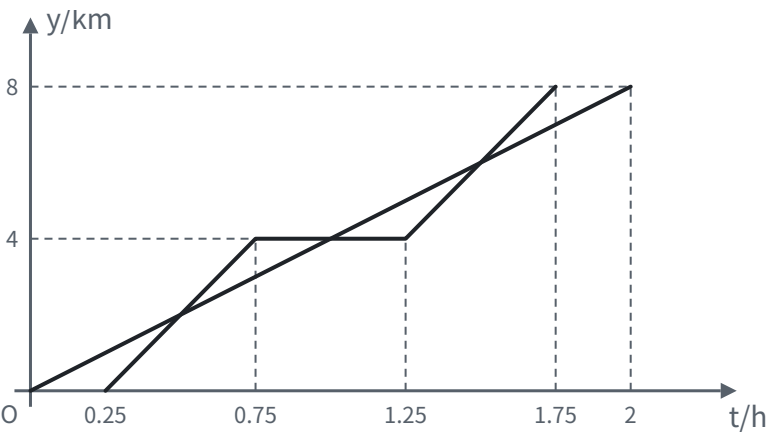
今年是红军长征胜利 90 周年，为传承红色基因、厚植爱国情怀，某校学生上午 8:00 从学校出发步行到长征纪念广场开展研学活动，学生步行的平均速度 v (km/h) 与步行全程所用时间 t (h) 的函数关系如图 1 所示。



- (1) 求 v 关于 t 的函数表达式。
- (2) 如果学生从学校出发步行到长征纪念广场所用时间不超过 2.5 h，那么学生步行的平均速度至少为多少？
- (3) 学生出发 0.25 h 后，李老师带着补给物品从学校出发，沿与学生相同的路线先去补给点，为学生整理、发放补给物品后，再去长征纪念广场。李老师、学生已走路程 y (km) 与学生步行时间 t (h) 的函数关系如图 2 所示。下列三个说法：
 - ① 李老师在补给点停留的时间为 1 h；
 - ② 李老师比学生先到达长征纪念广场；

③ 学生从学校到补给点所走路程为 4 km。

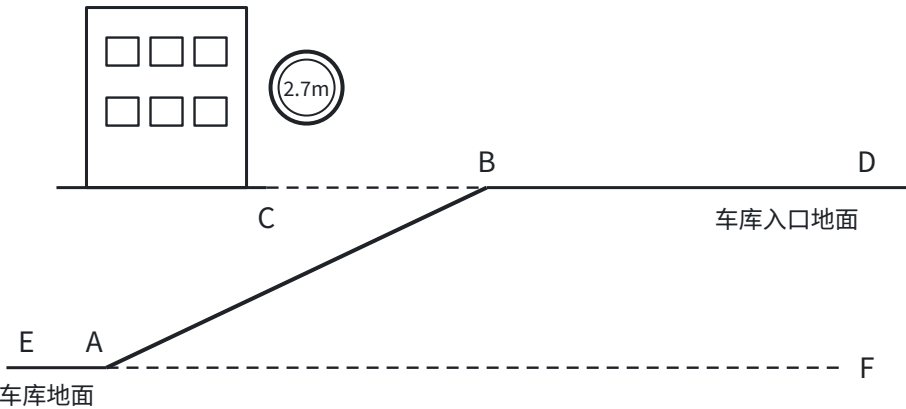
其中正确说法的序号是 _____。

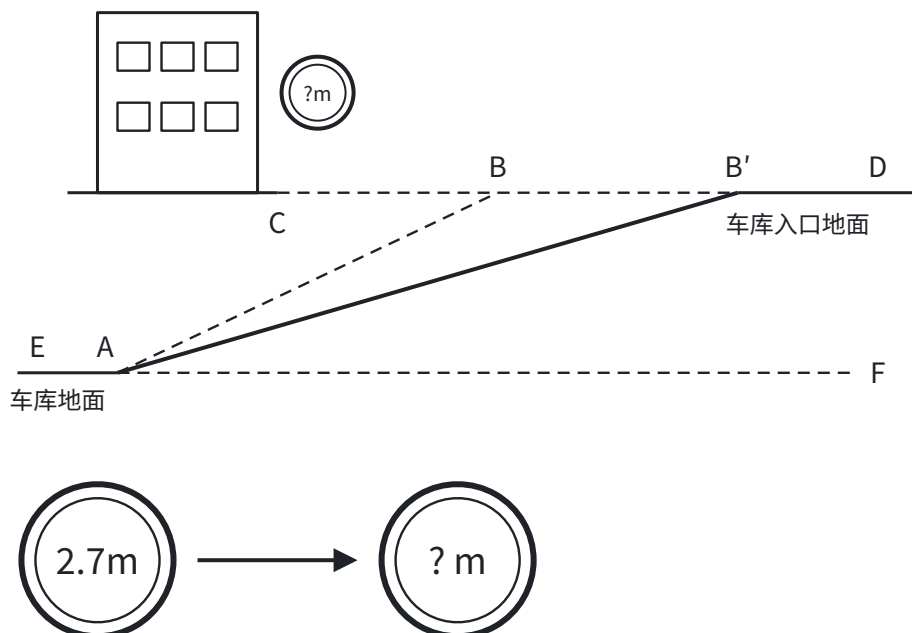


第 21 题

某学校为提高地下车库入口的行车安全性，计划对其进行改造。为此，某数学兴趣小组开展了综合与实践活动，记录如下。

活动主题	地下车库入口改造
采集信息	图 1 是地下车库入口示意图。① 点 C, B, D 在同一水平线上，点 E, A, F 在同一水平线上， $CD \parallel EF$ 。② 斜坡 AB 的长为 10 m， $\angle BAF = 26.4^\circ$ 。③ 车库限高 2.7 m。
设计方案	如图 2，保持点 A 不动，将点 B 沿射线 BD 平移到点 B' ，使 $\angle B'AF = 18.4^\circ$ 。
完成任务	任务一：求 BB' 的长。任务二：调整限高。经计算，点 C 到斜坡 AB' 的距离约为 3.47 m。在保障行车安全的前提下，车库限高标志上的数值最大可为 _____。（结果均保留一位小数）





请帮数学兴趣小组完成表中的两个任务（参考数据： $\sin 26.4^\circ \approx 0.44$ ， $\cos 26.4^\circ \approx 0.90$ ， $\tan 26.4^\circ \approx 0.50$ ， $\sin 18.4^\circ \approx 0.32$ ， $\cos 18.4^\circ \approx 0.95$ ， $\tan 18.4^\circ \approx 0.33$ ）。

第 22 题

定义：若点 P ， Q 在同一抛物线上，且点 Q 的横坐标比点 P 的横坐标大 3，则称点 Q 是点 P 的“黄金搭档点”。例如，抛物线 $y = x^2$ 上，点 $(3, 9)$ 是点 $(0, 0)$ 的“黄金搭档点”。

(1) 点 $A(0, -3)$ 和点 B 在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上，点 B 是点 A 的“黄金搭档点”，且点 B 的纵坐标为 12。求 b ， c 的值。

(2) 点 M ， N 在 (1) 中的抛物线上，且点 N 是点 M 的“黄金搭档点”。

① 若点 M ， N 的纵坐标相等，求点 M ， N 的横坐标。

② 抛物线上 M ， N 两点之间的部分（含 M ， N 两点）记为图象 W ，设点 M 的横坐标为 m ，当 $-5/2 < m < 0$ 时，若图象 W 上的最高点和最低点到 x 轴的距离之和为 5，请直接写出 m 的值。

第 23 题

在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 4$ 。将边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AE ，记旋转角为 α 。作射线 DE ，在射线 DE 上取一点 H ，使 $BH = BE$ ，连接 CH 。

(1) 观察猜想

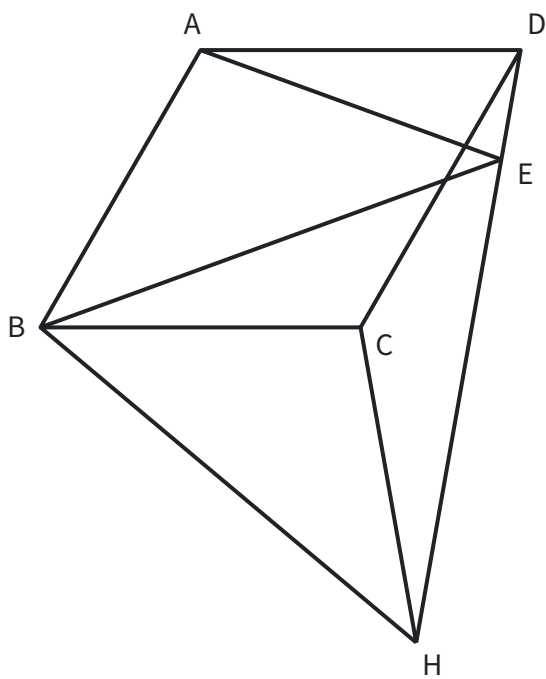
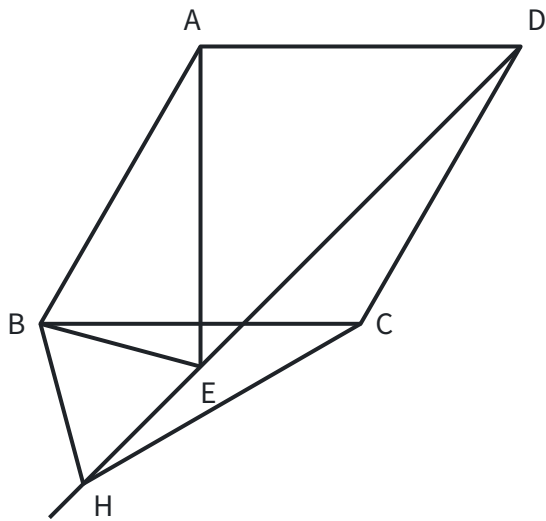
当 $\alpha = 30^\circ$ 时，如图 1， $\angle BEH$ 的度数为 _____， CH 的长为 _____。

(2) 探究证明

当 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ 时，(1) 中的两个结论是否仍然成立？若成立，请仅就图 2 的情形进行证明；若不成立，请说明理由。

(3) 拓展延伸

当 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ 时, 若 $\triangle DCH$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 请直接写出此时旋转角 α 的度数。



参考答案与思路

第 1 题 答案：C **思路：**“升高”就是加上，中午的气温是 $-3 + 5 = 2$ (°C)。异号两数相加，取绝对值较大的数的符号，再用较大的绝对值减去较小的绝对值；在数轴上看，就是从 -3 向右走 5 个单位。

第 2 题 答案：B **思路：**想象把展开图折回正方体。“建、美、丽、中”连成一行，折起来围成一圈侧面，一圈上隔一个面的两个面相对，所以“建”对“丽”，“美”对“中”；剩下的“共”和“国”分别是上、下底面，互相相对。

第 3 题 答案：A **思路：**选全面调查还是抽样调查，看两件事：结果是否要求绝对可靠，逐个调查是否可行。载人飞船关系到生命安全，每个零部件都必须检查；河水无法全部检测，全市学生人数太多，测发芽率会把种子用掉，都适合抽样调查。

第 4 题 答案：D **思路：**方程的根就是使等式成立的数，所以把 $x = 2$ 代入： $4 - 2m = 6$ ，得 $m = -1$ 。这里不用解一元二次方程，只要用“根”的定义，把问题变成关于 m 的一元一次方程。

第 5 题 答案：C **思路：**轴对称不改变图形的形状和大小，所以 $A'B' = AB$ 。在直角三角形 ABC 中，由勾股定理， $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 。

第 6 题 答案：B **思路：** $\angle 1$ 在 CD 上， $\angle 3$ 在 AB 上，要用平行线把 $\angle 1$ 搬到 AB 上。过点 C 的斜线和 AB 相交，由两直线平行、内错角相等，斜线与 AB 所成的这个角也是 50° 。 $\angle 3$ 是 AB 、斜线和短线段围成的小三角形的外角，等于和它不相邻的两个内角之和： $\angle 3 = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$ 。

第 7 题 答案：C **思路：** $x^2 - 4$ 是两个平方的差，正是平方差公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 的结果。B 看起来也像，但展开是 $4 - x^2$ ，符号反了；A 是完全平方，会多出中间项 $-4x$ 。

第 8 题 答案：D **思路：**求一个数是另一个数的几倍，用除法： $(8 \times 10^3) \div (8 \times 10^2) = 10^3 \div 10^2 = 10$ 。科学记数法里前面的数相同时，指数每大 1，数就大到 10 倍。

第 9 题 答案：A **思路：**矩形的对角线互相平分，所以 P 是 OB 的中点， $A(0, 2)$ 、 $B(4, 2)$ ， $P(2, 1)$ 。 P 落到 y 轴上，要向左平移 2 个单位；平移时每个点走的距离相同，所以 A 也向左平移 2 个单位，到 $(-2, 2)$ 。

第 10 题 答案：B **思路：**求弧长要知道圆心角，图中没有画出圆心角，就连接 OA ， OB 把它补出来。切线垂直于过切点的半径，所以 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ ，四边形 $OAPB$ 的内角和是 360° ，得 $\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。弧长

$$l = \frac{120\pi \times 9}{180} = 6\pi \text{ (cm)} .$$

第 11 题 答案： $y = x$ (答案不唯一) **思路：**正比例函数 $y = kx$ 的图象是过原点的直线。 $k > 0$ 时， x 为正 y 也为正， x 为负 y 也为负，图象经过第一、三象限，所以任取一个正数作 k 都可以。

第 12 题 答案： $x = 1$ **思路：**两边同乘最简公分母 $x(x + 1)$ ，化成整式方程 $2x = x + 1$ ，得 $x = 1$ 。去分母时乘的式子可能为 0，所以要检验： $x = 1$ 时 $x(x + 1) = 2 \neq 0$ ，是原方程的解。

第 13 题 答案： 50° **思路：**见到直径，就想到它所对的圆周角是直角： $\angle ACB = 90^\circ$ 。 $\angle ADC$ 和 $\angle ABC$ 都对 AC ，同弧所对的圆周角相等，所以 $\angle ABC = 40^\circ$ 。在直角三角形 ABC 中， $\angle CAB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 。

第 14 题 答案： $1/2$ **思路：**从 4 个琴键里选 2 个，所有可能的结果是 FG 、 FA 、 FB 、 GA 、 GB 、 AB ，共 6 种，每种可能性相同。相邻的有 FG 、 GA 、 AB 这 3 种，所以概率是 $3/6 = 1/2$ 。列举时注意“同时弹奏”不分先后， FG

和 GF 是同一种。

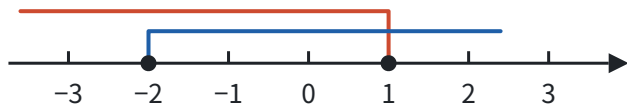
第 15 题 答案： $2\sqrt{2}$ 或 $10\sqrt{2}/3$ **思路：** 先定点 E 的位置。作高 AM ，等腰三角形三线合一， M 是 BC 的中点， $BM = 3$ ， $AM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 。由 $AE^2 = AM^2 + ME^2$ 得 $ME = 2$ ，而 E 可以在 M 的左边或右边，所以要分两种情况： $BE = 1$ 或 $BE = 5$ 。

再定点 F 。以 M 为原点、 BC 为 x 轴建立坐标系， $A(0, 4)$ ， $B(-3, 0)$ ， $C(3, 0)$ 。

- $BE = 1$ 时， $CE = 5 = CA$ ， $\triangle CAE$ 是等腰三角形，顶角的平分线 CF 也是中线， F 是 AE 的中点。 $E(-2, 0)$ ， $F(-1, 2)$ ， $BF = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 。
- $BE = 5$ 时， $CE = 1$ 。 $\triangle ACF$ 和 $\triangle ECF$ 以 AF 、 FE 为底时高相同；又因为 F 在 $\angle ACE$ 的平分线上，到 CA 、 CE 的距离相等，以 CA 、 CE 为底时高也相同。比较两种算法的面积比，得 $AF:FE = CA:CE = 5:1$ 。 $E(2, 0)$ ， F 从 A 出发走 AE 的 $5/6$ ， $F(5/3, 2/3)$ ， $BF = \sqrt{((14/3)^2 + (2/3)^2)} = 10\sqrt{2}/3$ 。

第 16 题 答案： (1) 原式 $= 1 - 1/2 + 1/2 = 1$ 。

(2) i) $x \leq 1$ ；ii) $x \geq -2$ ；iii) 如图；iv) $-2 \leq x \leq 1$ 。



思路： (1) 三项各用一个定义：非零数的 0 次幂等于 1 ($3 - \pi \neq 0$)， $2^{-1} = 1/2$ ， $1/4$ 的算术平方根是 $1/2$ 。

(2) 不等式组的解集是两个解集的公共部分，在数轴上就是两条线都覆盖的那一段；端点能取到，画实心点。

第 17 题 答案： (1) $a = 7$ ， $b = 9$ ， $s_1^2 < s_2^2$ 。

(2) 应选甲投篮机器人。因为甲、乙两个投篮机器人测试成绩的平均数相同，中位数相同，但甲的方差小于乙的方差，说明甲投篮机器人的成绩更稳定。（答案不唯一，合理即可）

思路： 从图上读出数据：甲是 6, 6, 7, 6, 8, 8, 7, 8, 7, 8，乙是 4, 9, 6, 5, 9, 9, 6, 9, 7, 7。甲排序后第 5、6 个数都是 7，中位数 $a = 7$ ；乙中 9 出现 4 次最多，众数 $b = 9$ 。方差比较的是数据离平均数的远近，不必算出来：甲的折线在 6 到 8 之间小幅起伏，乙从 4 跳到 9，波动大，所以 $s_1^2 < s_2^2$ （算出来是 0.69 和 3.09）。平均数、中位数相同时，比稳定性就看方差。

第 18 题 答案： 设这本书的长度是 x 尺，小文的一拳长是 y 尺。根据题意，得

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 0.8, \\ y = 0.2. \end{cases}$$

答：这本书的长度是 0.8 尺，小文的一拳长是 0.2 尺。

思路： 两个未知量，题目正好给了两个相等关系：“书长 + 一拳长 = 1 尺”，“书长的 2 倍 - 一拳长的 3 倍 = 1 尺”。“多 1 尺”说的是差，把它翻译成减法，是列方程时最容易出错的地方。解方程组时由第一个方程得 $x = 1 - y$ ，代入第二个方程消元。

第 19 题 答案： (1) 按“作一个角等于已知角”作图：以点 A 为圆心、适当长为半径画弧，交 AB 、 AE 于两

点；以点 C 为圆心、同样长为半径画弧，交 CD 于一点；以这一点为圆心、前面两个交点间的距离为半径画弧，与上一条弧在平行四边形内部交于一点 M ；作射线 CM 交 AD 于点 F 。

(2) $BE = DF$ 。证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB = CD$ ， $\angle B = \angle D$ 。由作图可知 $\angle BAE = \angle DCF$ 。所以 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (ASA)，所以 $BE = DF$ 。

思路：作图就是把 $\angle BAE$ 复制到顶点 C 、一边在 CD 上，依据是三边对应相等的三角形全等（见第五部分“尺规作图”）。第 (2) 问要比较 BE 、 DF ，就找它们所在的两个三角形 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ ：平行四边形给出一组对边相等、一组对角相等，作图又给出一组角相等，正好凑成“角边角”。也可以证 $AE \parallel CF$ ，得到四边形 $AECF$ 是平行四边形，再用 $BC - CE = AD - AF$ 。

第 20 题 答案： (1) 由题意知， v 是 t 的反比例函数，当 $t = 4$ 时， $v = 2$ ，所以 $v = 8/t$ 。

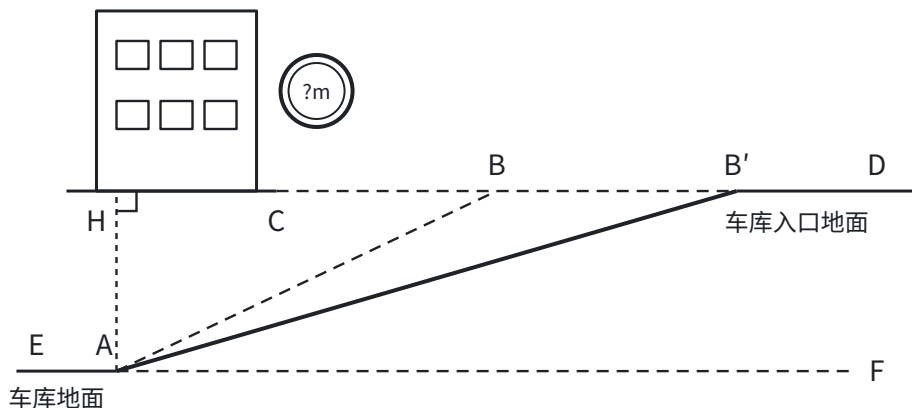
(2) 把 $t = 2.5$ 代入 $v = 8/t$ ，得 $v = 3.2$ 。对于函数 $v = 8/t$ ，当 $t > 0$ 时， t 越小， v 越大。所以学生步行的平均速度至少为 3.2 km/h 。

(3) ②③

思路： (1) 路程一定时，速度和时间的乘积不变，所以是反比例函数，图上 $(2, 4)$ 和 $(4, 2)$ 都给出 $vt = 8$ ，这个 8 就是全程 8 km 。(2) “不超过 2.5 h ”是 $t \leq 2.5$ ，要从图象的增减性推出 v 的范围： t 越小 v 越大，所以 $v \geq 3.2$ 。

(3) 读图 2：学生是过原点的直线， 2 h 走完 8 km ；李老师的折线在 0.75 h 到 1.25 h 之间是水平的，说明停在 4 km 处的补给点 0.5 h ，所以 ① 错、③ 对；李老师 1.75 h 到达 8 km ，早于学生的 2 h ，② 对。

第 21 题 答案： 任务一：如图，过点 A 作 $AH \perp CD$ ，垂足为点 H 。



由题意知， $\angle ABH = \angle BAF = 26.4^\circ$ ， $\angle AB'H = \angle B'AF = 18.4^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中，

$$AH = AB \sin \angle ABH = 10 \sin 26.4^\circ \approx 4.4, \quad BH = AB \cos \angle ABH = 10 \cos 26.4^\circ \approx 9.0.$$

在 $\text{Rt}\triangle AB'H$ 中，

$$B'H = \frac{AH}{\tan \angle AB'H} \approx \frac{4.4}{\tan 18.4^\circ} \approx 13.33.$$

所以 $BB' = B'H - BH \approx 4.3$ ，即 BB' 的长约为 4.3 m 。

任务二：3.4

思路：斜坡不是直角三角形的边时，先作垂线造直角三角形。 AH 是两段斜坡共同的高度，是连接两个直角三角形的桥梁：在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中由斜边 AB 求出 AH 和 BH ，在 $\text{Rt}\triangle AB'H$ 中由 AH 和 $\angle AB'H$ 求出 $B'H$ ，两段水平距离相减

就是 BB' 。任务二里，车在斜坡上时车身垂直于坡面，入口上沿 C 到坡面 AB' 的距离 3.47 m 就是能通过的最大高度；限高标志的数值不能超过它，保留一位小数时只能取 3.4，不能四舍五入成 3.5。

第 22 题 答案： (1) 因为点 $A(0, -3)$ 在抛物线上，所以 $c = -3$ 。由题意知，点 B 的坐标为 $(3, 12)$ ，所以 $9 + 3b - 3 = 12$ ， $b = 2$ 。

(2) ① 由 (1) 知，抛物线的表达式为 $y = x^2 + 2x - 3$ ，对称轴为直线 $x = -1$ 。因为点 M, N 的纵坐标相等，且 $MN = 3$ ，所以点 M, N 关于对称轴对称，点 M 的横坐标为 $-1 - 3/2 = -5/2$ ，点 N 的横坐标为 $-1 + 3/2 = 1/2$ 。

② $m = -4 + \sqrt{3}$ 或 $m = -4 + \sqrt{5}$ 。

推理过程：图象 W 是 $m \leq x \leq m + 3$ 上的一段。抛物线开口向上，离对称轴越远的点越高，所以 W 上的最高点是两个端点中的一个。 N 比 M 高：

$$[(m+3)^2 + 2(m+3) - 3] - (m^2 + 2m - 3) = 6m + 15 > 0,$$

所以最高点总是 N ，纵坐标 $y_N = (m+4)^2 - 4$ 。

- $-5/2 < m \leq -1$ 时， W 含顶点 $(-1, -4)$ ，最低点到 x 轴的距离是 4，所以 $|y_N| = 1$ 。由 $y_N = 1$ 得 $m = -4 + \sqrt{5}$ ，由 $y_N = -1$ 得 $m = -4 + \sqrt{3}$ ，都在范围内。
- $-1 < m < 0$ 时， W 从左到右上升，最低点是 M （在 x 轴下方），最高点是 N （在 x 轴上方），距离之和是 $y_N - y_M = 6m + 15 = 5$ ，得 $m = -5/3$ ，不在范围内，舍去。

思路：“黄金搭档点”只是说横坐标差 3，把它翻译成坐标就能代入。纵坐标相等的两点一定关于对称轴对称，用对称性比解方程快。第 ② 问先想图象 W 的最高点、最低点在哪里：要看顶点在不在 W 上，所以按 m 和 -1 的大小分类；最高点在 x 轴上方还是下方又决定“距离”要不要变号（见第十一部分“分类讨论”）。

第 23 题 答案： (1) $60^\circ, 4$ 。

(2) 两个结论仍然成立。证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 4$ ，所以 $AB = AD = BC = 4$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$ 。因为 $AB = AE$ ，所以 $AD = AE = AB$ 。因为 $\angle BAE = \alpha$ ，所以

$$\angle AEB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AED = \frac{1}{2} [180^\circ - (120^\circ - \alpha)] = 30^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

所以 $\angle BEH = 180^\circ - \angle AEB - \angle AED = 60^\circ$ 。又因为 $BE = BH$ ，所以 $\triangle BEH$ 为等边三角形， $\angle EBH = 60^\circ$ 。所以 $\angle ABC = \angle EBH$ ，两边都减去 $\angle EBC$ ，得 $\angle ABE = \angle CBH$ 。又因为 $BE = BH$ ， $AB = CB$ ，所以 $\triangle ABE \cong \triangle CBH$ (SAS)，所以 $AE = CH$ ，即 $CH = 4$ 。

(3) 15° 或 105° 。

推理过程：由 (2) 的全等， $\angle BCH = \angle BAE = \alpha$ ， $CH = 4$ 。 $\triangle DCH$ 以 $CD = 4$ 为底，面积为 $4\sqrt{2}$ ，所以点 H 到直线 CD 的距离是 $2\sqrt{2}$ 。在以 $CH = 4$ 为斜边、这段距离为直角边的直角三角形中， $2\sqrt{2}/4 = \sqrt{2}/2$ ，所以 CH 与直线 CD 所成的锐角是 45° ， $\angle DCH$ 是 45° 或 135° 。

H 在 BC 的下方， $\angle DCH$ 由 $\angle BCD = 120^\circ$ 和 $\angle BCH = \alpha$ 合成： $120^\circ + \alpha \leq 180^\circ$ 时 $\angle DCH = 120^\circ + \alpha$ ，否则 $\angle DCH = 360^\circ - (120^\circ + \alpha) = 240^\circ - \alpha$ 。两种情况下 $\angle DCH$ 都大于 120° ，只能是 135° ，所以 $\alpha = 15^\circ$ 或 $\alpha = 105^\circ$ 。

思路：旋转带来等线段： $AB = AE = AD$ ，于是 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，底角都能用 α 表示，相加时 α 抵消， $\angle BEH$ 恒为 60° 。有了 60° 和 $BE = BH$ ，就得到等边三角形；它和菱形里的等边三角形 ABC 共顶点 B ，两个等边三角形绕公共顶点 B 转过同样的角，找到 $\triangle ABE \cong \triangle CBH$ ，就把 CH 转化成了 AE 。第 (3) 问 CD, CH 都是 4，面积只由 $\angle DCH$ 决定，再按 H 的位置分两种情况表示 $\angle DCH$ 。