

2024 年河南中考数学

河南省 2024 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

初中数学的自然原理 · 附录

试卷

河南省 2024 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

如图，数轴上点 P 表示的数是



- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

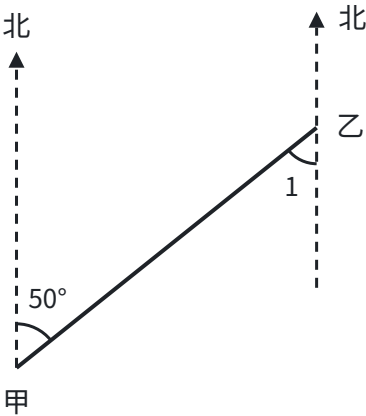
第 2 题

据统计，2023 年我国人工智能核心产业规模达 5 784 亿元。数据“5 784 亿”用科学记数法表示为

- A. 5784×10^8
- B. 5.784×10^{10}
- C. 5.784×10^{11}
- D. 0.5784×10^{12}

第 3 题

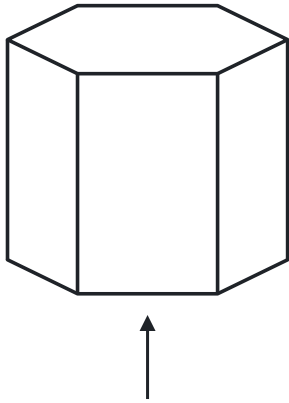
如图，乙地在甲地的北偏东 50° 方向上，则 $\angle 1$ 的度数为



- A. 60°
- B. 50°
- C. 40°
- D. 30°

第 4 题

信阳毛尖是中国十大名茶之一。如图是信阳毛尖茶叶的包装盒，它的主视图为



A



B



C



D

A. 矩形，中间有两条竖线（见选项图 A）

B. 矩形，中间有一条竖线（见选项图 B）

C. 矩形（见选项图 C）

D. 正六边形（见选项图 D）

第 5 题

下列不等式中，与 $-x > 1$ 组成的不等式组无解的是

A. $x > 2$

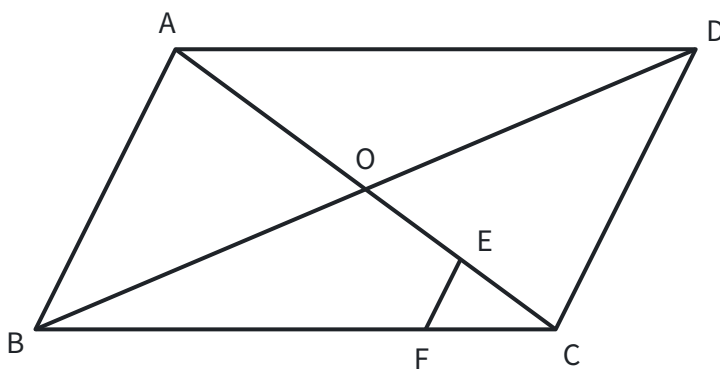
B. $x < 0$

C. $x < -2$

D. $x > -3$

第 6 题

如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 为 OC 的中点， $EF \parallel AB$ 交 BC 于点 F 。若 $AB = 4$ ，则 EF 的长为



A. $1/2$

B. 1

C. $4/3$

D. 2

第 7 题

计算

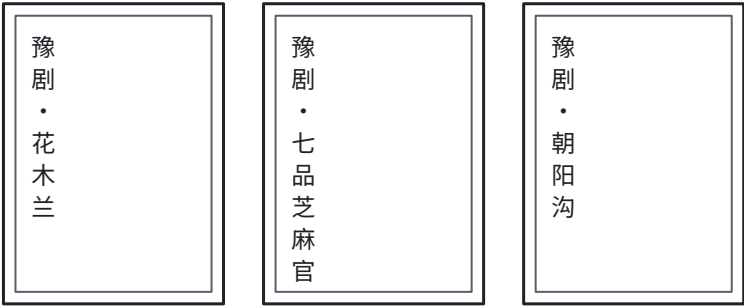
$$\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{a \uparrow}^3$$

的结果是

- A. a^5
- B. a^6
- C. a^{a+3}
- D. a^{3a}

第 8 题

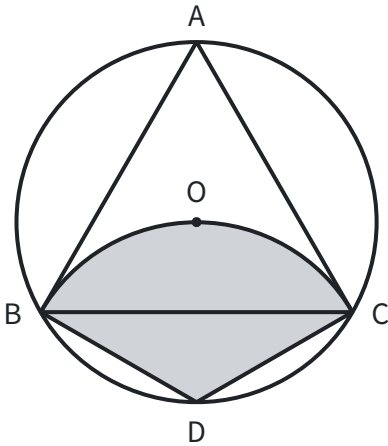
豫剧是国家级非物质文化遗产，因其雅俗共赏，深受大众喜爱。正面印有豫剧经典剧目人物的三张卡片如图所示，它们除正面外完全相同。把这三张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取一张，放回洗匀后，再从中随机抽取一张，两次抽取的卡片正面相同的概率为



- A. 1/9
- B. 1/6
- C. 1/5
- D. 1/3

第 9 题

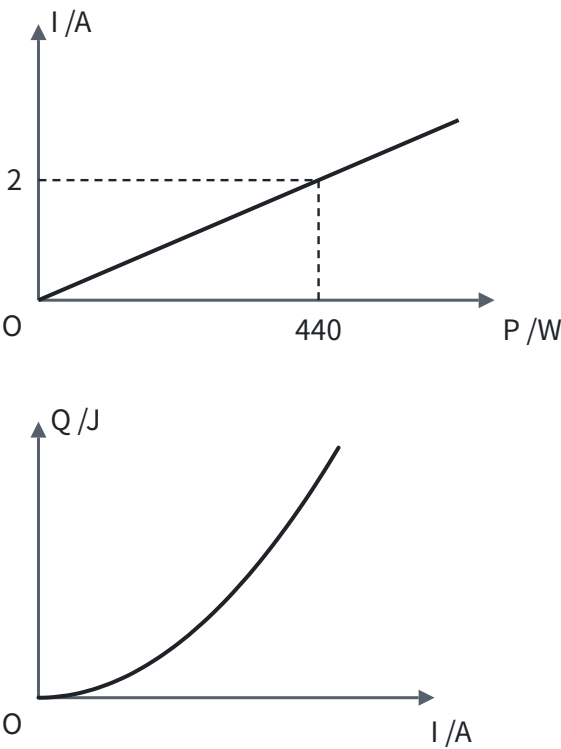
如图， $\odot O$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的外接圆，点 D 是 BC 的中点，连接 BD ， CD 。以点 D 为圆心， BD 的长为半径在 $\odot O$ 内画弧，则阴影部分的面积为



- A. $8\pi/3$
- B. 4π
- C. $16\pi/3$
- D. 16π

第 10 题

把多个用电器连接在同一个插线板上，同时使用一段时间后，插线板的电源线会明显发热，存在安全隐患。数学兴趣小组对这种现象进行研究，得到时长一定时，插线板电源线中的电流 I 与使用电器的总功率 P 的函数图象（如图 1），插线板电源线产生的热量 Q 与 I 的函数图象（如图 2）。下列结论中错误的是



- A. 当 $P = 440\text{ W}$ 时, $I = 2\text{ A}$

B. Q 随 I 的增大而增大
- C. I 每增加 1 A , Q 的增加量相同

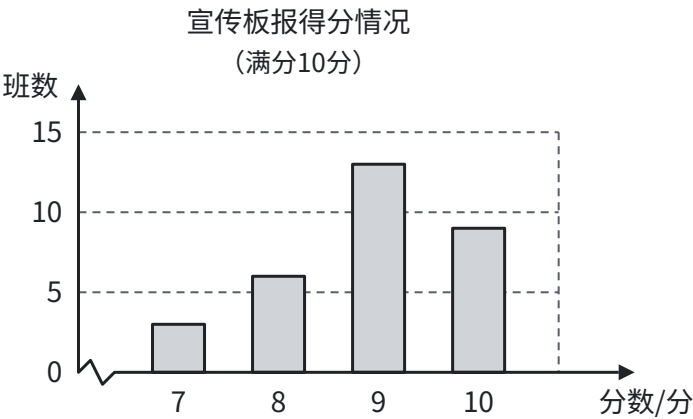
D. P 越大, 插线板电源线产生的热量 Q 越多

第 11 题

请写出 $2m$ 的一个同类项：_____。

第 12 题

2024 年 3 月是第 8 个全国近视防控宣传教育月，其主题是“有效减少近视发生，共同守护光明未来”。某校组织各班围绕这个主题开展板报宣传活动，并对各班的宣传板报进行评分，得分情况如图，则得分的众数为 _____ 分。

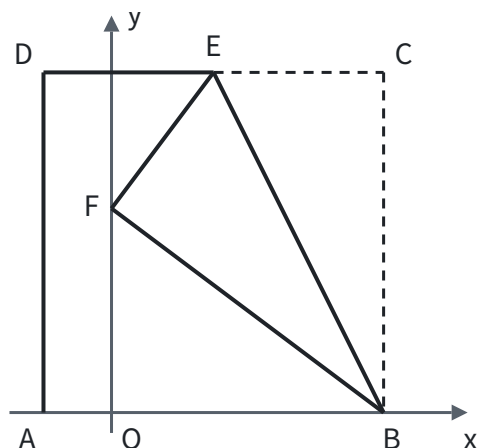


第 13 题

若关于 x 的方程 $(1/2)x^2 - x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 c 的值为 _____。

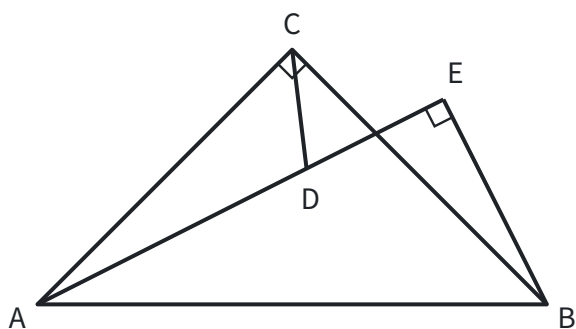
第 14 题

如图，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ ，点 E 在边 CD 上。将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，点 C 落在点 F 处。若点 F 的坐标为 $(0, 6)$ ，则点 E 的坐标为 _____。



第 15 题

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CA = CB = 3$ ，线段 CD 绕点 C 在平面内旋转，过点 B 作 AD 的垂线，交射线 AD 于点 E 。若 $CD = 1$ ，则 AE 的最大值为 _____，最小值为 _____。



第 16 题

(1) 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{50} - (1 - \sqrt{3})^0$ ；

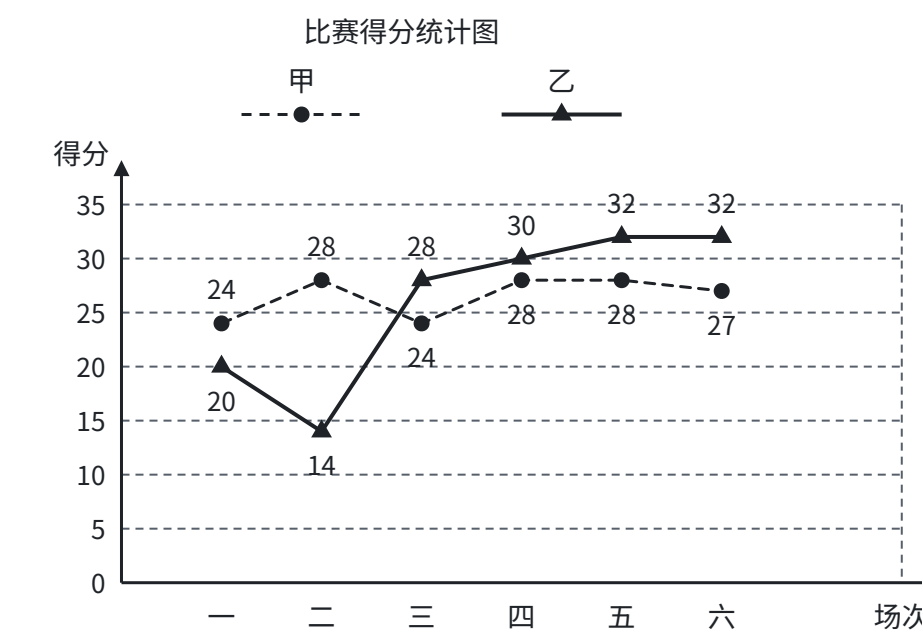
(2) 化简：

$$\left(\frac{3}{a-2} + 1 \right) \div \frac{a+1}{a^2-4}.$$

第 17 题

为提升学生体质健康水平，促进学生全面发展，学校开展了丰富多彩的课外体育活动。在八年级组织的篮球联赛

中，甲、乙两名队员表现优异，他们在近六场比赛中关于得分、篮板和失误三个方面的统计结果如下。



技术统计表：

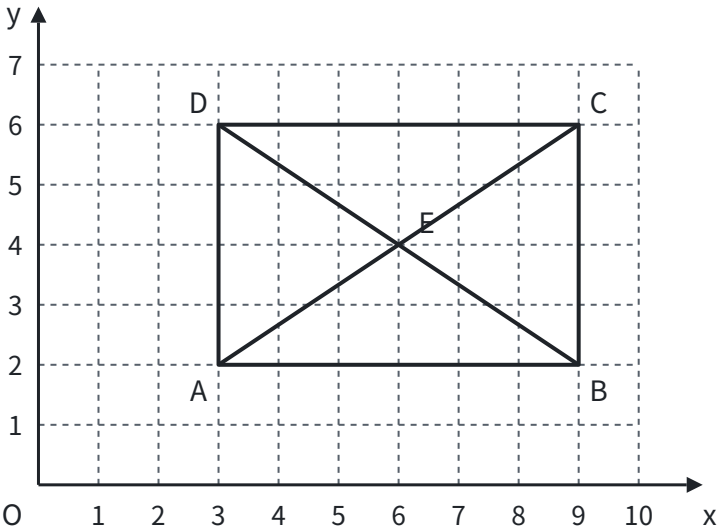
队员	平均每场得分	平均每场篮板	平均每场失误
甲	26.5	8	2
乙	26	10	3

根据以上信息，回答下列问题。

- (1) 这六场比赛中，得分更稳定的队员是 ____（填“甲”或“乙”）；甲队员得分的中位数为 27.5 分，乙队员得分的中位数为 ____ 分。
- (2) 请从得分方面分析：这六场比赛中，甲、乙两名队员谁的表现更好。
- (3) 规定“综合得分”为：平均每场得分 $\times 1$ + 平均每场篮板 $\times 1.5$ + 平均每场失误 $\times (-1)$ ，且综合得分越高表现越好。请利用这种评价方法，比较这六场比赛中甲、乙两名队员谁的表现更好。

第 18 题

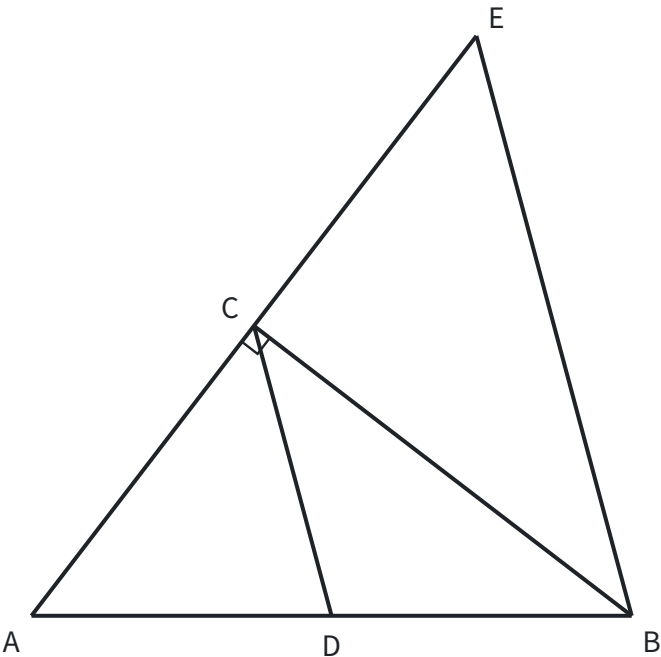
如图，矩形 $ABCD$ 的四个顶点都在格点（网格线的交点）上，对角线 AC ， BD 相交于点 E ，反比例函数 $y = k/x$ ($x > 0$) 的图象经过点 A 。



- (1) 求这个反比例函数的表达式。
- (2) 请先描出这个反比例函数图象上不同于点 A 的三个格点，再画出反比例函数的图象。
- (3) 将矩形 $ABCD$ 向左平移，当点 E 落在这个反比例函数的图象上时，平移的距离为 ____。

第 19 题

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的中线， $BE \parallel DC$ 交 AC 的延长线于点 E 。

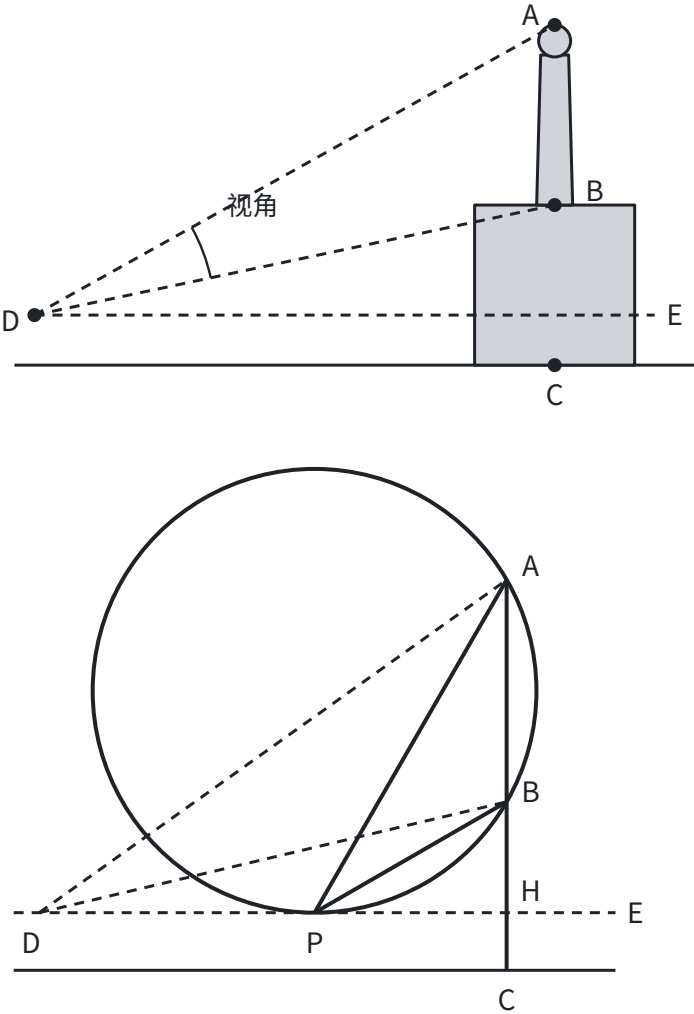


- (1) 请用无刻度的直尺和圆规作 $\angle ECM$ ，使 $\angle ECM = \angle A$ ，且射线 CM 交 BE 于点 F （保留作图痕迹，不写作法）。
- (2) 证明（1）中得到的四边形 $CDBF$ 是菱形。

第 20 题

如图 1，塑像 AB 在底座 BC 上，点 D 是人眼所在的位置。当点 B 高于人的水平视线 DE 时，由远及近看塑像，会在

某处感觉看到的塑像最大，此时视角最大。数学家研究发现：当经过 A, B 两点的圆与水平视线 DE 相切时（如图 2），在切点 P 处感觉看到的塑像最大，此时 $\angle APB$ 为最大视角。



- (1) 请仅就图 2 的情形证明 $\angle APB > \angle ADB$ 。
- (2) 经测量，最大视角 $\angle APB$ 为 30° ，在点 P 处看塑像顶部点 A 的仰角 $\angle APE$ 为 60° ，点 P 到塑像的水平距离 PH 为 6 m。求塑像 AB 的高（结果精确到 0.1 m。参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）。

第 21 题

为响应“全民植树增绿，共建美丽中国”的号召，学校组织学生到郊外参加义务植树活动，并准备了 A, B 两种食品作为午餐。这两种食品每包质量均为 50 g，营养成分表如下。

A 营养成分表：

项目	每 50 g
热量	700 kJ
蛋白质	10 g
脂肪	5.3 g
碳水化合物	28.7 g
钠	205 mg

B 营养成分表：

项目	每 50 g
热量	900 kJ
蛋白质	15 g
脂肪	18.2 g
碳水化合物	6.3 g
钠	236 mg

- (1) 若要从这两种食品中摄入 4 600 kJ 热量和 70 g 蛋白质，应选用 A，B 两种食品各多少包？
- (2) 运动量大的人或青少年对蛋白质的摄入量应更多。若每份午餐选用这两种食品共 7 包，要使每份午餐中的蛋白质含量不低于 90 g，且热量最低，应如何选用这两种食品？

第 22 题

从地面竖直向上发射的物体离地面的高度 h (m) 满足关系式 $h = -5t^2 + v_0t$ ，其中 t (s) 是物体运动的时间， v_0 (m/s) 是物体被发射时的速度。社团活动时，科学小组在实验楼前从地面竖直向上发射小球。

- (1) 小球被发射后 ____ s 时离地面的高度最大（用含 v_0 的式子表示）。
- (2) 若小球离地面的最大高度为 20 m，求小球被发射时的速度。
- (3) 按 (2) 中的速度发射小球，小球离地面的高度有两次与实验楼的高度相同。小明说：“这两次间隔的时间为 3 s。” 已知实验楼高 15 m，请判断他的说法是否正确，并说明理由。

第 23 题

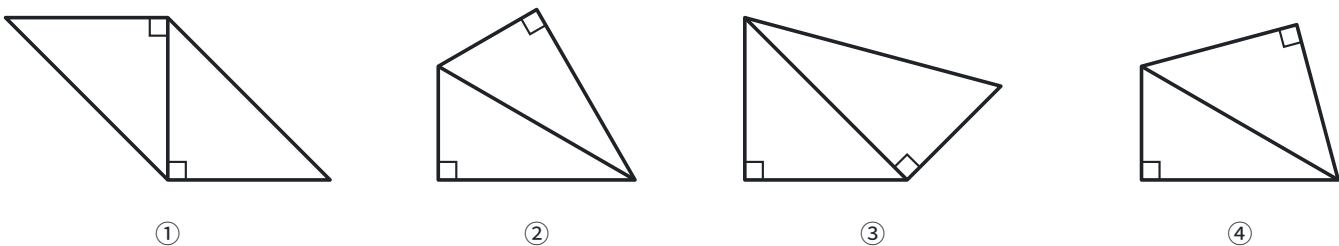
综合与实践

在学习特殊四边形的过程中，我们积累了一定的研究经验。请运用已有经验，对“邻等对补四边形”进行研究。

定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形。

- (1) 操作判断

用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图 1 所示的 4 个四边形，其中是邻等对补四边形的有 ____（填序号）。



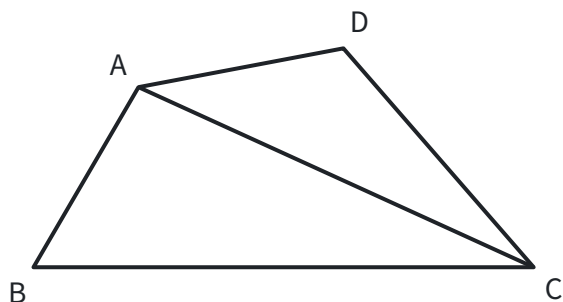
(2) 性质探究

根据定义可得出邻等对补四边形的边、角的性质。下面研究与对角线相关的性质。

如图 2，四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形， $AB = AD$ ， AC 是它的一条对角线。

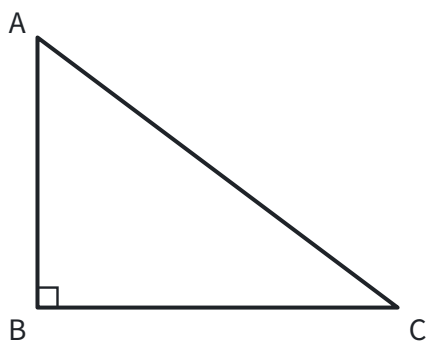
① 写出图中相等的角，并说明理由；

② 若 $BC = m$ ， $DC = n$ ， $\angle BCD = 2\theta$ ，求 AC 的长（用含 m ， n ， θ 的式子表示）。



(3) 拓展应用

如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，分别在边 BC ， AC 上取点 M ， N ，使四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形。当该邻等对补四边形仅有一组邻边相等时，请直接写出 BN 的长。



参考答案与思路

第 1 题 答案：A **思路：**数轴上的点和数一一对应。点 P 在原点左边，和原点隔一个单位长度，表示的数是 -1 。

第 2 题 答案：C **思路：**先把“亿”换成数： $1 \text{ 亿} = 10^8$ ，所以 $5\,784 \text{ 亿} = 5784 \times 10^8 = 5.784 \times 10^3 \times 10^8 = 5.784 \times 10^{11}$ 。科学记数法要求 $a \times 10^n$ 中 $1 \leq |a| < 10$ ，A、D 的 a 都不在这个范围内。

第 3 题 答案：B **思路：**两地的“正北”方向都是竖直向上的，所以两条指北的直线互相平行。连接甲、乙的线段是它们的截线， 50° 的角和 $\angle 1$ 是内错角，两直线平行，内错角相等，所以 $\angle 1 = 50^\circ$ 。

第 4 题 答案：A **思路：**包装盒是正六棱柱，主视图是从正面（箭头方向）看到的图形。正面对着我们的是一个侧面，左右两边各有一个斜着的侧面，看过去被压窄了，所以是一个矩形被两条竖线分成三块，中间宽、两边窄。六边形 D 是从上面看到的俯视图。

第 5 题 答案：A **思路：**先解 $-x > 1$ ：两边同乘 -1 ，不等号改变方向，得 $x < -1$ 。不等式组无解，就是两个解集在数轴上没有公共部分。 $x < -1$ 和 $x > 2$ 一个在 -1 左边、一个在 2 右边，没有重叠；B、C、D 都和 $x < -1$ 有公共部分。

第 6 题 答案：B **思路：**平行四边形的对角线互相平分， O 是 AC 的中点， E 又是 OC 的中点，所以 $CE = (1/4)CA$ 。 $EF \parallel AB$ ，得 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ，对应边成比例： $EF = (1/4)AB = 1$ 。

第 7 题 答案：D **思路：**括号里是 a 个 a 相乘，按乘方的定义就是 a^a 。再用幂的乘方法则“底数不变，指数相乘”： $(a^a)^3 = a^{3a}$ 。这里指数本身是字母，只要回到乘方的定义就不会被它迷惑。

第 8 题 答案：D **思路：**“放回”说明两次抽取互不影响，每次都有 3 种等可能的结果。列表或画树状图，共 $3 \times 3 = 9$ 种等可能的结果，其中两次相同的有 3 种，所以概率是 $3/9 = 1/3$ 。

第 9 题 答案：C **思路：**阴影是以 D 为圆心、 BD 为半径的扇形，要求出半径和圆心角。 $\angle BAC = 60^\circ$ ，所以 BC 所对的圆心角是 120° ， D 是它的中点， $\angle BOD = 60^\circ$ ， $\triangle OBD$ 是等边三角形， $BD = OB$ 。 OB 是外接圆半径：等边三角形的外心也是重心，在高上且到顶点的距离是高的 $2/3$ ，高为 $4\sqrt{3} \times \sqrt{3}/2 = 6$ ，所以 $OB = 4$ 。圆内接四边形 $ABDC$ 的对角互补， $\angle BDC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。所以阴影面积为

$$\frac{120\pi \times 4^2}{360} = \frac{16\pi}{3}.$$

第 10 题 答案：C **思路：**逐项读图。A 直接从图 1 读出。图 2 从左往右一直上升，B 对。把两张图接起来： P 越大 I 越大， I 越大 Q 越多，D 对。图 2 是一条越来越陡的曲线，不是直线，说明 I 每增加 1 A ， Q 的增加量越来越大；增加量相同的只有一次函数（直线），C 错。

第 11 题 答案： m （答案不唯一） **思路：**同类项要求所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，系数可以不同。 $2m$ 只含字母 m ，指数是 1，所以 m 、 $-3m$ 、 $(1/2)m$ 都可以。

第 12 题 答案：9 **思路：**众数是一组数据中出现次数最多的数据。条形图的横轴是得分，纵轴是班数，最高的条形对应 9 分（13 个班），所以众数是 9 分。注意众数是得分 9，而不是班数 13。

第 13 题 答案： $1/2$ **思路：**一元二次方程有两个相等的实数根，就是判别式等于 0： $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1/2 \times c = 1 - 2c = 0$ ，得 $c = 1/2$ 。

第 14 题 答案：(3, 10) **思路：**折叠是轴对称，折叠前后对应线段相等： $BF = BC$ ， $EF = EC$ 。设正方形边长为

a ，则 $B(a-2, 0)$ 。在 $\text{Rt}\triangle BOF$ 中， $BF^2 = (a-2)^2 + 6^2$ ，又 $BF = a$ ，得 $a = 10$ ，所以 $C(8, 10)$ 。设 $E(x, 10)$ ，则 $EC = 8 - x$ ， $EF^2 = x^2 + (10 - 6)^2$ ，由 $EF = EC$ 得 $(8 - x)^2 = x^2 + 16$ ， $x = 3$ 。两次都是“折叠给等长，勾股定理列方程”。

第 15 题 答案： $2\sqrt{2} + 1$ ； $2\sqrt{2} - 1$ **思路：** 点 D 在以 C 为圆心、1 为半径的圆上运动。 $\angle AEB = \angle ACB = 90^\circ$ ，所以 E 、 C 都在以 AB 为直径的圆上， $AE = AB\cos\angle BAE$ ， $\angle BAE$ 越小 AE 越大。 $\angle BAE = 45^\circ \pm \angle CAD$ ，而 $\angle CAD$ 在 AD 与 $\odot C$ 相切时最大（见第九部分“与圆有关的位置关系”），所以最大值、最小值都出现在相切的时候。相切时 $CD \perp AD$ ， $AD = \sqrt{(3^2 - 1^2)} = 2\sqrt{2}$ ； $\angle AEC$ 和 $\angle ABC$ 都是 AC 所对的圆周角，相等或互补，由此可得 $\angle CED = 45^\circ$ ，所以 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形， $DE = CD = 1$ 。 E 在 D 外侧时 $AE = AD + DE = 2\sqrt{2} + 1$ ， E 在 A 、 D 之间时 $AE = AD - DE = 2\sqrt{2} - 1$ 。

第 16 题 答案： (1) 原式 $= 10 - 1 = 9$ 。

(2)

$$\text{原式} = \frac{a+1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a+1} = a+2.$$

思路： (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$ ； $1 - \sqrt{3} \neq 0$ ，它的 0 次幂等于 1。(2) 先把括号里通分： $3/(a-2) + 1 = (3+a-2)/(a-2) = (a+1)/(a-2)$ ；除以一个分式等于乘它的倒数，再把 $a^2 - 4$ 分解成 $(a+2)(a-2)$ ，约去公因式。

第 17 题 答案： (1) 甲；29。

(2) 因为甲的平均每场得分大于乙的平均每场得分，且甲的得分更稳定，所以甲队员表现更好。（答案不唯一，合理即可）

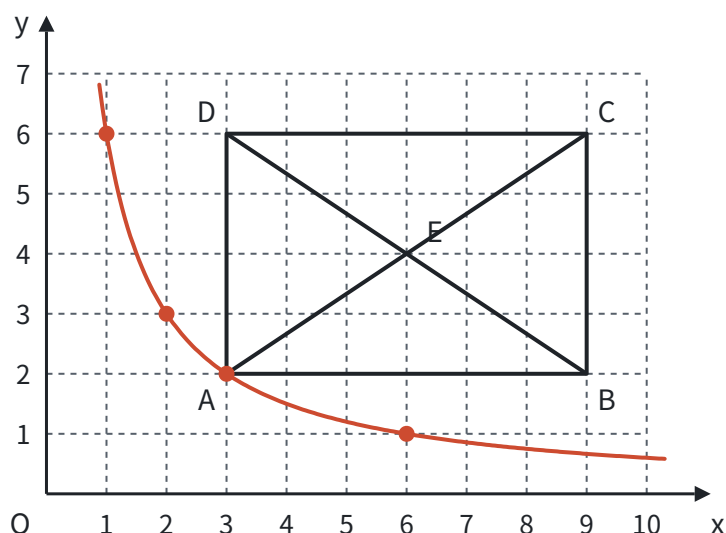
(3) 甲的综合得分为 $26.5 \times 1 + 8 \times 1.5 + 2 \times (-1) = 36.5$ ，乙的综合得分为 $26 \times 1 + 10 \times 1.5 + 3 \times (-1) = 38$ 。因为 $38 > 36.5$ ，所以乙队员表现更好。

思路： (1) 稳定性看数据的波动：甲的折线在 24 到 28 之间小幅起伏，乙从 14 升到 32，波动大，所以甲更稳定。乙的六场得分从小到大是 14，20，28，30，32，32，偶数个数据取中间两个的平均数， $(28 + 30)/2 = 29$ 。

(2) 比较两组数据，平均数看整体水平，方差看稳定性。(3) 综合得分就是加权平均的想法，按规定的权重代入计算；失误的权重是 -1 ，失误越多得分越低。评价标准变了，结论也可能变。

第 18 题 答案： (1) 由图知 $A(3, 2)$ 。因为反比例函数 $y = k/x$ 的图象经过点 A ，所以 $2 = k/3$ ， $k = 6$ ，这个反比例函数的表达式为 $y = 6/x$ 。

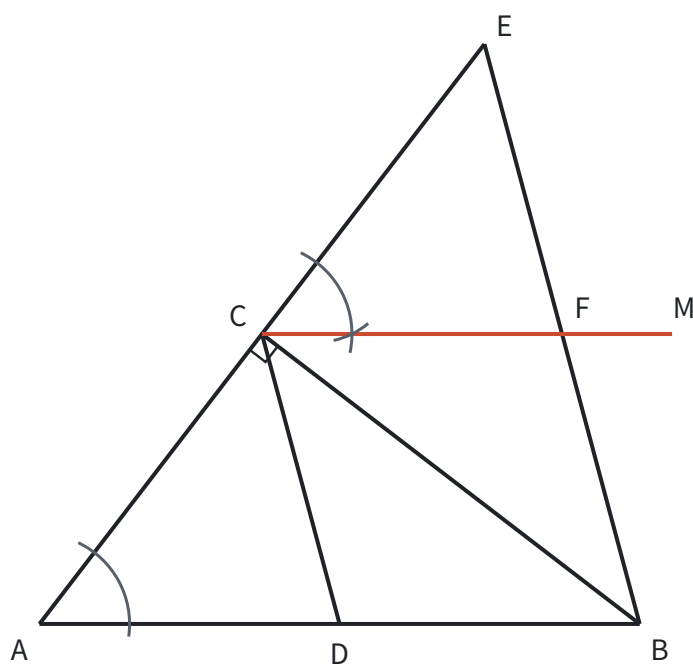
(2) 描出格点 $(1, 6)$ ， $(2, 3)$ ， $(6, 1)$ ，用光滑的曲线连接，图象如图。



(3) $9/2$

思路： (1) 待定系数法，一个点就能定出 k 。(2) 图象上的格点，横、纵坐标都是整数且乘积为 6， $x > 0$ 时只有 $(1, 6)$ ， $(2, 3)$ ， $(3, 2)$ ， $(6, 1)$ 。(3) 向左平移，纵坐标不变。 $E(6, 4)$ ，平移后纵坐标仍是 4，在图象上时 $x = 6/4 = 3/2$ ，所以平移的距离是 $6 - 3/2 = 9/2$ 。

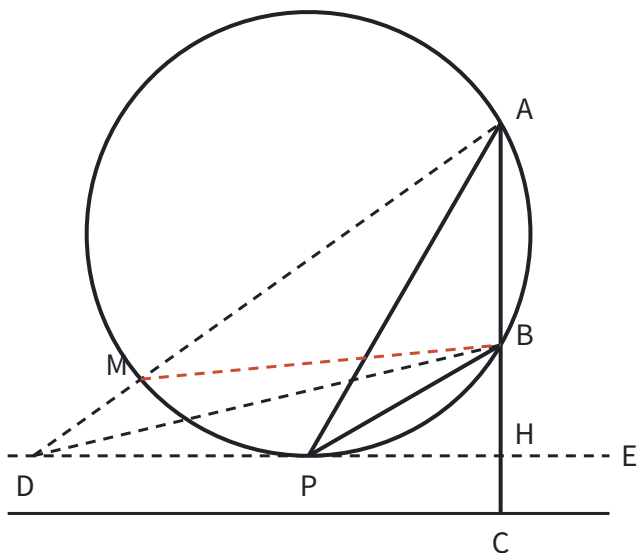
第 19 题 答案： (1) 如图。



(2) 由 (1) 得 $\angle ECF = \angle A$ ，所以 $CF \parallel AB$ 。又因为 $BE \parallel DC$ ，所以四边形 $CDBF$ 是平行四边形。因为 CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，所以 $CD = BD$ 。所以 $\square CDBF$ 是菱形。

思路： (1) 按“作一个角等于已知角”，以 CE 为一边在点 C 处复制 $\angle A$ （见第五部分“尺规作图”）。(2) $\angle ECF$ 和 $\angle A$ 是同位角，同位角相等，所以 $CF \parallel AB$ ，两组对边分别平行，先得到平行四边形；再找一组邻边相等：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半， $CD = BD = (1/2)AB$ 。

第 20 题 答案： (1) 如图，设 AD 与圆交于点 M ，连接 BM 。则 $\angle AMB = \angle APB$ 。因为 $\angle AMB$ 是 $\triangle BMD$ 的外角，所以 $\angle AMB > \angle ADB$ ，所以 $\angle APB > \angle ADB$ 。



(2) 在 $\text{Rt}\triangle AHP$ 中, $\angle APH = 60^\circ$, $PH = 6$, 所以 $AH = PH \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$ 。因为 $\angle APB = 30^\circ$, 所以 $\angle BPH = \angle APH - \angle APB = 30^\circ$ 。在 $\text{Rt}\triangle BHP$ 中, $BH = PH \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$ 。所以

$$AB = AH - BH = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 4 \times 1.73 \approx 6.9 \text{ (m)} .$$

答: 塑像 AB 的高约为 6.9 m。

思路: (1) $\angle APB$ 的顶点在圆上, $\angle ADB$ 的顶点在圆外, 要比较它们, 就在圆上找一个和 $\angle APB$ 相等、又能和 $\angle ADB$ 放进同一个三角形的角: AD 与圆的交点 M 处的 $\angle AMB$ 和 $\angle APB$ 是同弧所对的圆周角, 而它又是 $\triangle BMD$ 的外角, 大于不相邻的内角 $\angle ADB$ 。(2) A 、 B 、 H 在同一条竖直线上, $AB = AH - BH$, 两段分别在两个有公共直角边 PH 的直角三角形里, 用正切求出。

第 21 题 答案: (1) 设选用 A 种食品 x 包, B 种食品 y 包。根据题意, 得

$$\begin{cases} 700x + 900y = 4600, \\ 10x + 15y = 70. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

答: 选用 A 种食品 4 包, B 种食品 2 包。

(2) 设选用 A 种食品 a 包, 则选用 B 种食品 $(7 - a)$ 包。根据题意, 得 $10a + 15(7 - a) \geq 90$, 解得 $a \leq 3$ 。

设总热量为 w kJ, 则 $w = 700a + 900(7 - a) = -200a + 6300$ 。因为 $-200 < 0$, 所以 w 随 a 的增大而减小。所以当 $a = 3$ 时, w 最小, 此时 $7 - a = 4$ 。

答: 选用 A 种食品 3 包, B 种食品 4 包。

思路: (1) 两个未知数, 题目给了热量、蛋白质两个相等关系, 列二元一次方程组。(2) “不低于”是不等关系, 列不等式得出 a 的范围; “热量最低”是求最值, 把热量写成 a 的一次函数, 用增减性在范围的端点取最小值(见第七部分“一次函数”)。

第 22 题 答案: (1) $v_0/10$

(2) 根据题意, 当 $t = v_0/10$ 时, $h = 20$, 所以

$$-5 \times \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{10} = 20,$$

解得 $v_0 = 20$ (负值舍去)。即小球被发射时的速度是 20 m/s。

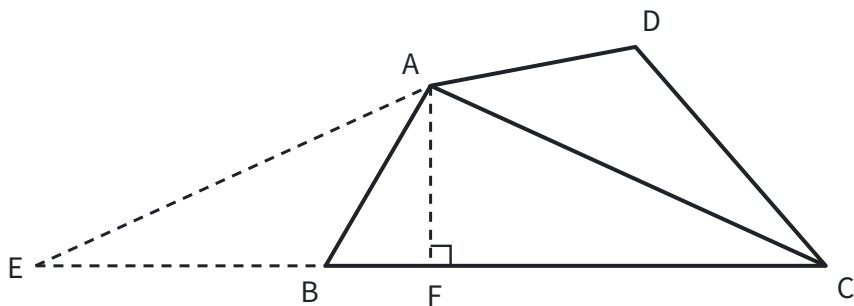
(3) 小明的说法不正确。理由如下：由 (2) 得 $h = -5t^2 + 20t$ 。当 $h = 15$ 时， $15 = -5t^2 + 20t$ ，解得 $t_1 = 1$ ， $t_2 = 3$ 。 $3 - 1 = 2$ (s)，所以两次间隔的时间为 2 s，小明的说法不正确。

思路： (1) h 是 t 的二次函数，二次项系数 $-5 < 0$ ，开口向下，顶点处最高，顶点横坐标是 $t = -v_0/(2 \times (-5)) = v_0/10$ 。(2) 把顶点代入，得 $v_0^2/20 = 20$ 。(3) “高度等于 15 m” 就是函数值等于 15，把函数问题转化成一元二次方程，两个根就是两次到达的时刻，间隔是两根之差。

第 23 题 答案： (1) ②④

(2) ① $\angle ACD = \angle ACB$ 。理由如下：

如图，延长 CB 至点 E ，使 $BE = DC$ ，连接 AE 。因为四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形，所以 $\angle ABC + \angle D = 180^\circ$ 。又因为 $\angle ABC + \angle ABE = 180^\circ$ ，所以 $\angle ABE = \angle D$ 。又 $AB = AD$ ，所以 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS)，所以 $\angle E = \angle ACD$ ， $AE = AC$ ，所以 $\angle E = \angle ACB$ ，所以 $\angle ACD = \angle ACB$ 。



② 过点 A 作 $AF \perp EC$ ，垂足为点 F 。因为 $AE = AC$ ，所以

$$CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(BC + BE) = \frac{1}{2}(BC + DC) = \frac{m+n}{2}.$$

因为 $\angle BCD = 2\theta$ ，所以 $\angle ACB = \angle ACD = \theta$ 。在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中， $\cos\theta = CF/(AC)$ ，所以

$$AC = \frac{CF}{\cos\theta} = \frac{m+n}{2\cos\theta}.$$

(3) $12\sqrt{2}/5$ 或 $12\sqrt{2}/7$

思路： (1) 逐个检查定义的两个条件。① 是平行四边形，对角相等而不互补；③ 的两组对角都不互补。② 和 ④ 中，两个直角顶点相对，对角互补；② 是两个全等的含 30° 角的三角形拼成，④ 上面是等腰直角三角形，都有一组邻边相等。

(2) 要证的两个角 $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 分在对角线两侧，条件 $AB = AD$ 也分在两侧。“对角互补”提示把 $\angle D$ 搬到 $\angle ABC$ 的邻补角上：延长 CB 构造和 $\triangle ADC$ 全等的三角形，把分散的条件集中到等腰三角形 AEC 里（见第十一部分“辅助线从哪里来”）。于是 AC 平分 $\angle BCD$ ，求 AC 就在等腰三角形里作底边上的高，用余弦（见第八部分“锐角三角函数”）。

(3) $\angle B = 90^\circ$ ，对角互补要求 $\angle MNA = 90^\circ$ ，即 $MN \perp AC$ 。四组邻边中，若 $BM = MN$ 或 $NA = AB$ ，由 HL 可得 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM$ ，两组邻边同时相等，不合题意，所以只能是 $AB = BM$ 或 $MN = NA$ ，分两种情况计算。两种情况都是先求出 CN ，再以 B 为原点、 BC 为 x 轴、 BA 为 y 轴建立坐标系，由 $C(4, 0)$ 沿 CA 方向走 CN 得到点 N 的坐标，再算 BN 。 $AB = BM = 3$ 时， $CM = 1$ ， N 是 M 在 AC 上的垂足， $CN = CM\cos C = 4/5$ ，得 $N(84/25, 12/25)$ ，

$BN = 12\sqrt{2}/5$ ；这时 $MN = 3/5$ ， $NA = 21/5$ ，确实只有一组邻边相等。 $MN = NA$ 时，设 $NA = t$ ，则 $CN = 5 - t$ ，由 $\tan C = MN/(CN) = 3/4$ 得 $t = (3/4)(5 - t)$ ， $t = 15/7$ ， $CN = 20/7$ ，得 $N(12/7, 12/7)$ ， $BN = 12\sqrt{2}/7$ ；这时 $CM = CN/(\cos C) = 25/7 < 4$ ， M 在边 BC 上， $BM = 3/7$ ，也只有一组邻边相等。