

2022 年河南中考数学

河南省 2022 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

初中数学的自然原理 · 附录

试卷

河南省 2022 年普通高中招生考试数学试卷，共 23 题，满分 120 分，考试时间 100 分钟。

第 1 题

$-1/2$ 的相反数是

- A. $1/2$ B. 2 C. -2 D. $-1/2$

第 2 题

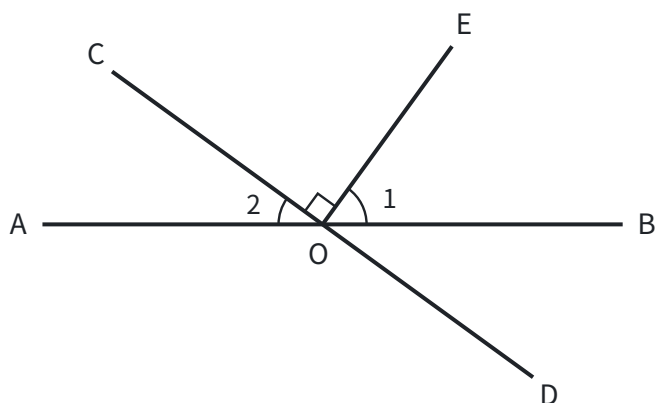
2022 年北京冬奥会的奖牌“同心”表达了“天地合·人心同”的中华文化内涵。将这六个汉字分别写在某正方体的表面上，如图是它的一种展开图，则在原正方体中，与“地”字所在面相对的面上的汉字是



- A. 合 B. 同 C. 心 D. 人

第 3 题

如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ， $EO \perp CD$ ，垂足为 O 。若 $\angle 1 = 54^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为



- A. 26° B. 36° C. 44° D. 54°

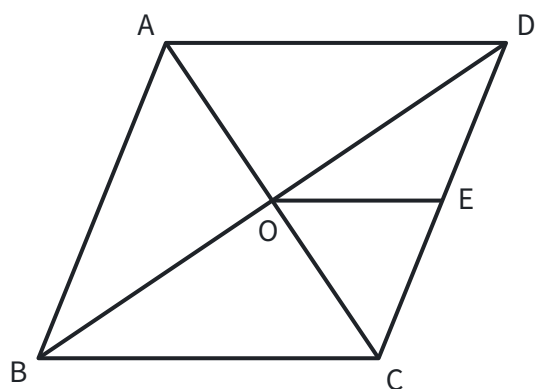
第 4 题

下列运算正确的是

- A. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ B. $(a+1)^2 = a^2 + 1$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $2a^2 \cdot a = 2a^3$

第 5 题

如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 为 CD 的中点。若 $OE = 3$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长为



- A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

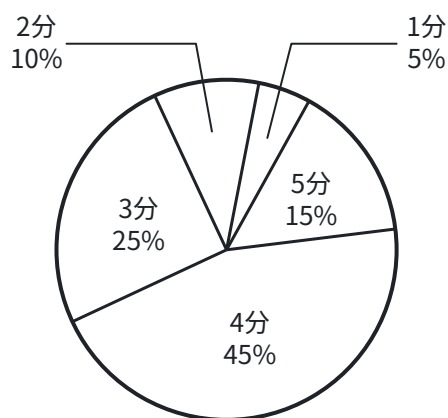
第 6 题

一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根的情况是

- A. 有两个不相等的实数根 B. 没有实数根
C. 有两个相等的实数根 D. 只有一个实数根

第 7 题

如图所示的扇形统计图描述了某校学生对课后延时服务的打分情况（满分 5 分），则所打分数的众数为



- A. 5 分 B. 4 分 C. 3 分 D. 45%

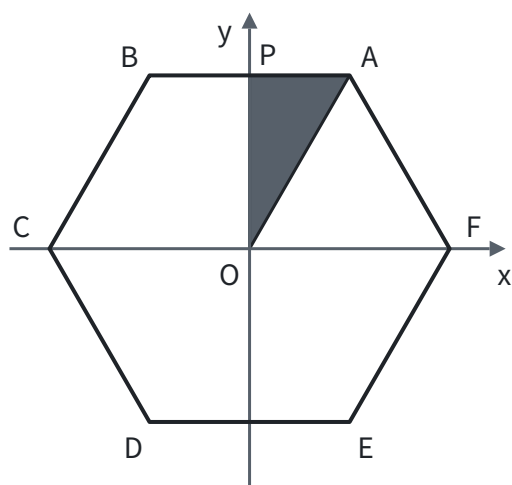
第 8 题

《孙子算经》中记载：“凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆。”说明了大数之间的关系：1 亿 = $1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万}$ ，1 兆 = $1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 亿}$ 。则 1 兆等于

- A. 10^8 B. 10^{12} C. 10^{16} D. 10^{24}

第 9 题

如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 的中心与原点 O 重合， $AB \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 P 。将 $\triangle OAP$ 绕点 O 顺时针旋转，每次旋转 90° ，则第 2022 次旋转结束时，点 A 的坐标为

A. $(\sqrt{3}, -1)$ B. $(-1, -\sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{3}, -1)$ D. $(1, \sqrt{3})$

第 10 题

呼气式酒精测试仪中装有酒精气体传感器，可用于检测驾驶员是否酒后驾车。酒精气体传感器是一种气敏电阻（图 1 中的 R_1 ）， R_1 的阻值随呼气酒精浓度 K 的变化而变化（如图 2），血液酒精浓度 M 与呼气酒精浓度 K 的关系见图 3。下列说法 **不正确** 的是

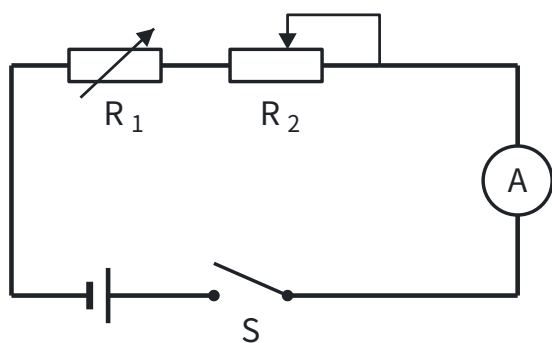


图 1

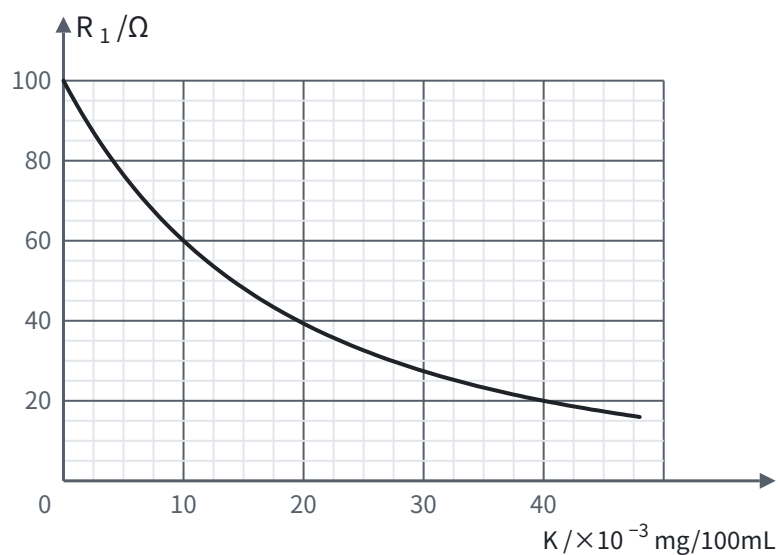


图 2

信息窗

$$M = 2200 \times K \times 10^{-3} \text{ mg/100mL}$$

(M 为血液酒精浓度, K 为呼气酒精浓度)

非酒驾 ($M < 20 \text{ mg/100mL}$)

酒驾 ($20 \text{ mg/100mL} \leq M \leq 80 \text{ mg/100mL}$)

醉驾 ($M > 80 \text{ mg/100mL}$)

图 3

- A. 呼气酒精浓度 K 越大, R_1 的阻值越小
 B. 当 $K = 0$ 时, R_1 的阻值为 100
 C. 当 $K = 10$ 时, 该驾驶员为非酒驾状态
 D. 当 $R_1 = 20$ 时, 该驾驶员为醉驾状态

第 11 题

请写出一个 y 随 x 的增大而增大的一次函数的表达式: _____。

第 12 题

不等式组

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0, \\ \frac{x}{2} > 1 \end{cases}$$

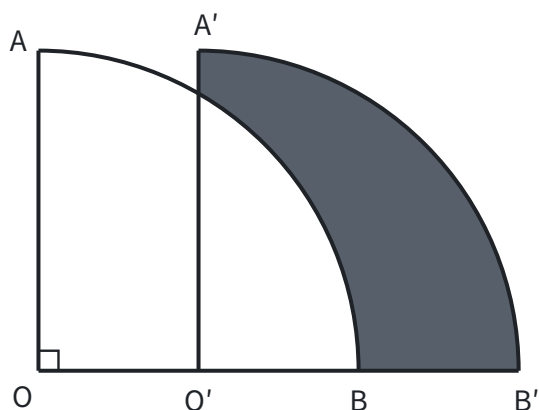
的解集为_____。

第 13 题

为开展“喜迎二十大、永远跟党走、奋进新征程”主题教育宣讲活动, 某单位从甲、乙、丙、丁四名宣讲员中随机选取两名进行宣讲, 则恰好选中甲和丙的概率为_____。

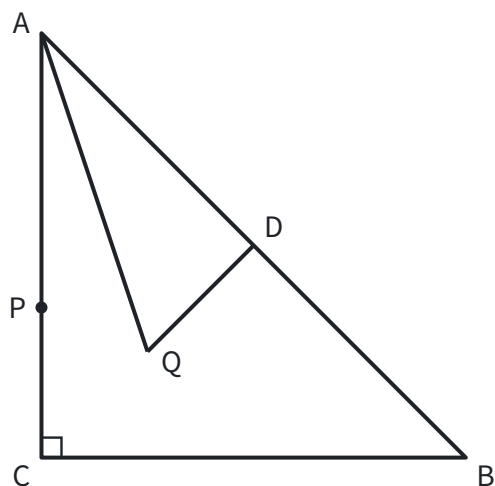
第 14 题

如图，将扇形 AOB 沿 OB 方向平移，使点 O 移到 OB 的中点 O' 处，得到扇形 $A'O'B'$ 。若 $\angle O = 90^\circ$ ， $OA = 2$ ，则阴影部分的面积为_____。



第 15 题

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，点 D 为 AB 的中点，点 P 在 AC 上，且 $CP = 1$ ，将 CP 绕点 C 在平面内旋转，点 P 的对应点为点 Q ，连接 AQ ， DQ 。当 $\angle ADQ = 90^\circ$ 时， AQ 的长为_____。



第 16 题

(1) (5 分) 计算： $\sqrt[3]{27} - (1/3)^0 + 2^{-1}$ ；

(2) (5 分) 化简：

$$\frac{x^2 - 1}{x} \div \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

第 17 题

(9 分) 2022 年 3 月 23 日下午，“天宫课堂”第二课在中国空间站开讲，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富相互配合进行授课，这是中国空间站的第二次太空授课，被许多中小学生对称为“最牛网课”。某中学为了解学生对“航空航天知识”的掌握情况，随机抽取 50 名学生进行测试，并对成绩（百分制）进行整理，信息如

下:

a. 成绩频数分布表:

成绩 x (分)	$50 \leq x < 60$	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x \leq 100$
频数	7	9	12	16	6

b. 成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的是 (单位: 分):

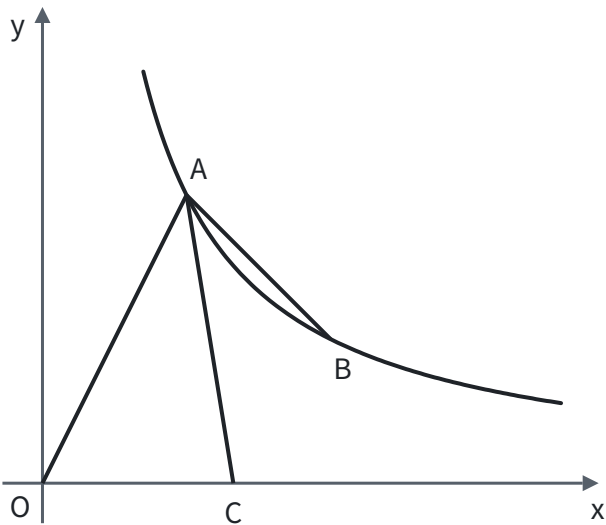
70 71 72 72 74 77 78 78 78 79 79 79

根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 在这次测试中, 成绩的中位数是____分, 成绩不低于 80 分的人数占测试人数的百分比为_____。
- (2) 这次测试成绩的平均数是 76.4 分, 甲的测试成绩是 77 分。乙说: “甲的成绩高于平均数, 所以甲的成绩高于一半学生的成绩。” 你认为乙的说法正确吗? 请说明理由。
- (3) 请对该校学生 “航空航天知识” 的掌握情况作出合理的评价。

第 18 题

(9 分) 如图, 反比例函数 $y = k/x$ ($x > 0$) 的图象经过点 $A(2, 4)$ 和点 B , 点 B 在点 A 的下方, AC 平分 $\angle OAB$, 交 x 轴于点 C 。

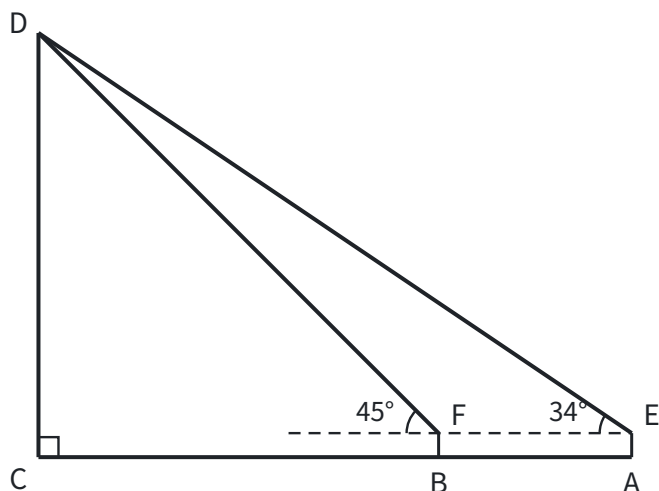


- (1) 求反比例函数的表达式。
- (2) 请用无刻度的直尺和圆规作出线段 AC 的垂直平分线。(要求: 不写作法, 保留作图痕迹, 使用 2B 铅笔作图)
- (3) 线段 OA 与 (2) 中所作的垂直平分线相交于点 D , 连接 CD 。求证: $CD \parallel AB$ 。

第 19 题

(9 分) 开封清明上河园是依照北宋著名画家张择端的《清明上河图》建造的, 拂云阁是园内最高的建筑。某数学小组测量拂云阁 DC 的高度, 如图, 在 A 处用测角仪测得拂云阁顶端 D 的仰角为 34° , 沿 AC 方向前进 15 m 到达 B

处，又测得拂云阁顶端 D 的仰角为 45° 。已知测角仪的高度为 1.5 m ，测量点 A, B 与拂云阁 DC 的底部 C 在同一水平线上，求拂云阁 DC 的高度（结果精确到 1 m 。参考数据： $\sin 34^\circ \approx 0.56$ ， $\cos 34^\circ \approx 0.83$ ， $\tan 34^\circ \approx 0.67$ ）。



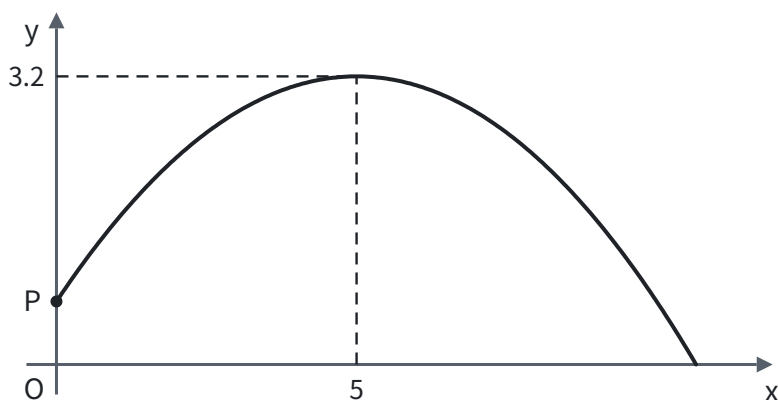
第 20 题

（9 分）近日，教育部印发《义务教育课程方案》和课程标准（2022 年版），将劳动从原来的综合实践活动课程中独立出来。某中学为了让学生体验农耕劳动，开辟了一处耕种园，需要采购一批菜苗开展种植活动。据了解，市场上每捆 A 种菜苗的价格是菜苗基地的 $\frac{5}{4}$ 倍，用 300 元在市场上购买的 A 种菜苗比在菜苗基地购买的少 3 捆。

- （1）求菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格。
- （2）菜苗基地每捆 B 种菜苗的价格是 30 元。学校决定在菜苗基地购买 A, B 两种菜苗共 100 捆，且 A 种菜苗的捆数不超过 B 种菜苗的捆数。菜苗基地为支持该校活动，对 A, B 两种菜苗均提供九折优惠。求本次购买最少花费多少钱。

第 21 题

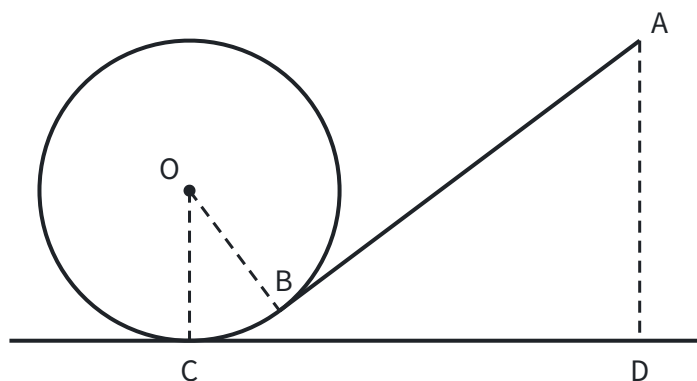
（9 分）小红看到一处喷水景观，喷出的水柱呈抛物线形状，她对此展开研究：测得喷水头 P 距地面 0.7 m ，水柱在距喷水头 P 水平距离 5 m 处达到最高，最高点距地面 3.2 m ；建立如图所示的平面直角坐标系，并设抛物线的表达式为 $y = a(x - h)^2 + k$ ，其中 x （m）是水柱距喷水头的水平距离， y （m）是水柱距地面的高度。



- （1）求抛物线的表达式。
- （2）爸爸站在水柱正下方，且距喷水头 P 水平距离 3 m 。身高 1.6 m 的小红在水柱下方走动，当她的头顶恰好接触到水柱时，求她与爸爸的水平距离。

第 22 题

(10 分) 为弘扬民族传统体育文化, 某校将传统游戏“滚铁环”列入了校运动会的比赛项目。滚铁环器材由铁环和推杆组成。小明对滚铁环的启动阶段进行了研究, 如图, 滚铁环时, 铁环 $\odot O$ 与水平地面相切于点 C , 推杆 AB 与铅垂线 AD 的夹角为 $\angle BAD$, 点 O, A, B, C, D 在同一平面内。当推杆 AB 与铁环 $\odot O$ 相切于点 B 时, 手上的力量通过切点 B 传递到铁环上, 会有较好的启动效果。



(1) 求证: $\angle BOC + \angle BAD = 90^\circ$ 。

(2) 实践中发现, 切点 B 只有在铁环上一定区域内时, 才能保证铁环平稳启动。图中点 B 是该区域内最低位置, 此时点 A 距地面的距离 AD 最小, 测得 $\cos \angle BAD = 3/5$ 。已知铁环 $\odot O$ 的半径为 25 cm, 推杆 AB 的长为 75 cm, 求此时 AD 的长。

第 23 题

(10 分) 综合与实践

综合与实践课上, 老师让同学们以“矩形的折叠”为主题开展数学活动。

(1) 操作判断

操作一: 对折矩形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF , 把纸片展平;

操作二: 在 AD 上选一点 P , 沿 BP 折叠, 使点 A 落在矩形内部点 M 处, 把纸片展平, 连接 PM, BM 。

根据以上操作, 当点 M 在 EF 上时, 写出图 1 中一个 30° 的角: _____。

(2) 迁移探究

小华将矩形纸片换成正方形纸片, 继续探究, 过程如下:

将正方形纸片 $ABCD$ 按照 (1) 中的方式操作, 并延长 PM 交 CD 于点 Q , 连接 BQ 。

① 如图 2, 当点 M 在 EF 上时, $\angle MBQ = \text{ }^\circ$, $\angle CBQ = \text{ }^\circ$;

② 改变点 P 在 AD 上的位置 (点 P 不与点 A, D 重合), 如图 3, 判断 $\angle MBQ$ 与 $\angle CBQ$ 的数量关系, 并说明理由。

(3) 拓展应用

在 (2) 的探究中, 已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8 cm, 当 $FQ = 1$ cm 时, 直接写出 AP 的长。

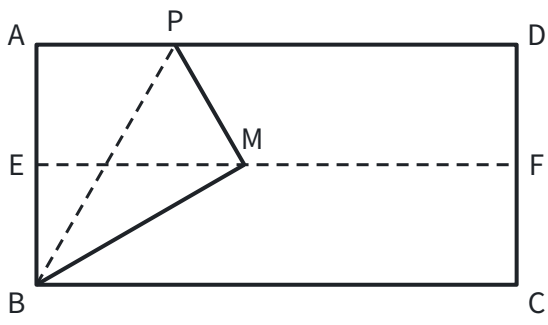


图 1

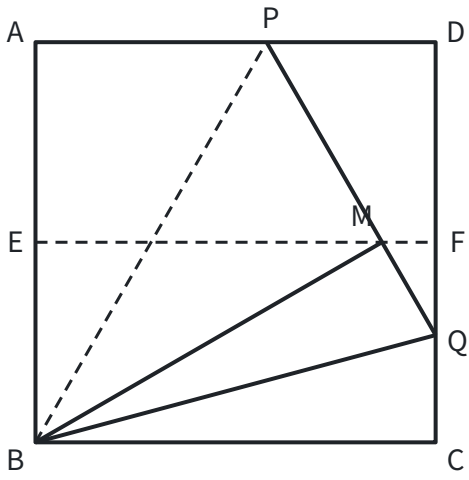


图 2

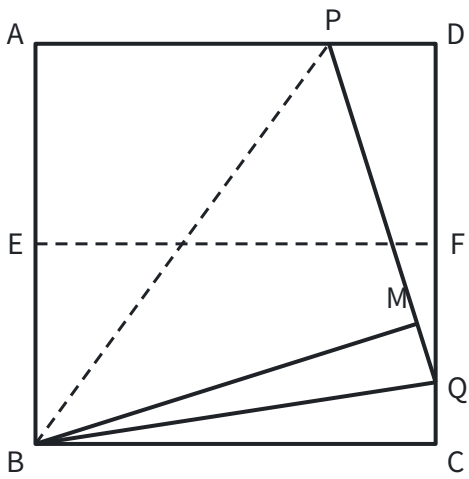


图 3

参考答案与思路

第 1 题 答案：A **思路：**相反数是在数轴上到原点距离相等、位于原点两侧的数，只改符号，不改绝对值。 $-1/2$ 改变符号得 $1/2$ 。注意别和倒数 (-2) 混淆。

第 2 题 答案：D **思路：**展开图里排成一行的三个正方形，中间一个两边折起 90° ，两端的正方形正好面对面，所以一行中隔着一个的两个面相对。“地、合、人”排成一行，“地”和“人”隔着“合”，是相对的面。见第五部分“几何图形初步”。

第 3 题 答案：B **思路：** $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 不相邻，要找一个“中转”的角。 $EO \perp CD$ ，所以 $\angle EOD = 90^\circ$ ， $\angle BOD = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$ ； $\angle 2$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角，所以 $\angle 2 = 36^\circ$ 。

第 4 题 答案：D **思路：**逐个回到定义检查。A: $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，合并同类二次根式只合并系数；B: $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ，漏了中间项；C: 幂的乘方指数相乘， $(a^2)^3 = a^6$ ；D: 单项式相乘，系数相乘、同底数幂指数相加，正确。

第 5 题 答案：C **思路：**看到两个中点就想中位线：菱形的对角线互相平分， O 是 BD 的中点， E 是 CD 的中点，所以 OE 是 $\triangle BCD$ 的中位线， $BC = 2OE = 6$ 。菱形四边相等，周长为 $4 \times 6 = 24$ 。

第 6 题 答案：A **思路：**根的情况由判别式决定。 $a = 1$ ， $b = 1$ ， $c = -1$ ， $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 > 0$ ，所以有两个不相等的实数根。

第 7 题 答案：B **思路：**众数是出现次数最多的那个数据。扇形统计图里占比最大的是“4 分”（45%），所以打 4 分的人最多，众数是 4 分。众数是数据本身，不是它所占的百分比，所以不选 D。

第 8 题 答案：C **思路：**先把每个单位写成 10 的幂： $1 \text{ 万} = 10^4$ ， $1 \text{ 亿} = 10^4 \times 10^4 = 10^8$ 。再用同底数幂相乘、指数相加： $1 \text{ 兆} = 10^4 \times 10^4 \times 10^8 = 10^{16}$ 。

第 9 题 答案：B **思路：**先求点 A 的坐标：正六边形的边长等于半径， $OA = 2$ ； P 是 AB 的中点， $AP = 1$ ， $OP = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$ ，所以 $A(1, \sqrt{3})$ 。再看旋转的周期：每 4 次转满 360° 回到原处， $2022 = 4 \times 505 + 2$ ，相当于只转 2 次，即绕 O 旋转 180° 。绕原点旋转 180° ，横、纵坐标都变成相反数，得 $(-1, -\sqrt{3})$ 。

第 10 题 答案：C **思路：**这是读图题：从图 2 的图象上读出 K 与 R_1 的对应值，再代入图 3 的关系式算出 M 。A、B 直接从图象看出：图象从左往右下降， $K = 0$ 时 $R_1 = 100$ 。C: $K = 10$ 时， $M = 2200 \times 10 \times 10^{-3} = 22$ ，在 20 和 80 之间，是酒驾，所以 C 不正确。D: $R_1 = 20$ 时，从图象读出 $K = 40$ ， $M = 2200 \times 40 \times 10^{-3} = 88 > 80$ ，是醉驾，正确。

第 11 题 答案： $y = x$ (答案不唯一) **思路：**一次函数 $y = kx + b$ 中， x 每增加 1， y 变化 k 。要 y 随 x 增大而增大，只要 $k > 0$ ， b 取什么都可以，比如 $y = x$ 、 $y = 2x + 1$ 。

第 12 题 答案： $2 < x \leq 3$ **思路：**分别解两个不等式，再取公共部分。由 $x - 3 \leq 0$ 得 $x \leq 3$ ；由 $x/2 > 1$ 得 $x > 2$ 。在数轴上两部分重叠的是 $2 < x \leq 3$ 。

第 13 题 答案： $1/6$ **思路：**先把所有等可能的结果不重不漏地列出来。从四人中选两人，共有甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁 6 种结果，每种可能性相同，恰好选中甲和丙的只有 1 种，所以概率为 $1/6$ 。用列表法列出 12 种有序结果、其中 2 种符合，结果相同。

第 14 题 答案： $\pi/3 + \sqrt{3}/2$ **思路：**阴影是不规则图形，用“整体减空白”：阴影 = 扇形 $A'O'B'$ - 两扇形重叠的部分 ($O'A'$ 右侧、弧 AB 下方的部分)。设 $O'A'$ 与弧 AB 交于点 G ，连接 OG 。在 $\text{Rt}\triangle OO'G$ 中， $OO' = 1$ ，

$OG = 2$, 所以 $\angle GOO' = 60^\circ$, $O'G = \sqrt{3}$ 。重叠部分 = 扇形 $GOB - \triangle OO'G$:

$$\frac{60\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

扇形 $A'O'B'$ 的面积是 $(1/4)\pi \times 2^2 = \pi$, 所以阴影面积为

$$\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第 15 题 答案: $\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13}$ **思路:** 先弄清点 Q 在哪里: $CQ = CP = 1$, Q 在以 C 为圆心、1 为半径的圆上。 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, D 是斜边中点, 所以 $CD \perp AB$, $CD = AD = (1/2)AB = 2$ 。 $\angle ADQ = 90^\circ$ 说明 $DQ \perp AB$, 过点 D 垂直于 AB 的直线只有一条, 就是直线 CD , 所以 Q 在直线 CD 上。直线 CD 和圆有两个交点, 要分两种情况:

- Q 在线段 CD 上: $DQ = 2 - 1 = 1$, $AQ = \sqrt{AD^2 + DQ^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$;
- Q 在 DC 的延长线上: $DQ = 2 + 1 = 3$, $AQ = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ 。

第 16 题 答案: (1) 原式 $= 3 - 1 + 1/2 = 5/2$ 。

(2)

$$\text{原式} = \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = x + 1.$$

思路: (1) 三项各用一个规定: $3^3 = 27$, 所以 $\sqrt[3]{27} = 3$; 任何不为 0 的数的 0 次幂是 1; $2^{-1} = 1/2$ 。(2) 先把括号里通分成 $(x-1)/x$, 除法变成乘倒数; 分子 $x^2 - 1$ 因式分解成 $(x+1)(x-1)$, 才能和分母约分。

第 17 题 答案: (1) 78.5, 44%。

(2) 不正确。因为甲的成绩 77 分低于中位数 78.5 分, 所以甲的成绩不可能高于一半学生的成绩。

(3) 测试成绩不低于 80 分的人数占测试人数的 44%, 说明该校学生对“航空航天知识”的掌握情况较好。(答案不唯一, 合理即可)

思路: (1) 50 个数据的中位数是从小到大第 25、26 个数的平均数。前两组共 $7 + 9 = 16$ 人, 所以第 25、26 个数是第三组的第 9、10 个, 即 78 和 79, 中位数是 78.5。不低于 80 分的有 $16 + 6 = 22$ 人, $22 \div 50 = 44\%$ 。

(2) “高于一半学生”要和中位数比, 不是和平均数比: 平均数会被少数很低的分数拉低, 中位数才把数据分成人数相等的两半。

第 18 题 答案: (1) 因为反比例函数 $y = k/x$ 的图象经过点 $A(2, 4)$, 所以 $k = 2 \times 4 = 8$, 反比例函数的表达式为 $y = 8/x$ 。

(2) 分别以 A 、 C 为圆心, 以大于 $(1/2)AC$ 的长为半径画弧, 两弧在 AC 两侧各交于一点, 过这两点画直线, 就是 AC 的垂直平分线。

(3) 因为 AC 平分 $\angle OAB$, 所以 $\angle OAC = \angle BAC$ 。因为 AC 的垂直平分线交 OA 于点 D , 所以 $DA = DC$, $\angle DAC = \angle DCA$ 。所以 $\angle DCA = \angle BAC$, 所以 $CD \parallel AB$ (内错角相等, 两直线平行)。

思路: (2) 到 A 、 C 距离相等的点都在 AC 的垂直平分线上, 所以作两个这样的点, 两点确定一条直线 (见第五部分“尺规作图”)。(3) 要证平行, 就找一对内错角相等: 角平分线给出 $\angle DAC = \angle BAC$, 垂直平分线给出 $DA = DC$, 从而 $\angle DAC = \angle DCA$, 两个等量关系一接, $\angle DCA = \angle BAC$ 。角平分线、平行线、等腰三角形常常一起出现, 知道其中两个就能推出第三个。

第 19 题 答案：延长 EF 交 DC 于点 H ，则 $EH \perp DC$ ， $HC = 1.5$ m。设 $DH = x$ m。

在 $\text{Rt}\triangle DHF$ 中， $\angle DFH = 45^\circ$ ，所以 $FH = DH = x$ 。

在 $\text{Rt}\triangle DHE$ 中， $\angle DEH = 34^\circ$ ，所以 $EH = DH/(\tan 34^\circ) = x/(\tan 34^\circ)$ 。

因为 $EF = 15$ ，所以 $EH - FH = 15$ ，即

$$\frac{x}{\tan 34^\circ} - x = 15.$$

解得 $x \approx 30.5$ 。所以 $DC \approx 30.5 + 1.5 = 32$ 。

答：拂云阁 DC 的高度约为 32 m。

思路：两个仰角各在一个直角三角形里，要把它们放到同一条水平线上：延长 EF 交 DC 于 H ，得到两个共用直角边 DH 的直角三角形。设公共边 $DH = x$ ，用 x 分别表示 FH 和 EH ，它们的差就是已知的 15 m，列方程求 x 。最后别忘了加上测角仪的高度 1.5 m。

第 20 题 答案：（1）设菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 x 元，根据题意，得

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{\frac{5}{4}x} = 3.$$

解得 $x = 20$ 。经检验， $x = 20$ 是原方程的解。

答：菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 20 元。

（2）设购买 A 种菜苗 a 捆，则购买 B 种菜苗 $(100 - a)$ 捆。根据题意，得 $a \leq 100 - a$ ，解得 $a \leq 50$ 。

设本次购买花费 w 元，则

$$w = 20a \times 0.9 + 30(100 - a) \times 0.9 = -9a + 2700.$$

因为 $-9 < 0$ ， w 随 a 的增大而减小，所以当 $a = 50$ 时， w 有最小值 $-450 + 2700 = 2250$ 。

答：本次购买最少花费 2250 元。

思路：（1）等量关系是“捆数差 3”，捆数 = 总价 ÷ 单价，单价是未知数，所以列出的是分式方程，解完要检验。（2）花费随 A 种菜苗的捆数一次变化，写成一次函数 $w = -9a + 2700$ ；A 种便宜，买得越多越省，但受“不超过 B 种”限制， a 最大取 50。求最值的问题，先写出函数，再由不等式定出自变量的范围，在范围的端点取最值。

第 21 题 答案：（1）由题意知，点 $(5, 3.2)$ 是抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ 的顶点，所以 $y = a(x - 5)^2 + 3.2$ 。又因为抛物线经过点 $(0, 0.7)$ ，所以 $0.7 = a(0 - 5)^2 + 3.2$ ，解得 $a = -0.1$ 。所以抛物线的表达式为 $y = -0.1(x - 5)^2 + 3.2$ （或 $y = -0.1x^2 + x + 0.7$ ）。

（2）当 $y = 1.6$ 时， $1.6 = -0.1(x - 5)^2 + 3.2$ ，解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 9$ 。 $3 - 1 = 2$ ， $9 - 3 = 6$ 。

答：小红与爸爸的水平距离为 2 m 或 6 m。

思路：（1）已知最高点，就用顶点式，只剩 a 一个未知数，再代入喷水头 $P(0, 0.7)$ 求 a 。（2）“头顶恰好接触水柱”就是水柱高度等于 1.6 m，已知函数值求自变量，得到对称轴两侧的两个 x ，所以小红有两个位置，分别和爸爸的位置 $x = 3$ 相减。

第 22 题 答案：（1）过点 B 作 $EF \parallel CD$ ，分别交 AD 于点 E ，交 OC 于点 F 。

因为 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C ，所以 $\angle OCD = 90^\circ$ 。因为 $AD \perp CD$ ，所以 $\angle ADC = 90^\circ$ 。因为 $EF \parallel CD$ ，所以 $\angle OFB = \angle AEB = 90^\circ$ 。所以 $\angle BOC + \angle OBF = 90^\circ$ ， $\angle ABE + \angle BAD = 90^\circ$ 。

因为 AB 为 $\odot O$ 的切线，所以 $\angle OBA = 90^\circ$ ， $\angle OBF + \angle ABE = 90^\circ$ 。所以 $\angle OBF = \angle BAD$ ，所以 $\angle BOC + \angle BAD = 90^\circ$ 。

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AB = 75$ ， $\cos \angle BAD = 3/5$ ，所以 $AE = 75 \times 3/5 = 45$ 。

由 (1) 知 $\angle OBF = \angle BAD$ ，所以 $\cos \angle OBF = 3/5$ 。在 $\text{Rt}\triangle OBF$ 中， $OB = 25$ ，所以 $BF = 15$ ， $OF = 20$ 。因为 $OC = 25$ ，所以 $CF = 5$ 。

因为 $\angle OCD = \angle ADC = \angle CFE = 90^\circ$ ，所以四边形 $CDEF$ 为矩形， $DE = CF = 5$ 。所以 $AD = AE + ED = 50 \text{ cm}$ 。

思路： (1) 题目里有两个“切”：地面切圆于 C 得 $OC \perp CD$ ，推杆切圆于 B 得 $OB \perp AB$ 。再加上 AD 铅垂，全是直角，过 B 画一条水平线，就能把 $\angle BOC$ 和 $\angle BAD$ 分别放进两个直角三角形里，用“同角的余角相等”连起来。

(2) AD 被水平线 EF 分成两段：上段 AE 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 里直接用余弦算；下段 $ED = CF = OC - OF$ ，而 OF 要在 $\text{Rt}\triangle OBF$ 里算，这里正好用上 (1) 的结论 $\angle OBF = \angle BAD$ 。

第 23 题 答案： (1) $\angle ABP$ 或 $\angle PBM$ 或 $\angle MBC$ 或 $\angle BME$ (任意写出一个即可)。

(2) ① 15, 15。

② $\angle MBQ = \angle CBQ$ 。理由如下：

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB = BC$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ 。由轴对称的性质，得 $BM = AB$ ， $\angle BMP = \angle A = 90^\circ$ 。所以 $\angle BMQ = \angle C = 90^\circ$ ， $BM = BC$ 。又因为 BQ 是公共边，所以 $\text{Rt}\triangle MBQ \cong \text{Rt}\triangle CBQ$ (HL)，所以 $\angle MBQ = \angle CBQ$ 。

(3) $40/11 \text{ cm}$ 或 $24/13 \text{ cm}$ 。

思路： 折叠就是轴对称，折痕两侧的对应边、对应角相等。(1) EF 是对折线， $BE = (1/2)AB$ ；折叠后 $BM = AB$ ，所以 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中 $BE = (1/2)BM$ ， $\angle BME = 30^\circ$ ，再由 $EF \parallel BC$ 和折叠推出 $\angle MBC = 30^\circ$ 、 $\angle ABM = 60^\circ$ 、 $\angle ABP = \angle PBM = 30^\circ$ 。(2) 换成正方形后 $BM = AB = BC$ ， $\angle BMQ = \angle C = 90^\circ$ ，两个直角三角形斜边公共、一条直角边相等，用 HL 得全等；图 2 中 $\angle MBC = 30^\circ$ ，被 BQ 平分，所以两个角都是 15° 。(3) 由全等得 $MQ = CQ$ ，设 $AP = PM = x$ ，则 $PQ = x + CQ$ ， $PD = 8 - x$ ， $DQ = 8 - CQ$ ，在 $\text{Rt}\triangle PDQ$ 中用勾股定理列方程。 F 是 CD 的中点， $FQ = 1$ 时 Q 可能在 F 下方 ($CQ = 3$) 或上方 ($CQ = 5$)，要分两种情况：

$$(x+3)^2 = (8-x)^2 + 5^2 \Rightarrow x = \frac{40}{11}; \quad (x+5)^2 = (8-x)^2 + 3^2 \Rightarrow x = \frac{24}{13}.$$